

ESTRATTO

DI

UNA LETTERA SCRITTA IN LINGUA ITALIANA

il dì 21 Gennaio 1864

DA

BERNARDO RIEMANN

AL SIG. PROFESSORE

ENRICO BETTI (*).*Carissimo Amico*

. . . . Per trovare l'attrazione di un cilindro omogeneo retto ellissoidale qualunque, io considero, introducendo coordinate rettangolari x, y, z , il cilindro infinito limitato dalla diseguaglianza:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

ripieno di massa di densità costante: $+1$, se $z < 0$, e di densità: -1 , se $z > 0$. Allora se poniamo, come è solito, il potenziale nel punto x, y, z eguale a V e:

$$\frac{dV}{dx} = X, \quad \frac{dV}{dy} = Y, \quad \frac{dV}{dz} = Z,$$

si ha per $z = 0$, $V = 0$, $X = 0$, $Y = 0$.

Z è eguale al potenziale dell'ellisse:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

(*) La Scienza deplora altamente la perdita dell'eminente geometra Tedesco avvenuta in Italia il 20 Luglio di quest'anno 1866.

colla densità 2, e si trova col metodo di *Dirichlet*, se denotiamo con σ la radice maggiore dell'equazione;

$$1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{x^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{s} = F = 0,$$

e

$$\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)s}$$

con D:

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sqrt{F} ds}{D}.$$

X ed Y si possono determinare dalle equazioni:

$$\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$$

e dalle condizioni:

$$X = 0, \quad Y = 0$$

per $z = 0$.

Per effettuare questa determinazione conviene di sostituire invece di $4 \int_0^{\infty} 2 \int_0^{\infty}$ esteso per il contorno intero di un pezzo del Piano degli s , che contiene il valore σ senza contenere verun altro valore di diramazione o di discontinuità della funzione sotto il segno integrale. Se denotiamo le radici di $F = 0$ in ordine di grandezza con $\sigma, \sigma', \sigma''$, questi valori sono tutti reali e in ordine di grandezza:

$$\sigma, \quad 0, \quad \sigma', \quad -b^2, \quad \sigma'', \quad -a^2,$$

in modo che:

$$\sigma > 0 > \sigma' > -b^2 > \sigma'' > -a^2.$$

Posto:

$$F = t - \frac{z^2}{s},$$

viene

$$Z = 2 \int_{\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{ts - z^2}}{D \sqrt{s}} ds,$$

$$\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx} = \int_{\infty}^{\infty} \frac{s^{\frac{dx}{ds}} (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} ds}{D \sqrt{s}};$$

ma :

$$\int_0^x (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{ts}}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{ts}}} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} d \log \xi ,$$

e:
$$\frac{s \frac{dt}{dx} ds}{D \sqrt{s}} = -2abx (a^2 + s)^{-\frac{3}{2}} (b^2 + s)^{-\frac{1}{2}} ds = 4abx d \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}.$$

Dunque si trova per integrazione parziale:

$$X = \frac{2abxz}{a^2 + s} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}} (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} d \log ts.$$

Se si prende la via dell' integrazione come nella espressione di Z il valore dell' integrale sodisfa sempre alla condizione :

$$\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx};$$

ma può differire di funzioni di x e di y , la funzione sotto segno integrale essendo discontinua anche per $t = 0$. Dunque occorre una determinazione ulteriore della via dell' integrazione.

Nella espressione di $\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}$ la funzione sotto segno integrale è continua per $s = 0$; dunque il pezzo del piano degli s , per il cui contorno l' integrale è esteso, deve contenere $s = \sigma$ e può contenere o no $s = 0$, ma nessuno altro dei valori sopra notati. Nella espressione di X questo pezzo deve essere determinato in modo che X sia $= 0$ per $z = 0$; e affinchè ciò avvenga, dovendo contenere $s = \sigma$, deve anche contenere la maggiore radice di $ts = 0$ (la quale è la maggiore radice di $t = 0$, se

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0 ,$$

ed è $= 0$, se :

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0)$$

ma nessun altra radice di $ts = 0$. Perchè per $z = 0$ le radici di $F = 0$ coincidono colle radici di $ts = 0$, e se la via dell' integrazione passasse *tra* due valori di discontinuità che coincidono per $z = 0$, dovrebbe per $z = 0$ passare per questo valore in modo che l' integrale nella espressione di X diverrebbe infinito ed il valore non ostante il fattore z rimarrebbe finito.

Vostro aff^{mo} Amico
Riemann.