Zur Theorie der Differentialgleichungen.

Von **B. Igel** in Wien.

I.

In meiner Abhandlung „Über eine Determinanten-Beziehung in der Theorie der Differentialgleichungen" (Monatshefte Bd. IV) bin ich zu einer Differentialgleichung gelangt, welche die nach den Elementen der n^{ten} Zeile der Determinante $|y_1, y_2', \ldots, y_n^{(n-1)}|$, wo die y_i ein Fundamentalsystem von Integralen einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darstellen, genommenen Subdeterminanten zu Integralen hat. Die so gefundene Gleichung nannte ich „die zur ursprünglichen Differentialgleichung zugehörige" und bezeichnete sie als den Schlüssel für die Theorie der adjungierten Differentialgleichungen. In der That zeigte ich in der darauf folgenden Abhandlung „Zur Theorie der adjungierten Differentialgleichungen" (Monatshefte Bd. V) dass die aus ihr durch die Substitution $u_{n1} : D(y_1 \ldots y_n)$ hervorgehende Differentialgleichung die Charaktereigenschaften und die Form der Lagrange'schen Adjungierten besitze.

Wegen der Wichtigkeit des Zusammenhanges zwischen der „Zugehörigen" und der Adjungierten, die sich bald zeigen wird, möge hier eine geschichtliche Notiz Platz finden.

Schon im Jahre 1881 hat Herr Hazzidakis (Borchardt's Journal Bd. 90) folgenden Satz bewiesen:

Wenn

$$\begin{matrix} y_{11}\, y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21}\, y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}\, y_{n2} \cdots y_{nn} \end{matrix}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen zu

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + + A_{1n}\, y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + + A_{2n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}\, y_1 + A_{n2}\, y_2 + + A_{nn}\, y_n \end{cases}$$

darstellt, so ist

$$\begin{matrix} Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n} \\ Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{n1}, Y_{n2}, \ldots, Y_{nn} \end{matrix}$$

ein ebensolches zum Differentialgleichungssysteme

$$(2) \qquad \begin{cases} -\dfrac{dY_1}{dx} = (A_{11} - \lambda)\, Y_1 + A_{21}\, Y_2 + \cdot + A_{n1}\, Y_n \\ -\dfrac{dY_2}{dx} = A_{12}\, Y_1 + (A_{22} - \lambda)\, Y_2 + + A_{n2}\, Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{dY_n}{dx} = A_{1n}\, Y_1 + A_{2n}\, Y_2 + + (A_{nn} - \lambda)\, Y_n, \end{cases}$$

wenn $Y_{\varrho\sigma}$ die in der Fundamentaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} y_{11}\, y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21}\, y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}\, y_{n2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix}$$

des ersten Differentialgleichungssystems dem Elemente $y_{\varrho\sigma}$ entsprechende Unterdeterminante bedeutet und $\lambda = A_{11} + A_{22} + + A_{nn}$ ist.

Herr Hazzidakis zieht keine weiteren Consequenzen aus diesem Satze. Herr Georg Haeuser in Karlsruhe, dem der Satz nicht bekannt war, beweist in seiner Dissertation (1892), in deren Besitz ich durch gütige Zusendung des Herrn Professors Königsberger gelangte, denselben von Neuem und zieht dann folgende Consequenz:

Setzt man in (2) $Y_{\varrho\sigma} = u_{\varrho\sigma} D$, so geht (2) über in

$$(3) \qquad \begin{cases} -\dfrac{du_1}{dx} = A_{11}\, u_1 + A_{21}\, u_2 + + A_{n1}\, u_n \\ -\dfrac{du_2}{dx} = A_{12}\, u_1 + A_{22}\, u_2 + + A_{n2}\, u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{du_n}{dx} = A_{1n}\, u_1 + A_{2n}\, u_2 + + A_{nn}\, u_n, \end{cases}$$

wenn man die Relation berücksichtigt

$$\frac{dD}{dx} = \lambda D.$$

„(3) soll nun das adjungierte Differentialgleichungssystem von 1) genannt werden, indem seine Integrale die Form

$$Y_{\varrho\sigma} : D$$

haben".

Aus diesem Satze zieht wiederum Herr Haeuser folgende Consequenz. Die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung sei in der Form geschrieben

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y, \tag{4}$$

so kann man dieselbe durch das System ersetzen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + + A_n y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= \quad y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} &= \qquad\quad y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \qquad\qquad\qquad y_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Dabei ist $y = y_n$. Das adjungierte System zu (5) lautet

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{d\eta_1}{dx} &= A_1 \eta_1 + \eta_2 \\ -\frac{d\eta_2}{dx} &= A_2 \eta_1 + \qquad \eta_3 \\ -\frac{d\eta_3}{dx} &+ A_3 \eta_1 + \qquad\qquad \eta_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\frac{d\eta_{n-1}}{dx} &= A_{n-1} \eta_1 + \qquad\qquad\qquad \eta^n \\ -\frac{d\eta_n}{dx} &= A_n \eta_1. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Wenn nun $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n Fundamentalintegrale von (4) sind, so ist

$$D = \begin{vmatrix} Y_1^{(n-1)} & Y_1^{(n-2)} & \dots & Y_1 \\ Y_2^{(n-1)} & Y_2^{(n-2)} & \dots & Y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n^{(n-1)} & Y_n^{(n-2)} & \dots & Y_n \end{vmatrix} = Ce^{\int A_1\,dx}$$

Fundamentaldeterminante von (5).

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sind particuläre Werte von y oder y_n $Y_1^{(n-1)}, Y_2^{(n-1)}, \dots, Y_n^{(n-1)}$ dagegen von y_1.

$$H_\lambda = \begin{vmatrix} Y_1^{(n-2)} & \dots & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{\lambda-1}^{(n-2)} & \dots & Y_{\lambda-1} \\ Y_{\lambda+1}^{(n-2)} & \dots & Y_{\lambda+1} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{Ce^{\int A_1\,dx}}$$

folgt jetzt als particulärer Wert von η_1 in (6).

Durch wiederholte Differentiation der ersten Gleichung in (6) mit Benützung der übrigen erhalten wir die adjungierte Differentialgleichung, deren Integrale

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

sind.

Obgleich der Gedankengang des Herrn Haeuser derselbe ist, wie der meinige, konnte er zu der intermediären Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der „Zugehörigen“ mit seiner Methode nicht gelangen. Im zweiten Bande des Schlesinger'schen Handbuches werden Differentialgleichungen behandelt, welche die Subdeterminanten nach den Elementen irgend einer Zeile der Determinante $|y_1, y_2', \dots, y_n^{(n-1)}|$ zu Integralen haben; sie werden dort „die ersten Associierten zur ursprünglichen Differentialgleichung“ genannt und sind specielle Fälle von viel allgemeineren Differentialgleichungen. Sind z. B. $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}$ die nach den Elementen der ersten Zeile genommenen Unterdeterminanten und stellt man die Gleichungen auf:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_{11}}{dx} = \overset{1}{\varphi}_{11}\, u_{11} + \overset{1}{\varphi}_{12}\, u_{21} + + \overset{1}{\varphi}_{1n}\, u_{n1} \\ \dfrac{d^2u_{11}}{dx} = \overset{2}{\varphi}_{11}\, u_{11} + \overset{2}{\varphi}_{12}\, u_{21} + + \overset{2}{\varphi}_{1n}\, u_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^nu_{11}}{dx^n} = \overset{n}{\varphi}_{11}\, u_{11} + \overset{n}{\varphi}_{12}\, u_{21} + + \overset{n}{\varphi}_{1n}\, u_{n1}, \end{cases}$$

so ist

$$
(8)\qquad \begin{vmatrix} \frac{du_{11}}{dx} - \overset{1}{\varphi}_{11}\, u_{11}, \overset{1}{\varphi}_{12}, \ldots, \overset{1}{\varphi}_{1n} \\ \frac{d^2u_{11}}{dx} - \overset{2}{\varphi}_{11}\, u_{11}, \overset{2}{\varphi}_{11}, \ldots, \overset{2}{\varphi}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^nu_{11}}{dx^n} - \overset{n}{\varphi}_{11}\, u_{11}, \overset{n}{\varphi}_{12}, \ldots, \overset{n}{\varphi}_{1n} \end{vmatrix} = 0
$$

die Differentialgleichung, der die Integrale $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}$ genügen. Schreiben wir dieselbe in der Form

$$
(9)\qquad (-1)^{n-1} P_n^1 \frac{d^n u_{11}}{dx^n} + (-1)^n P_{n-1}^1 \frac{d^{n-1} u_{11}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_0^1 u_{11} = 0,
$$

so ist

$$
(10)\qquad \begin{cases} P_n^1 = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{1k}\right| \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = \quad 2 \ldots n \end{pmatrix} \\ P_{n-1}^1 = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{1k}\right| \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, n-2 \\ k = \quad 2, \ldots n \end{pmatrix}. \end{cases}
$$

Durch die Substitution

$$
u_{11} : D(y_1, \ldots, y_n) = u
$$

in (9) erhält man eine der Adjungierten des Herrn Cels. Während aber derselbe, wie aus der im 115. Bande des Fuchs'schen Journales enthaltene Arbeit des Herrn Grünfeld hervorgeht, die Lagrange'sche Adjungierte zugrunde legt und aus ihr die übrigen Adjungierten ableitet, könnte man alle als gleichberechtigt ansehen und jede aus der entsprechenden Associierten ableiten. Wie vortheilhaft diese Auffassung ist, wird sich bald zeigen.

II.

Wir behandeln nun folgende Frage. Es besteht bekanntlich die Relation

$$
(11)\qquad \left| u_{n1}, u'_{n2}, \ldots, u_{nn}^{(n-1)} \right| \left| y_1, y'_2, \ldots, y_n^{(n-1)} \right| = 1;
$$

welches sind die zu (11) analogen Beziehungen, die zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und den Lösungen $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}$ der i^{ten} Adjungierten stattfinden?

Bemerken wir, dass

$$(12)\qquad \left|u_{1k}^{(k-1)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \overset{1}{\varphi}_{11} & \overset{1}{\varphi}_{12} & \dots & \overset{1}{\varphi}_{1n} \\ \overset{2}{\varphi}_{11} & \overset{2}{\varphi}_{12} & \dots & \overset{2}{\varphi}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{n-1}{\varphi}_{11} & \overset{n-1}{\varphi}_{12} & \dots & \overset{n-1}{\varphi}_{1n} \end{vmatrix} \cdot \left|u_{ik}\right| \; (ik = 1, 2, \dots, n)$$

$$= \left|\varphi\right| \left|y_1, y_2', \dots, y_n^{(n-1)}\right|^{n-1},$$

ist, so folgt

$$(13)\qquad \left|u_{ik}^{(k-1)}\right| = \left|\varphi\right| e^{-(n-1)\int p_1\,dx}.$$

Wenn nun n gerade ist, so dass das erste Glied in (9) negativ und das zweite positiv ist, so muss die Relation bestehen

$$(14)\qquad P_{n-1}^1 : P_n^1 = -(n-1)\,p_1 + \frac{d\log\left|\varphi\right|}{dx}$$

und wenn n ungerade ist, wo das Umgekehrte der Fall ist, die Relation

$$(15)\qquad P_{n-1}^1 : P_n^1 = (n-1)\,p_1 - \frac{d\log\left|\varphi\right|}{dx}.$$

Seien die $\overline{v}_i$ ein Fundamentalsystem von Integralen der aus (9) sich ergebenden adjungierten Differentialgleichung und bestehe die Relation

$$(16)\qquad \left|\overline{v}_i^{(\lambda)}\right| \left|y_i^{(\lambda)}\right| = P,$$

so muss, wenn das erste Glied der Adjungierten negativ ist, d. h. wenn n ungerade ist, der zweite Coefficient derselben die Form

$$(17)\qquad Q_1 = p_1 + \frac{d\log P}{dx}$$

und für ein gerades n, die Form

$$(18)\qquad Q_1 = -p_1 - \frac{d\log P}{dx}$$

haben.

Setzt man in der Adjungierten $u_{11}D$ für v und dividiert dieselbe durch D, so erhält der zweite Coefficient resp. die Form

$$(19)\qquad \begin{aligned} \overline{Q}_1 &= -(n-1)\,p_1 + \frac{d\log P}{dx} \\ \overline{Q}_1 &= (n-1)\,p_1 - \frac{d\log P}{dx}. \end{aligned}$$

Da diese Ausdrücke mit denen von (14) und (15) identisch sind, so erhält man durch Vergleichung die Formel

(20) $$P = C\,|\varphi|.$$

In dieser Formel ist, wenn man von der Constante absieht, die allgemeine Antwort auf die obige Frage enthalten.

Was die Constante betrifft, so scheint mir folgende allgemeine Regel zu gelten:

Wenn das Fundamentalsystem der Adjungierten die durch $D(y_1,\ldots,y_n)$ dividierten Unterdeterminanten nach den Elementen der k^{ten} Zeile derselben sind, so ist, wenn k ungerade ist, $C = 1$, also $P = |\varphi|$ und, wenn k gerade ist, $C = -1$, also $P = -|\varphi|$.

Für diese Regel habe ich allerdings keinen allgemeinen Beweis, ich glaube sie aber aus den nun folgenden Ausrechnungen einiger Beispiele abstrahieren zu können.

Die Determinante $|\varphi|$ möge nun für $n = 3$ für alle drei Associierten ausgerechnet werden. Es ist

$$u_{31} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}$$

$$\frac{du_{31}}{dx} = 0 - u_{21} + 0$$

$$\frac{d^2u_{31}}{dx^2} = u_{11} + p_1\,u_{21} - p_2\,u_{31}$$

also

(21) $$|\varphi| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & p_1 \end{vmatrix} = 1.$$

Es ist ferner

$$u_{11} = \begin{vmatrix} y_2' & y_3' \\ y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$\frac{du_{11}}{dx} = -p_1\,u_{11} + 0 + p_3\,u_{31}$$

$$\frac{d^2u_{11}}{dx^2} = \left(p_1^2 - p_1'\right)u_{11} - p_3\,u_{21} + \left(-p_1 p_3 + p_3'\right)u_{31}$$

also

(22) $$|\varphi| = \begin{vmatrix} 0 & p_3 \\ -p_3 & -p_1 p_3 + p_3' \end{vmatrix} = p_3^2.$$

Endlich ist

$$u_{21} = -\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$\frac{du_{21}}{dx} = -u_{11} + p_1 u_{21} + p_2 u_{31}$$

$$\frac{d^2u_{21}}{dx^2} = 0 + \left(-p_2 + p_1^2 + p_1'\right) u_{21} + \left(-p_3 + p_1 p_2 + p_2'\right) u_{31}$$

also

$$|\varphi| = \begin{vmatrix} -1 & p_2 \\ 0 & -p_3 + p_1 p_2 + p_2' \end{vmatrix} \tag{23}$$

$$= p_3 - p_1 p_2 - p_2'.$$

Vergleicht man die Formeln (21), (22), (23) mit den Formeln (13) und (24) bei Herrn Grünfeld, so kommt man auf die obige Regel. Zum Schlusse noch eine Bemerkung. Die in Rede stehende Frage nach den zu (11) analogen Beziehungen hat nur dann einen richtigen Sinn, wenn eine allgemeine Relation verlangt wird

$$\left|u_{i1}, u_{i2}', \ldots, u_{in}^{(n-1)}\right| \left|y_1, y_2', \ldots, y_n^{(n-1)}\right| = P,$$

in der P die möglichst einfache Form hat, keine Exponentialfunction enthält und so beschaffen ist, dass es mit i variiert und für jedes der n Producte den Wert angibt. Diese Frage ist nun befriedigend beantwortet in Folge der merkwürdigen Relation

$$\begin{aligned} &\left|\varphi_{ik}^{\lambda}\right|_{\binom{\lambda=1,2,\ldots,n-1}{k=\;\;2,\ldots,n}} : \left|\varphi_{ik}^{\lambda}\right|_{\binom{\lambda=1,2,\ldots,n-2\;n}{k=\;\;2,\ldots,\;\;\;\;\;\;\;n}} = \\ &= -(n-1)\,p_1 + \frac{d \log |\varphi|}{dx}. \end{aligned} \tag{24}$$

Herr Grünfeld kümmert sich um die einfache und einheitliche Form nicht und lässt auch in den Fällen, wo ihm die Ausrechnung gelungen ist, Exponentialfunctionen zu, es fehlen daher der Frage alle drei Merkmale und sie hat überhaupt keinen richtigen Sinn.