Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. (*)

(*Memoria del prof.* G. Jung, *a Milano.*)

Il problema di cui mi occupo in questa Memoria si è quello di assegnare i sistemi lineari generali d'ordine minimo di un dato genere p e di un dato grado k o per lo meno d'indicare criterii generali per determinarli (§§ 5-7); problema che, limitato ai sistemi triplamente infiniti e alle reti, si riattacca con altre questioni relative alla rappresentazione delle superficie e alla teorica delle trasformazioni piane multiple. Aggruppati i sistemi lineari generali in *famiglie* (§ 2), distinti quelli di minimo ordine in *normali* e *derivati* e classificatili in *tipi monomi, binomi* e *trinomi* (§ 4), trovo una relazione invariantiva fra il numero dei punti fondamentali e il numero delle linee fondamentali, tanto pei sistemi lineari generali (§ 3), quanto pei sistemi speciali (§ 9), che sono fra loro riducibili mediante trasformazioni quadratiche. Indico all'ultimo (§ 10-11) i sistemi di minimo ordine relativi ai generi $p = 0, 1, 2, 3, 4$, insieme a parecchi teoremi che vi si riferiscono (§ 8); non senza mettere in rilievo (n.° 67) le questioni accessorie che l'esposto metodo lascia insolute.

§ 1. Generalità sui sistemi lineari a punti fondamentali arbitrarii.

1. In un piano sono dati in posizioni distinte affatto arbitrarie e fra loro indipendenti f *punti fondamentali* $a_1, a_2, \ldots a_f$ coi rispettivi gradi di moltiplicità $r_1, r_2, \ldots r_f$ (a_i punto fondamentale r_i-plo) che si suppongono disposti

(*) Mentre questa Memoria aspettava il turno d'inserzione negli *Annali* ne comunicai al R. Istituto Lombardo alcune parti, riassunte nei *Rendiconti* dell'Istituto (ser. 2.ª, t. XX, adunanza 31 marzo 1887); tale riassunto avrebbe richiesto una Errata-corrige, che però ho stimato inutile di pubblicare.

in ordine di grandezza decrescente, cosicchè $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_f$. L'ipotesi che i punti a_i abbiano posizioni speciali sarà considerata a parte (§ 9).

La totalità $\infty^{c'}$ di curve algebriche dell'ordine M e del genere p, non spezzantisi in parti e passanti con r_i rami pei punti a_i ($i = 1, 2, \ldots f$) — ma non vincolate da nessun'altra condizione comune all'infuori di quelle o direttamente assorbite dai passaggi pei punti fondamentali o indirettamente ma univocamente determinate da tali passaggi — costituisce un sistema lineare *generale* (C_M) del genere p e dell'ordine M. Chiamo *dimensione* del sistema il numero c'; e chiamo *grado* il numero k delle intersezioni, esterne ai punti a_i, di due C_M qualunque.

Se fra queste intersezioni ve ne sono di fisse, cioè comuni a tutte quante le curve di (C_M), esse completano coi punti fondamentali la *base* del sistema (cfr. n.i 54, 57). Per esempio, quando il sistema è un fascio ($c' = 1$), le intersezioni di due C_M, esterne ai punti a_i, sono tutte fisse e il grado k esprime esclusivamente il numero dei punti base che sono determinati dai punti fondamentali.

2. Il sistema lineare poc'anzi definito è *completamente determinato* dai punti fondamentali arbitrarii a_i, perchè senza eccezione ogni curva di ordine M e di genere p, avente un punto r_i-plo in a_i ($i = 1, 2, \ldots f$), fa parte del sistema; onde si avrà:

$$\frac{M(M+3)}{2} = \frac{\Sigma r(r+1)}{2} + c' \tag{1}$$

$$\frac{(M-1)(M-2)}{2} = \frac{\Sigma r(r-1)}{2} + p \tag{2}$$

$$M^2 = \Sigma r^2 + k, \tag{3}$$

dalle quali si ricava:

$$c' = k + 1 - p, \tag{4}$$

equazione di condizione che collega le tre caratteristiche p, k, c' di un sistema lineare *generale* e *determinato* (dai punti fondamentali arbitrarii). Se $c' = 1$ si ha: *in un fascio* generale *il grado k è uguale al genere p.*

3. In un sistema S, generale e determinato, sono contenuti $c' - 1$ altri sistemi lineari, aventi gli stessi punti fondamentali arbitrarii a_i e che sono di ugual genere, di ugual grado e di ugual ordine del dato, ma di dimensione minore; $c'' + 1$ curve arbitrarie C_M di S non appartenenti a un medesimo sistema di dimensione $< c''$, e non aventi altri punti *arbitrarii* comuni oltre agli

a_i, staccano dal sistema dato un *sistema minore* $\infty^{c''}$ o di dimensione c''. Questi sistemi minori, contenuti nel sistema dato, sono *incompletamente determinati* dai loro punti fondamentali arbitrarii; fra le loro caratteristiche p, k, c'' ha luogo la relazione:

$$c'' \leqq k + 1 - p. \tag{4}$$

4. A rappresentare un sistema lineare S del genere p, del grado k e della dimensione c' di curve piane d'ordine M, useremo secondo i casi uno dei simboli equivalenti:

$$S \equiv (C_M)^k_{p,\,c'} \equiv (C_M)^k_p \equiv (C_M)_{p,\,c'} \equiv (C_M)_p \equiv (C_M) \equiv (p,\ k,\ c')_M,$$

nei quali sono messe in evidenza le sue caratteristiche; oppure uno dei simboli:

$$S \equiv [a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \ldots a_f^{r_f}]^{k,\,c'}_{M,\,p} \equiv [a_1^{r_1} \ldots a_f^{r_f}]^k_{M,\,p} \equiv [a_1^{r_1} \ldots a_f^{r_f}]_M \equiv [a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_f^{r_f}],$$

nei quali sono messi in evidenza anche i suoi punti fondamentali.

5. Indicheremo con f_c il numero delle *linee fondamentali* del sistema: cioè delle curve d'ordine $< M$ dotate della proprietà di non essere incontrate da una C_M qualunque esternamente ai punti fondamentali a_1, a_2,... a_f.

§ 2. Famiglie di sistemi lineari. — Sistemi di minimo ordine.

6. Un sistema lineare di qualsivoglia genere e grado appartiene a una *famiglia* di sistemi lineari (di ugual genere e ugual dimensione, ma di ordine in generale differente), i quali provengono dal dato mediante una o più *trasformazioni quadratiche* successive. Fra i sistemi di una stessa famiglia ve n'ha uno (*sistema tipico*, *sistema minimo* o *di ordine minimo*) il cui ordine μ non può ulteriormente essere abbassato da qualsiasi trasformazione quadratica; esso è caratterizzato dalla condizione:

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu. \tag{5}$$

Infatti se la (5) non è verificata, collocando i punti fondamentali di una trasformazione quadratica T_2 nei *primi tre* (n.° 1) punti fondamentali del sistema dato, questo si trasforma in altro di ordine minore.

Se al contrario la condizione (5) è sodisfatta, comunque si assumano i punti fondamentali della trasformazione quadratica, il sistema dato (C_μ) si trasforma in altro di ordine non minore del numero $2\mu - (r_1 + r_2 + r_3)$; il quale numero per (5) è $\geqq \mu$.

7. *Quando* $r_1 + r_2 + r_3 = \mu$ *il sistema generale d'ordine minimo*

$$(C_\mu) \equiv [a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3} \dots l_i^{r_i} \dots l_f^{r_f}],$$

è trasformabile in sè stesso. Infatti mediante la trasformazione quadratica $T_2 \equiv (a\,b\,c,\ \alpha\,\beta\,\gamma)$ le curve del sistema trasformato sono appunto dell'ordine $2\mu - (r_1 + r_2 + r_3) = \mu$; le indicheremo con C'_μ. Quanto ai punti α, β, γ essi sono rispettivamente multipli per le C'_μ secondo i numeri

$$\mu - (r_2 + r_3) = r_1, \qquad \mu - (r_3 + r_1) = r_2, \qquad \mu - (r_1 + r_2) = r_3,$$

e ogni punto r_i-plo l_i $(i \geqq 4)$ delle C_μ dà luogo a un punto equimolteplice λ_i per le C'_μ (λ_i trasformato quadraticamente di l_i); cosicchè (C_μ) si cambia, mediante la T_2, nel sistema $(C'_\mu) \equiv [\alpha^{r_1} \beta^{r_2} \gamma^{r_3} \dots \lambda_i^{r_i} \dots \lambda_f^{r_f}]$ che ha genere, grado e dimensione uguali a quelli del dato, perchè l'indicata trasformazione quadratica lascia invariati questi elementi. Inoltre (C_μ) e (C'_μ) hanno lo stesso numero di punti fondamentali arbitrarii e questi sono rispettivamente affetti dagli stessi gradi di moltiplicità; onde i due sistemi generali si possono riguardare come identici; in altri termini mediante l'indicata T_2 il sistema (C_μ) si trasforma in sè stesso. Ogni altra T_2 condurrebbe a un sistema trasformato di ordine $> \mu$.

8. *Due differenti sistemi generali d'ordine minimo, anche se di ugual genere, ugual grado e ugual dimensione, sono fra loro irriducibili.* Infatti siano $(C_{\mu'})$ e (C_μ) i due sistemi d'ordine minimo, di genere p, di grado k e di dimensione c':

1.° se $\mu' = \mu$, i due sistemi, pel numero precedente, o sono irriducibili o contro l'ipotesi si possono riguardare come identici;

2.° se $\mu' > \mu$, il primo sistema, essendo d'ordine minimo, non potrà trasformarsi nell'altro, ch'è d'ordine minore.

9. *A un dato genere p e a un dato grado k corrispondono tante famiglie distinte di sistemi lineari, quanti sono i relativi sistemi d'ordine minimo.*

10. Se un sistema generale del minimo ordine possiede due soli punti fondamentali a, b, multipli secondo r_1, r_2 e se $r_1 + r_2 = M$, la retta ab, non essendo incontrata in punti variabili da una C_M qualunque, è manifestamente una linea fondamentale; d'altra parte, come al n.° 7 si dimostra che il sistema è bensì trasformabile in sè stesso, ma non può ridursi ad altro di ordine minore, cosicchè esso è di ordine minimo.

Escluso questo caso, si riconosce [imitando la dimostrazione di Caporali (*)] che in ogni altro sistema lineare dotato di punti fondamentali *arbitrarii* e di almeno una curva fondamentale, la somma dei tre gradi più elevati di moltiplicità supera l'ordine del sistema; quindi se $r_1 + r_2 + r_3 \leqq M$, cioè se il sistema (generale) è di ordine minimo, e si esclude il caso eccezionale testè considerato, esso non può contenere curve fondamentali. Si ha dunque il teorema:

I. — Un sistema generale del minimo ordine, di qualsivoglia genere e grado, è privo di linee fondamentali; eccettuato il caso che esso possieda due soli punti fondamentali, la somma dei cui gradi di moltiplicità uguagli l'ordine del sistema.

§ 3. Proprietà invariantiva dei sistemi appartenenti a una stessa famiglia. *Eccesso* degli elementi fondamentali.

11. Sia

$$(C_\mu) \equiv [a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \dots a_{f_0}^{r_{f_0}}],$$

il sistema di minimo ordine corrispondente a una data famiglia $(p\ k\ c'\ \mu)$ di sistemi lineari generali, e si supponga che il gruppo (k) espresso dal grado consti esclusivamente di punti variabili (**). Ogni sistema appartenente alla medesima potrà evidentemente ricavarsi da (C_μ) mediante un certo numero di trasformazioni quadratiche successive o ch'è lo stesso mediante una opportuna trasformazione Cremoniana T_n di ordine n.

12. Poniamo

$$T_n \equiv \begin{pmatrix} v_1^{s_1}\ v_2^{s_2} \dots\ v_k^{s_k} \dots\ v_\varphi^{s_\varphi} \\ w_1^{\sigma_1}\ w_2^{\sigma_2} \dots w_i^{\sigma_i} \dots w_\varphi^{\sigma_\varphi} \end{pmatrix}$$

ove i simboli $v_1, v_2, \dots v_\varphi$ indicano i φ punti fondamentali s_k-pli del primo piano (quello del sistema dato); e i simboli $w_1, w_2, \dots w_\varphi$ i φ punti fondamentali σ_i-pli dell'altro piano (quello del sistema trasformato, che si tratta di determinare);

(*) *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti*, ecc., n.i 2, 3. (Collectanea Mathematica, Milano, 1881.)

(**) Per sistemi generali nei quali non fosse soddisfatta questa condizione vedansi i n.i 57 e 62.

supponiamo inoltre per maggior generalità che

$$v_1 \equiv a_1, \qquad v_2 \equiv a_2, \ldots \qquad v_\eta \equiv a_\eta:$$

cioè che η punti v_k coincidano con altrettanti punti a_k, il numero $\eta (\geqq 0)$ potendo essere uguale al minore dei due numeri φ e f_0. [In questo gruppo (η) i punti $a_1, a_2, \ldots a_\eta$ s'intendono ordinati secondo la grandezza decrescente delle rispettive moltiplicità, cosicchè $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_\eta$; ma quì non si esclude che, pur essendo r_1 la molteplicità massima nel gruppo (η), non possa fra gli f_0 punti fondamentali del sistema esservene taluno, all'infuori del detto gruppo, di moltiplicità maggiore; (C_μ) essendo d'ordine minimo si avrà però evidentemente a ogni modo $r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu$.]

13. In tale ipotesi, dalla trasformata di una C_μ qualunque si stacca r_k volte $(k = 1, 2, \ldots \eta)$ la C'_k, linea fondamentale del secondo piano corrispondente al punto fondamentale v_k e perciò d'ordine s_k; cosicchè, prescindendo da queste η linee fisse C'_k, l'ordine della trasformata C_M sarà

$$M = n\mu - \sum_{k=1}^{k=\eta} r_k s_k. \tag{6}$$

Inoltre se la C'_k passa h_{ki} volte pel punto w_i, la molteplicità ρ_i della C_M in w_i sarà:

$$\rho_i = \mu\sigma_i - \sum_{k=1}^{k=\eta} r_k h_{ki}; \tag{7}$$

mentre agli $f_0 - \eta$ punti a_k che sono distinti dai punti v corrispondono nel secondo piano di T_n altrettanti punti $\mathfrak{a}_k$, i quali saranno r_k-pli per la C_M.

Onde il sistema dato (C_μ) si trasforma mediante la T_n nel sistema:

$$(C_M) \equiv [w_1^{\rho_1} w_2^{\rho_2} \ldots w_\varphi^{\rho_\varphi} \mathfrak{a}_{\eta+1}^{r_{\eta+1}} \ldots \mathfrak{a}_{f_0}^{r_{f_0}}],$$

che appartiene evidentemente alla famiglia considerata.

14. Vogliamo ora determinare il numero f dei punti fondamentali e il numero f_c delle linee fondamentali del sistema trasformato (C_M).

Io dico intanto che escluso il caso di $r_1 + r_2 = \mu$, nel quale ρ_i può essere nullo, si ha in generale:

$$\rho_i > 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots \varphi). \tag{8}$$

Per dimostrarlo osservo che se C_i è la linea fondamentale (d'ordine σ_i) del primo piano di T_n, corrispondente al punto w_i, il numero h_{ki}, oltre che la moltiplicità della C'_k in w_i, esprime anche la moltiplicità in v_k della C_i — e quindi è necessariamente $h_{ki} < \sigma_i$, se $\sigma_i > 1$; e $h_{ki} \leqq 1$ se $\sigma_i = 1$: potremo dunque porre:

$$h_{1i} = \sigma_i - h_1, \qquad h_{2i} = \sigma_i - h_2 \qquad (h_1 \geqq 0,\ h_2 \geqq 0).$$

Ciò premesso, dal valore (7) di ρ_i è evidente che per $\eta = 0$ e per $\eta = 1$ si ha $\rho_i > 0$.

Per $\eta = 2$, sostituendo le precedenti espressioni di h_{1i} e h_{2i} si ha:

$$\rho_i = \sigma_i(\mu - r_1 - r_2) + h_1 r_1 + h_2 r_2;$$

onde:

$$\text{se} \quad r_1 + r_2 < \mu, \qquad \rho_i > 0;$$
$$\text{se} \quad r_1 + r_2 = \mu, \qquad \rho_i \geqq 0.$$

Sia finalmente $\eta > 2$: dal valore di ρ_i si ricava manifestamente:

$$\rho_i \geqq \mu\sigma_i - r_1 h_{1i} - r_2 h_{2i} - r_3 [h_{3i} + \cdots + h_{\eta i}],$$

ossia, ponendo:

$$r_1 = r_3 + \eta_1, \qquad r_2 = r_3 + \eta_2 \qquad (\eta_1 \geqq 0,\ \eta_2 \geqq 0),$$

e sostituendo poi per h_{1i} e h_{2i} le espressioni sopra indicate:

$$\rho_i \geqq \mu\sigma_i - r_3 [3\sigma_i - 1) - (h_{\eta+1i} + \cdots + h_{\varphi i})] - \eta_1(\sigma_i - h_1) - \eta_2(\sigma_i - h_2),$$

o finalmente:

$$\rho_i \geqq \sigma_i(\mu - r_1 - r_2 - r_3) + r_3\left[1 + \sum_{k=\eta+1}^{k=\varphi} h_{ki}\right] + (r_1 - r_3)h_1 + (r_2 - r_3)h_2.$$

Ma essendo $r_3 > 0$ (perchè $\eta > 2$) ed $r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu$ (perchè il sistema dato (C_μ) è d'ordine minimo), il secondo membro è un numero positivo; onde a fortiori $\rho_i > 0$, c. d. d.

Dunque (n.° 13) *se il sistema minimo* (C_μ) *è privo di curve fondamentali* (teor. I) *il numero* f *dei punti fondamentali del sistema trasformato* (C_M) *è dato da:*

$$f = \varphi + f_0 - \eta \tag{9}$$

15. Supposto $r_1 + r_2 = \mu$, nel qual caso il sistema $(C_\mu) \equiv [[a_1^{r_1} a_2^{r_2}]]_\mu$ possiede *una* retta fondam. $\overline{a_1 a_2}$ ($f_{0c} = 1$) e *due soli* punti fondam. ($f_0 = 2$), si rileva facilmente da (7) che mediante trasformazioni particolari — per es. mediante la trasformazione quadratica $T_2 \equiv \begin{pmatrix} a_1\, a_2\, v_3 \\ w_1\, w_2\, w_3 \end{pmatrix}$ o mediante la trasformazione d'ordine n di Jonquières $T_n \equiv \begin{pmatrix} a_1^{n-1}\, a_2\, v_3 \ldots v_\varphi \\ w_1^{n-1}\, w_2\, w_3 \ldots w_\varphi \end{pmatrix}$ — uno dei φ valori ρ_i può annullarsi; e quindi in tale ipotesi o si ha l'espressione (9) ove $0 \leqq \eta \leqq 2$ oppure si ha $f = \varphi - 1 + f_0 - \eta$ ove $\eta = 2 = f_0$.

Cosicchè *se il sistema generale minimo* (C_μ) *è dotato di una retta fondamentale* (teor. I) *il numero f dei punti fondamentali del sistema trasformato* (C_M) *o è espresso da:*

$$f = \varphi + 2 - \eta \qquad (0 \leqq \eta \leqq 2), \tag{10}$$

o è dato da:

$$f = \varphi - 1 \qquad (\eta = f_0 = 2). \tag{11}$$

16. Indicando genericamente con C'_j una curva d'ordine j, fondamentale pel secondo piano della trasformazione T_n, e corrispondente a uno dei $\varphi - \eta$ punti $v_{\eta+1}, \ldots v_\varphi$; e con α_{ji} la moltiplicità di C'_j in w_i, si ha, come è noto,

$$j \cdot n = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \sigma_i \alpha_{ji};$$

e mantenendo a C'_k e ad h_{ki} i significati sopra definiti, si hanno pure le relazioni:

$$j \cdot s_1 = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \alpha_{ji} h_{1i}$$

$$j \cdot s_2 = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \alpha_{ji} h_{2i}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$j \cdot s_\eta = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \alpha_{ji} h_{\eta i};$$

onde sottraendo da quell'una, moltiplicata per μ, le altre ordinatamente moltiplicate per $r_1, r_2, \ldots r_\eta$, si ricava:

$$j\left(n\mu - \sum_{k=1}^{k=\eta} r_k s_k\right) = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \alpha_{ij}\left(\mu\sigma_i - \sum_k r_k h_{ki}\right),$$

ossia per (6) (7):

$$j \cdot M = \sum_{i=1}^{i=\varphi} \alpha_{ji} \rho_i.$$

In quest'ultima identità il primo membro essendo uguale al numero totale delle intersezioni di C'_j con una curva qualunque del sistema trasformato (C_M), e il secondo membro essendo uguale alla somma dei prodotti delle moltiplicità α_{ji} e ρ_i di queste due curve in w_i $(i = 1, 2, \ldots \varphi)$, è manifesto che C'_j e C_M non s'incontrano all'infuori dei φ punti w_i; onde, rammentando che questi punti sono fondamentali anche per (C_M), *la* C'_j *è una curva fondamentale pel sistema trasformato.* E quindi:

Fra le φ linee fondamentali del secondo piano di T_n se ne trovano $\varphi - \eta$, cioè quelle corrispondenti ai punti $v_{\eta+1}, \ldots v_\varphi$, che sono fondamentali anche pel sistema (C_M), trasformato di (C_μ).

17. Tolgasi per un momento la restrizione che (C_μ) sia un sistema generale e di minimo ordine; e, comunque costituito, lo si supponga dotato di linee fondamentali non spezzantisi in parti. Sia Γ_ν (curva di ordine ν) una di tali linee; e siano $r'_1, r'_2, \ldots r'_\lambda$ le sue moltiplicità nei punti fondamentali $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ del sistema, dei quali per generalità soltanto $\lambda - \alpha$ si suppongano appartenere al gruppo (η): onde si avrà:

$$\sum_\lambda r_k r'_k = \sum_{\lambda-\alpha} r_k r'_k + \sum_\alpha r_k r'_k = \mu\nu. \tag{λ}$$

Mediante T_n, la Γ_ν si trasforma in generale in una curva $\Gamma'_{\nu'}$ dell'ordine:

$$\nu' = n\nu - \sum_{\lambda-\alpha} r'_k s_k, \tag{6$'$}$$

avente nel punto w_i la moltiplicità:

$$\rho'_i = \nu\sigma_i - \sum_{\lambda-\alpha} r'_k h_{ki}. \tag{7$'$}$$

Il numero totale delle sue intersezioni con una curva qualunque del sistema trasformato (C_M) è dunque $M\nu'$, e il numero di quelle assorbite dai punti fondamentali w_i e a_k (n.° 13) è:

$$\sum_{i=1}^{i=\varphi} \rho_i \rho'_i + \sum_\alpha r_k r'_k = \sum_{i=1}^{i=\varphi} [(\mu\sigma_i - \sum_\eta r_k h_{ki})(\nu\sigma_i - \sum_{\lambda-\alpha} r'_k h_{ki})] + \sum_\alpha r_k r'_k.$$

Ma sviluppando, prendendo dalla teorica delle trasformazioni birazionali le ben note relazioni:

$$\sum_{i=1}^{i=\varphi} \rho_i h_{ki} = n s_k$$

$$\sum_{i=1}^{i=\varphi} h_{ki}^2 = s_k^2 + 1$$

$$\sum_{i=1}^{i=\varphi} h_{ki} h_{k'i} = s_k s_{k'},$$

e tenendo presente la (λ) si ottiene l'identità:

$$\sum_{i=1}^{i=\varphi} \rho_i \rho'_i + \sum_\alpha r_k r'_k = (n\mu - \sum_\eta r_k s_k)(n\nu - \sum_{\lambda=\alpha} r'_k s_k) = M\nu'; \tag{12}$$

la quale insegna che, quando ν' non si annulla, $\Gamma'_{\nu'}$ è una linea fondamentale del sistema (C_M). Dunque:

II. — *Le linee fondamentali di un dato sistema lineare (C_μ), che non svaniscono per mezzo di successive trasformazioni quadratiche (o di una determinata trasformazione Cremoniana T_n) dànno luogo a linee fondamentali del sistema trasformato (C_M)*; e per conseguenza *quando il sistema dato non possiede linee fondamentali, il sistema trasformato non contiene altre curve fondamentali oltre quelle C'_j indicate al n.° 16.*

18. Supponiamo in particolare $(C_\mu) \equiv [[a_1^{r_1} a_2^{r_2}]]_\mu$ ed $r_1 + r_2 = \mu$; in tal caso $\eta \leqq 2$ e Γ_ν è la retta fondamentale $\overline{a_1 a_2}$, onde:

$$\nu = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad r'_1 = r'_2 = 1.$$

Se $\qquad \eta = 0, \qquad \nu' = n > 0$

se $\qquad \eta = 1, \qquad \nu' = n - s_1 > 0;$

finalmente se $\qquad \eta = 2, \qquad \nu' = n - s_1 - s_2 \geqq 0.$

È chiaro infatti in quest'ultimo caso che, per trasformazioni T_n particolari — per es. (n.° 15) per la quadratica $T_2 \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ o per la trasformazione d'ordine n di Jonquières $T_n \equiv \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2 & v_3 \dots & v_\varphi \\ w_1^{n-1} & w_2 & w_3 \dots & w_\varphi \end{pmatrix}$ — può ν', ossia $n - s_1 - s_2$, divenire nullo; e quindi, per mezzo della trasformazione, la retta $\overline{a_1 a_2}$ svanisce oppure dà origine a *una* linea fondamentale di (C_M).

19. Ritornando al sistema generale minimo (C_μ) considerato in principio di questo paragrafo, le proprietà testè dimostrate combinate con quella del n.° 16 permettono di concludere che: *Se il sistema minimo (C_μ) è privo di curve fondamentali il numero f_c delle linee fondamentali del sistema trasformato (C_M) sarà espresso da:*

$$f_c = \varphi - \eta; \tag{9'}$$

e se $r_1 + r_2 = \mu$, sarà espresso o da:

$$f_c = \varphi - \eta + 1 \qquad (0 \leqq \eta \leqq 2), \tag{10'}$$

oppure, quando $\eta = 2$, da:

$$f_c = \varphi - \eta = \varphi - 2. \tag{11'}$$

20. Dai valori trovati di f e di f_c (n.i 14, 15, 19) si ricava:

1) $\varepsilon \equiv f - f_c = f_0 = f_0 - 0$, se (C_μ) è privo di linee fondamentali;
2) $\varepsilon \equiv f - f_c = 1 = f_0 - f_{0c}$, se $(C_\mu) \equiv [[a_1^{r_1} a_2^{r_2}]]_{\mu = r_1 + r_2}$.

La differenza $\varepsilon \equiv f - f_c$, che chiameremo *eccesso degli elementi fondamentali*, ha dunque carattere *invariantivo* per tutt'i sistemi lineari generali soddisfacenti alle condizioni del n.° 11 e appartenenti a una stessa famiglia. Resta così dimostrato il seguente teorema:

III. — In tutti i sistemi lineari generali e determinati di genere p appartenenti a una stessa famiglia, nei quali due curve qualunque si segano esclusivamente in punti variabili; come pure nei sistemi minori in essi contenuti (n.° 3), la differenza $f - f_c \equiv \varepsilon$ fra il numero dei punti fondamentali arbitrarii e il numero delle linee fondamentali è costante.

Se il sistema generale di minimo ordine μ corrispondente alla famiglia considerata è privo di linee fondamentali e possiede f_0 punti fondamentali arbitrarii, quella differenza ε è uguale ad f_0; essa è uguale all'unità nel caso contrario (cfr. n.i 10 e 62).

21. Di quì si rileva essere l'*ordine minimo* μ e l'*eccesso* ε due numeri caratteristici per ogni famiglia di sistemi lineari generali. Ad esempio per le seguenti *famiglie di reti* ($c' = 2$) si ha:

reti omaloidiche	$(p = 0,\ k = 1)\ldots$	$\varepsilon = 0,$	$\mu = 1$
reti ellittiche	$(p = 1,\ k = 2)\ldots$	$\varepsilon = 7,$	$\mu = 3$
	$(p = 1,\ k = 3)\ldots$	$\varepsilon = 6,$	$\mu = 3$
	$(p = 1,\ k = 4)\ldots$	$\varepsilon = 5,$	$\mu = 3$
	. . . .		

ecc.

22. Come corollario di III si ricava:

IV. — Due sistemi lineari di qualsivoglia genere e dimensione, deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni quadratiche e privi entrambi di curve fondamentali, hanno lo stesso numero f_0 di punti fondamentali (*).

Si può verificare questo teorema su alcuni degli esempi considerati nella mia Nota: *Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale* (Rendic. dei Lincei, 5 dicembre 1886).

(*) Cfr. Caporali, Nota al n.° 3, l. c.

§ 4. Classificazione dei sistemi lineari generali d'ordine minimo.

23. Dal fin qui detto si rileva che per lo studio delle varie famiglie di sistemi lineari di genere p basta limitarsi a considerare i corrispondenti sistemi d'ordine minimo; e di questi ora andiamo ad occuparci.

24. I punti fondamentali semplici influiscono sulla dimensione e sul grado, ma non sull'ordine e sul genere di un sistema generale.

Distingueremo per ciò i sistemi lineari *generali* di ordine minimo relativi ad un dato genere p in sistemi di *tipo normale* e sistemi di *tipo derivato:* chiamando *tipo normale* un sistema lineare d'ordine minimo $(p\ k_0\ c'_0)_\mu$ il quale non contenga alcun punto fondamentale *semplice,* e chiamando *tipo derivato* ogni altro sistema generale d'ordine minimo $(p\ k\ c')_\mu$.

25. Si passa da un tipo derivato a uno normale (o ad altro derivato) dello stesso genere e di ugual ordine, sopprimendovi tutt'i punti *semplici* fondamentali (o risp. una parte di essi). E viceversa *con l'aggiunta di un conveniente numero di punti fondamentali semplici scelti ad arbitrio,* da un dato tipo (normale o derivato) si passa, quando è possibile, ai suoi tipi derivati.

26. *Un sistema lineare* $(C_\mu)_p$ *privo di punti fondamentali semplici è di ordine minimo ossia è un tipo normale del genere* p *nei seguenti casi:*

(*A*) *Se non ha punti fondamentali multipli;*

(*B*) *Se possiede un solo punto multiplo fondamentale;*

(*C*) *Se possiede due e due soli punti multipli fondamentali;*

(*D*) *Se possiede almeno tre punti multipli fondamentali, la somma dei cui gradi di moltiplicità non superi l'ordine* μ *del sistema.*

È evidente infatti che in ciascuna di queste ipotesi la condizione di minimo:

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu, \tag{5}$$

è soddisfatta, se, come si suppone, la curva generica C_μ del sistema non si spezza in parti.

27. *Avuto speciale riguardo ai tre punti fondamentali di maggior moltiplicità,* classificheremo perciò i tipi normali (e i derivati) in *tipi monomi* (cioè contenenti un solo o nessun punto *multiplo* fondamentale), *binomi* (cioè conte-

nenti due e due soli punti *multipli* fondamentali) e *trinomi* (cioè contenenti almeno tre punti *multipli* fondamentali). — In particolare il tipo $[[a^{\mu-s}b^s]]_\mu$ si dirà *binomio di 2ª specie*; e i tipi $[a_1^m a_2^m a_3^m]$, $[a^r b_1^m b_2^m]$, $[a^r b^s c^m]$ si diranno risp. *trinomi di 1ª, 2ª, 3ª specie* $(r \geqq s > m > 1)$.

28. Dal n.° 25 si ricava poi:

V. — *Se* $p > 0$, *ogni tipo normale* $(p, k_0, c'_0)_\mu$, *tranne quello binomio di 2ª specie, dà origine in generale a* $c'_0 - 1$ *tipi derivati* $(p, k, c')_\mu$; *epperò in certo modo rappresenta* c'_0 *sistemi lineari dello stesso genere* p *e dello stesso ordine minimo* μ, *le cui dimensioni e i cui gradi sono rispettivamente:*

$$\begin{array}{llll} c' = 1, & 2, \ldots & c'_0 - 1, & c'_0 \\ k = p, & p+1, \ldots & k_0 - 1, & k_0. \end{array}$$

Il tipo normale binomio di 2ª specie, al contrario, non dà luogo a tipi derivati e rappresenta un unico sistema lineare di ordine minimo μ, *di grado* k_0 *e di dimensione* $c'_0 (= k_0 + 1 - p)$, *cioè il sistema* $[[a^{\mu-s}b^s]]_\mu^p$. Aggiungendo anche un solo punto semplice ai suoi punti base, si otterrebbe bensì un altro sistema $[a^{\mu-s}b^s c \ldots]_\mu^p$ di egual genere p e di ugual ordine μ (di grado e di dimensione differenti); ma per quest'ultimo evidentemente non sarebbe μ l'ordine minimo — ossia il nuovo sistema sarebbe riducibile a un tipo (normale o derivato) differente dal dato $[[a^{\mu-s}b^s]]_\mu^p$. — Similmente dal sistema razionale $[a^{\mu-1}]_\mu$, § 5, Tab. I, b, si ricava un solo tipo derivato, se $\mu > 2$.

29. Lo studio di tutti i sistemi *generali* d'ordine minimo relativi a un dato genere p e a un dato grado k, è ricondotto per tal modo alla semplice ricerca dei tipi normali di genere p. Per trovare questi tipi normali basterà esaminare ad una ad una le quattro ipotesi del n.° 26; il che faremo nei tre paragrafi seguenti.

§ 5. Tipi monomi.

30. Nell'ipotesi (A) n.° 26, equivalente ad $r_1 = 0$, le curve del sistema non potendo avere punti multipli variabili, nè possedendone alcuno di fisso, saranno generali del loro genere (dato) p. Ma una curva generale di ordine μ è del genere $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$; onde posto $\mu - 2 = h$ dovrà essere:

$$p = \frac{h(h+1)}{2}, \qquad h \geqq -1. \tag{α}$$

Viceversa se p ha questa forma vi è un sistema lineare, dell'ordine minimo $\mu = h + 2$, privo di punti fondamentali: esso è costituito di tutte le curve generali di quest'ordine, situate in un piano; il suo grado è $k_0 = (h+2)^2$, e la sua dimensione $c'_0 = \frac{(h+2)(h+5)}{2}$. Dunque *perchè un sistema minimo manchi di punti fondamentali cioè sia del tipo normale monomio* $[0]^p_\mu$ *è condizione necessaria che il suo genere* p *abbia la forma* (α). — *Questa è pure la condizione perchè un sistema lineare minimo contenga punti fondamentali esclusivamente semplici;* infatti un tale sistema è evidentemente un derivato del tipo normale $[0]^p_\mu$.

31. Nella ipotesi (B) n.° 26 poniamo $r_1 = \mu - i$.
Dalle (2) (3) si ricava:

$$\mu = r_1 + i = \frac{2p + (i-1)(i-2)}{2(i-1)}$$

$$k = i(2\mu - i) = \frac{2i(p+i-1)}{i-1}$$

$$r_1 = \frac{2p - (i-1)(i-2)}{2(i-1)}. \qquad (a)$$

Dunque:

VI. — *Dato* p, *per ogni soluzione della* (a) *ossia della:*

$$p = (i-1)r_1 + \frac{(i-1)(i-2)}{2},$$

in numeri i, r_1 *interi e positivi si ha un sistema minimo del tipo normale monomio* $[a^{r_1}]^p_{\mu=r_1+i}$.

Se $r_1 = 0$ si ricade sul tipo monomio $[a^0]^p_\mu \equiv [0]^p_\mu$ già considerato nel numero precedente; se $r_1 = 1$ non si ha un sistema minimo di tipo normale, ma uno di tipo derivato dal normale monomio $[0]^p_\mu$.

32. Riuniamo nella seguente tabella i tipi normali monomi corrispondenti sia ad $r_1 = 0$ sia ai primi cinque valori di i.

TABELLA I. — TIPI NORMALI MONOMI $[a^{r_1}]^p_\mu$.

Simbolo del sistema		r_1	Genere p	Ordine minimo μ	Grado k	Dimensione $c' = k + 1 - p$
a.	$[0]$	0	$p = \frac{h(h+1)}{2}, \; h \geqq -1$	$h+2$	$(h+2)^2$	$\frac{(h+2)(h+5)}{2}$
b.	$[a^{\mu-1}]$	$\mu - 1$	$p = 0$	μ	$2\mu - 1$	2μ
c.	$[a^p]$	p	p	$p+2$	$4(p+1)$	$3p+5$
d.	$\left[a^{\frac{p-1}{2}}\right]$	$\frac{p-1}{2}$	$p = 2h - 1, \; h > 1$	$h+2$	$3(2h+1)$	$4h+5$
e.	$\left[a^{\frac{p-3}{3}}\right]$	$\frac{p-3}{3}$	$p = 3h, \; h > 1$	$h+3$	$8(h+1)$	$5h+9$
f.	$\left[a^{\frac{p-6}{4}}\right]$	$\frac{p-6}{4}$	$p = 4h+2, \; h > 1$	$h+4$	$5(2h+3)$	$6h+14$
..	....	....	....	....	......	....

33. Per far risaltare il significato di questa tabella, consideriamovi come esempio la prima orizzontale; tenendo presenti i n.° 6 e 28 se ne ricava:

VII. — *Un dato sistema lineare non si può trasformare in uno che sia privo di punti fondamentali oppure possieda punti fondamentali esclusivamente semplici, a meno che il suo genere non abbia la forma* $p = \frac{h(h+1)}{2}$, $h \geqq -1$. *Però tutte le volte che* p *ha questa forma, esistono* $c'_0 = \frac{(h+2)(h+5)}{2}$ *famiglie di cotali sistemi lineari generali del genere* p, *ma di gradi* k *differenti; i rispettivi sistemi d'ordine minimo sono rappresentati dal tipo normale* $[0]^{k_0 = h+2^2}_{\mu = h+2}$ *e dai suoi derivati* $[a_1]_\mu$, $[a_1 a_2]_\mu, \ldots [a_1 a_2 \ldots a_{c'_0 - 1}]_\mu$ *ossia sono costituiti da sistemi di curve generali dell'ordine* $\mu = h + 2$, *aventi rispettivamente* $0, 1, 2, \ldots \frac{\mu(\mu+3)}{2} - 1$ *punti fissi arbitrarii comuni.*

Esempi:

per $h = -1$ e per $h = 0$ si ha $p = 0$: e si trovano tutti i sistemi minimi costituiti da *rette* e da *coniche;*

per $h = +1$ si ha $p = 1$: si trovano i nove sistemi minimi di *cubiche generali;*

ecc. ecc.

34. Così dalla terza orizzontale della Tabella I si ricava:

VIII. — *Per ogni genere p vi sono $3p+5$ famiglie di sistemi lineari riducibili rispettivamente ai seguenti sistemi tipici d'ordine minimo $\mu = p+2$, cioè:*

$$[a^p]_\mu^{k_0}, \qquad [a^p\, b_1]_\mu, \qquad [a^p\, b_1\, b_2]_\mu, \ldots \qquad [a^p\, b_1\, b_2 \ldots b_{3p+4}]_\mu,$$

i gradi k e le corrispondenti dimensioni c' sono rispettivamente:

$$\begin{array}{llll} k = 4(p+1) \equiv k_0, & k_0 - 1, & k_0 - 2, \ldots\ldots\ldots, & p \\ c' = 3p + 5 \equiv c'_0, & c'_0 - 1, & c'_0 - 2, \ldots\ldots\ldots, & 1. \end{array}$$

Per $p = 0$ e per $p = 1$ si ricade su sistemi riducibili al tipo normale [0] o ai suoi derivati, cioè su sistemi già considerati al numero precedente.

35. Dalla quarta orizzontale, per $p = 5$, si ottiene il sistema minimo di tipo normale monomio $[a^2]_{\mu=5,\ c'_0=17}^{p=5,\ k_0=24}$, il quale ammette altri 16 tipi derivati dello stesso ordine; ecc. ecc.

§ 6. Tipi binomi.

36. Nell'ipotesi (C) n.° 26 poniamo:

$$r_1 + r_2 = \mu - i;$$

onde le (2)—(4) somministrano:

$$\left.\begin{aligned} p &= r_1 r_2 + (i-1)(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(i-1)(i-2) \\ k &= 2 r_1 r_2 + i[2(r_1 + r_2) + i] = 2[p + r_1 + r_2 + i - 1] + i \\ c' &= k + 1 - p = p + 2[r_1 + r_2 + i] + i - 1, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

e da queste, per $i = 0$, si ricava:

IX. — *Se $p > 0$ ed $r \geqq s > 1$, a ogni soluzione in numeri interi dell'equazione $p = (r-1)(s-1)$ corrisponde un tipo normale binomio di 2ª specie $[[a^r b^s]]_\mu^p$ dell'ordine $\mu = r + s$, del grado $k_0 = 2rs$ e della dimensione $c'_0 = r(s+1) + s$.*

Esempi:

$p=1$: tipo normale $[[a_1^2 a_2^2]]$; $\mu=4$, $k_0=c'_0=8$: curve di 4° ordine dotate degli stessi due punti doppi e non aventi altre intersezioni fisse comuni.

$p=2$: tipo normale $[[a^3 b^2]]$; $\mu=5$, $k_0=12$, $c'_0=11$: curve di 5° ordine aventi uno stesso punto triplo, uno stesso punto doppio e nessun altro punto fisso comune.

$p=3$: tipo normale $[[a^4 b^2]]$; $\mu=6$, $k_0=16$, $c'_0=14$: curve di 6° ordine aventi uno stesso punto quadruplo, uno stesso punto doppio e nessun altro punto fisso comune.

$p=4$: 1° tipo normale $[[a_1^3 a_2^3]]$; $\mu=6$, $k_0=18$, $c'_0=15$;
2° tipo normale $[[a^5 b^2]]$; $\mu=7$, $k_0=20$, $c'_0=17$.

$p=5$: tipo normale $[[a^6 b^2]]$; $\mu=8$, $k_0=24$, $c'_0=20$.

$p=6$: tipo normale $[[a^4 b^3]]$; $\mu=7$, $k_0=24$, $c'_0=19$.

ecc. ecc.

37. Pel valore $i=1$ si ha dalle (13):

X. — *Dato* p, *se* $r \geqq s > 1$ *a ogni soluzione in numeri interi dell'equazione* $p=rs$ *corrisponde un tipo normale binomio (di 1ª specie) dell'ordine* $\mu=r+s+1$, *del grado* $k_0=2(p+\mu)-1$ *e della dimensione* $c'_0=p+2\mu$.

Esempi:

$p=4$: tipo normale $[a_1^2 a_2^2]$; $\mu=5$, $k_0=17$, $c'_0=14$;
$p=6$: tipo normale $[a^3 b^2]$; $\mu=6$, $k_0=23$, $c'_0=18$;
$p=12$: 1° tipo normale $[a^6 b^2]$; $\mu=9$, $k_0=41$, $c'_0=30$;
2° tipo normale $[a^4 b^3]$; $\mu=8$, $k_0=39$, $c'_0=28$;

ecc. ecc.

38. Se nelle (13) si pone $i>1$ si ha:

$$\begin{aligned} &p > r_1 r_2 \\ &k > 2[p+r_1+r_2]+1 \\ &c' > p+2[r_1+r_2+1] \\ &\mu > r_1+r_2+1. \end{aligned}$$

Onde:

XI. — *Dato* p, *se* $i>1$ *e* $r \geqq s > 1$, *a ogni soluzione in numeri interi della equazione*

$$p=rs+(i-1)(r+s)+\frac{(i-1)(i-2)}{2}$$

corrisponde un tipo binomio di 1ª specie $[a^r b^s]^p_\mu$ *dell'ordine* $\mu = r + s + i$, *del grado* $k = 2[p + \mu - 1] + i$ *e della dimensione* $c' = p + 2\mu + i - 1$. — *Questi medesimi tipi normali binomi si trovano pure risolvendo in numeri* r, s, μ *interi* (> 1) *le due relazioni:*

$$p > rs$$
$$\mu(\mu - 3) = 2(p - 1) + r(r - 1) + s(s - 1).$$

39. Riunendo questi risultati si ha la seguente tabella:

Tabella II. — Tipi normali binomi $[a^r b^s]^p_\mu$, $(r \geqq s > 1)$.

Simbolo e qualifica del sistema minimo			Genere p	Ordine μ	Grado k_0	Dimensione $c'_0 = k_0 + 1 - p$
a.	1ª specie	$[a^r b^s]$	$p > rs$	$\mu(\mu - 3) = 2(p-1) + r(r-1) + s(s-1)$	$\mu^2 - (r^2 + s^2)$	$\mu^2 - (r^2 + s^2 + p) + 1$
b.	1ª specie	$[a^{\mu-s-1} b^s]$	$p = rs$	$r + s + 1$	$2(p + r + s) + 1$	$p + 2(r + s + 1)$
c.	2ª specie	$[[a^{\mu-s} b^s]]$	$p = (r-1)(s-1)$	$r + s$	$2rs$	$r(s+1) + s$

§ 7. Tipi trinomii.

40. Nell'ipotesi (D) n.° 26 poniamo $r_3 = m > 1$.

Siccome $3m \leqq r_1 + r_2 + r_3$, perchè il sistema sia d'ordine minimo deve essere $\mu \geqq 3m$. Dunque:

XII. — *Indipendentemente dal genere* p *e dalla dimensione* c' *il numero* $3m (= 3r_3)$ *è un limite inferiore per l'ordine* μ *dei sistemi lineari minimi del tipo normale trinomio.*

41. D'altra parte se si considera un sistema $(C_\mu) \equiv (p\ k\ c')_\mu$, generale e determinato dai punti fondamentali a_i, ma del resto qualunque, dalle (1) (2) (3) si ricava:

$$\sum_4^f r^2 = \mu^2 - k - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

$$\sum_4^f r = 3\mu + k - 2c' - (r_1 + r_2 + r_3),$$

ossia, sottraendo dalla prima la seconda moltiplicata per r_3,

$$\sum_4^f r^2 - r_3 \sum_4^f r =$$

$$\mu(\mu - 3r_3) - k(r_3 + 1) - r_1^2 - r_2^2 + r_3(2c' + r_1 + r_2).$$

Ma il primo membro è nullo se $r_3 = r_4 = \cdots = r_f$ ed è negativo nel caso contrario; dunque, rammentando che nella ipotesi fatta sussiste la (4), si avrà la:

$$\mu(\mu - 3r_3) \leqq (c' + p - 1)(r_3 + 1) + r_1^2 + r_2^2 - r_3[2c' + r_1 + r_2], \quad (14)$$

nella quale, quando $r_3 < 2$ o in generale quando $r_3 = r_4 = \cdots = r_f = m$ qualunque, vale il segno di uguaglianza. Questa relazione sta per qualsivoglia sistema lineare *generale* e *determinato.*

42. Supposto ora che:

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu, \quad (5)$$

dalla precedente si avrà a fortiori la:

$$2(r_1 r_2 - r_3^2) \leqq (p - 1 + c')(r_3 + 1) - 2c' r_3,$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$2(r_1 r_2 - r_3^2) + (r_3 - 1)(c' - p + 1) \leqq 2(p - 1), \quad (15)$$

ed è la *relazione di condizione perchè un sistema lineare (generale e determinato) sia d'ordine minimo.*

43. Ritornando all'ipotesi (D) poniamo ancora $r_3 = m > 1$. La quantità $c' - p + 1$ ha il valor massimo, compatibilmente con la condizione (15), quando r_3 e $2(r_1 r_2 - r_3^2)$ hanno i loro valori minimi 2 e 0, cioè quando $r_1 = r_2 = r_3 = 2$; in quest'ipotesi l'anzidetta condizione diviene:

$$c' \leqq 3(p - 1),$$

dalla quale per (4):

$$k = \leqq 4(p - 1).$$

Dunque *i numeri* $3(p - 1)$ e $4(p - 1)$ *sono risp. limiti superiori per la dimensione* c' *e pel grado* k *dei sistemi lineari generali di minimo ordine e del tipo normale trinomio.*

44. Risulta inoltre da quanto precede che i sistemi generali minimi di tipo normale trinomio relativi a un dato genere p si ottengono risolvendo in

numeri interi μ, c', r_1, r_2, r_3 le due relazioni (14), (15) (*). Ma anche tenuto conto (come è necessario) delle condizioni restrittive:

$$c' \leqq 3(p-1), \qquad \mu \geqq 3r_3, \qquad r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 > 1,$$

non ogni soluzione intiera delle relazioni anzidette dà luogo a un sistema minimo di tipo trinomio. Trovati infatti, mediante le medesime, l'ordine, le tre moltiplicità più elevate dei punti fondamentali e fra certi limiti la dimensione del sistema, bisogna per mezzo delle (1)—(3) completare (quando è possibile) la determinazione delle moltiplicità degli altri suoi punti fondamentali e di tutte le sue caratteristiche. Sotto la doppia riserva che ciò sia aritmeticamente possibile e che inoltre i valori così trovati non siano geometricamente incompatibili (cioè definiscano delle vere curve algebriche formanti un sistema lineare) diremo *soluzione geometrica* la soluzione considerata delle (14) (15).

Dunque concludendo:

XIII. — *Dato p, a ogni soluzione geometrica delle* (14) (15) *corrisponde un sistema lineare generale d'ordine minimo del tipo normale trinomio.*

45. A meglio chiarire il numero precedente consideriamo come esempio i sistemi normali *trinomii di 1ª specie.*

Le (14) (15) ammettono la soluzione:

$$r_1 = r_2 = r_3 = m, \qquad \mu = 3m,$$

essendo:

$$m \text{ qualunque, se } c' \leqq p-1,$$

e:

$$m \leqq 2p-1, \text{ se } c' > p-1;$$

perchè questa sia, nel senso testè spiegato, una *soluzione geometrica* delle relazioni anzidette bisogna inoltre:

1.° che siano soddisfatte anche le due condizioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3m(3m-3)}{2} - (p-1) &= \frac{m(m-1)}{2}\alpha_m + \cdots + 3\alpha_3 + \alpha_2 \\ \frac{3m(3m+3)}{2} - c' \quad &\geqq \frac{m(m+1)}{2}\alpha_m + \cdots + 6\alpha_3 + 3\alpha_2, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

dalle quali si ricavano il numero totale $\alpha_m (\geqq 3)$ dei punti fondamentali m-pli e quelli $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ dei punti fondamentali doppi, tripli,... r-pli;

(*) È chiaro che queste stesse relazioni possono servire anche alla determinazione dei *tipi normali monomii* e *binomii.* Si avrebbe, applicandole, la conferma dei risultati da noi già conseguiti per altra via nei due paragrafi precedenti.

2.° che sia riconosciuta la compatibilità geometrica dei valori trovati.

Verificate queste condizioni e supposto $m > 1$ si ha un sistema generale minimo del tipo normale trinomio di 1ª specie, cioè:

$$[a_1^m a_2^m a_3^m \dots a_{\alpha_m}^m b_1^{m-1} \dots b_{\alpha_{m-1}}^{m-1} \dots d_1^3 \dots d_{\alpha_3}^3 e_1^2 \dots e_{\alpha_2}^2]_{\mu=3m}^p .$$

46. *Altri tipi trinomii di 1.ª specie* si ricavano dalla seguente soluzione:

$$r_1 = r_2 = r_3 = m > 1, \qquad \mu = 3m + h \qquad (h > 0)$$

delle (14) (15), che è vincolata alla condizione:

$$h(3m + h) + c'(m - 1) \leqq (p - 1)(m + 1).$$

Questa non ammette soluzioni se $p < 4$. Se $p = 4$, non ne ammette per $m > 3$; e per $m \leqq 3$ dà le due soluzioni $m = 2$, $\mu = 7$ ed $m = 3$, $\mu = 10$: — delle quali però soltanto la prima è una soluzione geometrica e somministra un tipo normale trinomio di 1ª specie, cioè la rete:

$$(C_7) \equiv [a_1^2 a_2^2 \dots a_{11}^2]_{\mu=7,\ c'=2}^{p=4,\ h=5},$$

47. Posto $r_1 = r_3 + \eta_1$, $r_2 = r_3 + \eta_2$ le (14) (15) divengono:

$$\mu(\mu - 3r_3) \leqq (p - 1)(r_3 + 1) - c'(r_3 - 1) + r_1\eta_1 + r_2\eta_2, \qquad (14)'$$

$$2r_3(\eta_1 + \eta_2) + 2\eta_1\eta_2 + (r_3 - 1)(c' - p + 1) \leqq 2(p - 1), \qquad (15)'$$

nella qual forma meglio si prestano per la ricerca dei *tipi normali trinomii di 2ª e di 3ª specie*:

pei tipi di 2ª specie essendo per lo meno $r_1 + r_2 + r_3 = 3m + 1$ $(r_3 = m > 1)$ si ha $\mu \geqq 3m + 1$;

per quelli di 3ª specie essendo per lo meno $r_1 + r_2 + r_3 = 3m + 2$ $(r_3 = m > 1)$ si ha $\mu \geqq 3m + 2$.

Se $c' \geqq p - 1$ viene:

$$r_3(\eta_1 + \eta_2) + \eta_1\eta_2 \leqq p - 1, \qquad (15)''$$

e quindi pei *trinomii di 2ª specie* $(\eta_1 > 0,\ \eta_2 = 0)$:

$$1 < r_3 \leqq p - 1,$$

e pei trinomii di 3ª specie $(\eta_1 > 0,\ \eta_2 > 0)$:

$$1 < r_3 \leqq \frac{p-2}{2} .$$

Se $c' < p - 1$, posto $c' = p - 1 - h$ $(1 \leqq h \leqq p - 2)$ viene:

$$2r_3(\eta_1 + \eta_2) + 2\eta_1\eta_2 \leqq 2(p - 1) + h(r_3 - 1). \qquad (15)'''$$

48. I pochi risultati generali relativi ai tipi normali trinomii possono riassumersi nella seguente tabella:

TABELLA III. — TIPI NORMALI TRINOMII $[a^r b^s c^m \ldots]$, $r \geqq s \geqq m > 1$.

Simbolo e qualifica del sistema minimo			Ordine μ	Genere p	Grado k_0	Dimensione c'_0
a.	1ª specie	$[a_1^m a_2^m a_3^m \ldots]$ $m>1$	$\mu \geqq 3m$			
b.	2ª specie	$[a^r b_1^m b_2^m \ldots]$ $r>m>1$	$\mu \geqq 3m+1$	$p>1$	$k_0 \leqq 4(p-1)$	$c'_0 \leqq 3(p-1)$
c.	3ª specie	$[a^r b^s c^m \ldots]$ $r \geqq s>m>1$	$\mu \geqq 3m+2$			
d. (*)	1ª specie	$[a_1^p a_2^p \ldots a_8^p l^{p-1}]$	$\mu = 3p$	$p>0$	$2p-1$	p

§ 8. Alcuni teoremi generali,

49. Tenuto presente il n.° 6 si ha:

XIV. — *Un sistema di curve dell'ordine $M \geqq 3m$ e di genere $p > 0$, dotato di almeno tre punti fondamentali (arbitrarii o non arbitrarii) m-pli ($m \geqq 1$) è un sistema lineare del minimo ordine.*

Ad esempio sono d'ordine minimo:

(*a*) i sistemi di cubiche (generali) passanti per tre o più di tre punti fissi arbitrarii ($p = 1$) (**);

(*b*) i sistemi di C_6 aventi 8 punti doppi comuni e passanti per 0, 1, 2 punti arbitrarii ($p = 2$);

(*c*) i sistemi di C_6 aventi 7 punti doppi comuni e passanti per 0, 1,... 5 punti fissi ($p = 3$);

(*d*) i sistemi di C_9 aventi 8 punti tripli e 1 punto doppio comuni e passanti per 0, 1, 2 punti fissi ($p = 3$),

(*e*) i sistemi di C_6 aventi 6 punti doppi comuni e passanti per 0, 1, 2,... 8 punti fissi ($p = 4$);

(*f*) i sistemi di C_{12} aventi 8 punti quadrupli e 1 punto triplo comuni, e passanti per 0, 1, 2, 3 punti fissi ($p = 4$);

ecc. ecc.

(*) Vedi la nota (*) al n.° 67.

(**) Si è veduto del resto per altra via (n.° 33) che *qualunque* sistema di cubiche generali è d'ordine minimo.

50. Le relazioni (16) del n.° 45 si possono scrivere nella forma:

$$\left.\begin{array}{l}[9-\alpha_m]\,m(m-1)-(m-1)(m-2)\alpha_{m-1}-\cdots-\ \ 6\alpha_3-2\alpha_2=2(p-1)\\ [9-\alpha_m]\,m(m+1)-\qquad\quad m(m-1)\alpha_{m-1}-\cdots-12\alpha_3-6\alpha_2\geqq 2c',\end{array}\right\}(16)'$$

dalla quale si rileva che se $p>1$, $\alpha_m<9$; onde:

XV. — *Il massimo numero di punti fondamentali m-pli per un sistema minimo generale di curve d'ordine* $\mu=3m$ *e di genere* $p>1$ *è* $\alpha_m=8$; se $p=1$, il valore $\alpha_m=9$ soddisfa la prima (16)' ma non la seconda (perchè c' dev'essere per lo meno $=1$); onde:

XVI. — *Non esiste alcun sistema* generale *di curve d'ordine* $\mu=3m$ *dotate di* 9 *punti m-pli comuni; se un sistema lineare di tali curve esiste, esso è necessariamente del genere uno e i suoi punti fondamentali non hanno posizioni del tutto arbitrarie.*

E infatti per ogni valore intero di m vi è un fascio di curve ellittiche di ordine $\mu=3m$, dotate di 9 punti m-pli comuni ($c'=1$, $p=1$, $k=0$); curve studiate per la prima volta dal sig. Halphen (nel *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. X_6, pag. 162-172). Se $m>1$ i 9 punti m-pli sono situati in una e una sola cubica [che è evidentemente una linea fondamentale (n.° 5)] ed 8 di essi non determinano *univocamente* il rimanente; onde il fascio è del minimo ordine (n.° 49) ed è un sistema speciale di 2° tipo (n.° 55); mentre se $m=1$ esso è un sistema minimo speciale di 1° tipo (n.i 54-56).

51. Riguardo ai sistemi riducibili al tipo normale trinomio, dal n.° 43 si ha:

XVII. — *Nessun sistema lineare generale di genere p il cui grado k sia maggiore di* $4(p-1)$ *è trasformabile in altro d'ordine minimo del tipo normale trinomio;*

o ch'è lo stesso:

XVIII. — *Soltanto i sistemi lineari di genere p, e di dimensione c' non superiore a* $3(p-1)$, *possono ridursi a sistemi generali d'ordine minimo di tipo trinomio.*

Quando $p=0$ o $p=1$ questo limite $3(p-1)$ è sempre superato da c'; quindi:

XIX. — *Per* $p=0$ *e* $p=1$ *non vi sono sistemi generali d'ordine minimo del tipo normale trinomio.*

Onde il teorema:

XX. — *Qualunque sistema lineare di genere* zero *e qualunque sistema lineare generale di genere* uno *è trasformabile in altro d'ordine minimo del tipo monomio o binomio* (v. § 10, Tabella IV).

E come primo corollario:

XXI. — In ogni sistema lineare di genere zero, avente più di due punti fondamentali, la somma dei tre gradi più elevati di moltiplicità supera l'ordine M del sistema; cosicchè $r_1+r_2+r_3>M$.

Di questo teorema (già noto) si ha così una nuova dimostrazione; la quale, perchè fondata sulla ricerca diretta di tutti i sistemi generali di minimo ordine corrispondenti a un dato genere p, pare più spontanea della usuale (*).

Osservando poi che dal tipo normale monomio $[0]_{\mu=3}^{p=1}$ (§ 10, Tabella IV) si ricavano i tipi derivati:

$$[a_1 a_2 a_3]_{\mu=3}, \qquad [a_1 a_2 a_3 a_4]_{\mu=4}, \ldots\ldots$$

si ha come secondo corollario questo nuovo teorema:

XXII. — In ogni sistema lineare generale di genere uno e di ordine $M>3$, se vi sono più di due punti fondamentali, la somma dei tre gradi più elevati di moltiplicità supera M, cosicchè $r_1+r_2+r_3>M$ (v. n.i 50 e 65).

Similmente da XVIII, osservando che dal tipo normale monomio $[a^2]_{\mu=4}^{p=2}$ (§ 10, Tabella IV) si ricavano i derivati:

$$[a^2 b_1 b_2]_{\mu=4}, \qquad [a^2 b_1 b_2 b_3]_{\mu=4}, \ldots\ldots$$

si ha:

XXIII. — In ogni sistema lineare generale di genere $p=2$, di dimensione $c'>3$ e di ordine $M>4$, il quale possieda più di due punti fondamentali, sarà $r_1+r_2+r_3>M$.

52. Terminiamo questo paragrafo con una notevole proprietà dei sistemi lineari riducibili al tipo normale $[0]$, la quale è un semplice corollario del teorema III (§ 3).

XXIV. — Nei sistemi lineari generali riducibili al tipo normale $[0]_\mu$ (**), e generalmente in questi soltanto, il numero dei punti base è uguale al numero delle linee fondamentali.

(*) Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen,* Math. Ann., t. III, pag. 165 — Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* Lipsia, 1875. t. I, pag. 488. — G. B. Guccia, *Generalizzazione di un teorema di Noether,* Rendic. Circolo matem. di Palermo, t. I_3 (1886), pag. 141.

(**) *Non ai derivati* del tipo normale $[0]_\mu$.

Se fra queste si trovano α_1 rette, α_2 coniche, α_3 cubiche,... si troveranno fra quelli β_1 punti μ-pli, β_2 punti 2μ-pli, β_3 punti 3μ-pli,...; e i numeri β saranno uguali ai numeri α presi generalmente in ordine diverso.

Per $\mu = 1$ si ricade su una nota proprietà delle *reti omaloidiche.*

§ 9. Sistemi lineari speciali.

53. Se i punti fondamentali non sono dati ad arbitrio come finora si era supposto, ma hanno posizioni speciali o fra loro dipendenti, il sistema lineare (C_M), definito al § 1 non è *generale,* ma è un sistema lineare *speciale.*

54. Può in tal caso avvenire che alcuni punti fondamentali (scelti ad arbitrio) determinino *univocamente* le posizioni degli altri *(punti fondamentali dipendenti):* assunti come punti fondamentali, si trovano ad esempio in queste condizioni i 9 punti base di un fascio di cubiche; i 10 punti base di una rete di sestiche aventi due punti semplici e otto doppi comuni (*); ecc.

55. Se invece avviene il contrario, i punti fondamentali non si possono generalmente distinguere gli uni dagli altri: per esempio i 9 punti m-pli di un fascio di C_{3m}, presi come punti fondamentali, si trovano in queste condizioni.

56. Corrispondentemente alle due ipotesi accennate, i sistemi lineari speciali si diranno del 1° e del 2° tipo.

57. *I sistemi speciali di 1° tipo possono ricavarsi dai sistemi generali* studiati nei paragrafi precedenti, nei quali in sostanza essi sono impliciti.

Si consideri infatti un sistema lineare *generale* $S \equiv (p\ k\ c')_M$ avente f punti fondamentali arbitrarii $a_1, a_2, \ldots a_f$ e si supponga (n.° 1) che nel gruppo (k) delle intersezioni di due C_M qualunque, esterne ai punti a_i, si trovino $k''(>0)$ punti fissi e k' punti variabili — cosicchè sia $\beta = f + k''$ il numero totale dei suoi *punti base.* Se questi β punti base $a_1, a_2, \ldots a_f, a_{f+1}, \ldots a_\beta$ si

(*) È noto (Bertini, *Ricerche sulle trasformazioni univoche iuvolutorie,* n.° 35, Annali di Matematica, Ser. 2ª, t. VIII) che le curve di 6° ordine aventi 8 punti doppi comuni e passanti per un *nono* punto dato ad arbitrio, passano pure per un *decimo* punto determinato; e che i 10 punti sono situati in una medesima cubica. Tali curve del resto formano un sistema lineare che rientra nel sistema *generale* (n.° 48, Tabella III, *d.*) di tipo trinomio $(C_{3p})_p \equiv \left[a_1^p\, a_2^p \ldots a_8^p\, l^{p-1}\right]_{c'=p}^{k=2p-1}$; e quindi gode della proprietà di questo sistema [v. la nota (*) al n.° 67].

riguardano ora come punti fondamentali dati, poichè non sono tutti arbitrarii, essi determinano evidentemente un sistema lineare *speciale* $S' \equiv (p, k', c')_M$ dello stesso genere, ordine e dimensione di S; il quale *però può contenere linee fondamentali,* anche se S non ne possiede, e nel quale il grado $k (\equiv k')$ esprime esclusivamente il numero delle intersezioni *variabili* di due C_M qualunque ed ha carattere invariantivo.

Così ad esempio un fascio di curve generali del genere p è un sistema lineare *speciale di 1° tipo* o è un sistema *generale* di grado $k = p$, secondo che vi si considerano come fondamentali tutt'i punti base o soltanto quelli che si possono prendere ad arbitrio; un fascio di sestiche aventi 8 punti doppi e 4 punti semplici comuni è un sistema speciale di 1° tipo dotato di due cubiche fondamentali o è un sistema generale di grado $k = p = 2$, secondo che vi si considerano come fondamentali tutt'i punti base o soltanto i 10 che si possono prendere ad arbitrio.

58. *Fra le caratteristiche del sistema speciale S' ha luogo la relazione:*

$$c' > k + 1 - p. \tag{4)''}$$

Infatti le caratteristiche del sistema generale S sono legate dalla relazione (4) § 1 ossia $c' = k' + k'' + 1 - p$, che per $k' \equiv k$ e $k'' > 0$ conduce alla (4)''.

59. *Un sistema lineare il cui grado k esprima esclusivamente punti variabili è necessariamente speciale se $c' > k + 1 - p$; e può essere speciale se $c' = k + 1 - p$.*

Infatti, per l'ipotesi qui fatta su k, tutt'i punti base sono punti fondamentali.

Ora nel primo caso ($c' > k + 1 - p$) i punti fondamentali non possono essere tutti arbitrarii, perchè se fossero si avrebbe (n.° 2), contro l'ipotesi, $c' = k + 1 - p$.

Nel secondo caso ($c' = k + 1 - p$) potendosi disporre ad arbitrio di tutti i punti fondamentali, niente impedisce di assumerli in posizioni speciali. Così, ad esempio, se $c' = 2$, $k = 3$, $p = 2$, uno dei sistemi d'ordine minimo è rappresentato dalla rete:

$$(C_4) \equiv [a^2 b_1 b_2 \dots b_9];$$

la quale è un sistema minimo *generale,* e per ciò *privo di linee fondamentali,* se i 10 punti fondamentali si prendono (com'è lecito) in posizioni arbitrarie; ed è un sistema *speciale* minimo, *dotato di tre coniche fondamentali:*

$$\Gamma_2 \equiv a b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$$
$$\Gamma'_2 \equiv a b_1 b_2 b_3 b_7 b_8 b_9$$
$$\Gamma''_2 \equiv a b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9,$$

se i punti fondamentali a, b_1, b_2,... b_6 si prendono (com'è lecito) sopra una conica Γ_2, e per b_7, b_8, b_9, si assumono le ulteriori intersezioni di due coniche Γ'_2, Γ''_2, passanti l'una per a, b_1, b_2, b_3, l'altra per a, b_4, b_5, b_6. — E altri sistemi speciali si ricaverebbero specializzando altrimenti le posizioni dei 10 punti fondamentali.

60. *Un sistema lineare minimo dotato di una o più linee fondamentali, e che non sia del tipo normale binomio, è un sistema lineare speciale.* Infatti se i punti fondamentali fossero arbitrarii (n.° 10) il sistema non conterrebbe (contro l'ipotesi) alcuna linea fondamentale.

61. Sia (C_μ) un sistema lineare speciale del minimo ordine e Γ_ν una sua curva fondamentale. Se si applica la trasformazione T_n indicata al n.° 12 e si mantengono le stesse notazioni adoperate ivi e al n.° 17; riflettendo che il sistema qui considerato non è del tipo binomio di 2ª specie, si avrà $\rho_i > 0$, come si è dimostrato al n.° 14. E supposto che Γ_ν sia una curva fondamentale minima (*) si dimostra nello stesso modo essere $\rho'_i > 0$; cosicchè l'espressione $\sum_\alpha r_k r'_k + \sum_{i=1}^{i=\varphi} \rho_i \rho'_i$ è una quantità positiva e quindi da (12) si ricava $\nu' > 0$. In altri termini:

XXV. — Le linee fondamentali *minime* di un sistema lineare speciale del minimo ordine non svaniscono per mezzo di successive trasformazioni quadratiche o di una trasformazione cremoniana qualsivoglia.

Ad esempio comunque si trasformi la rete d'ordine minimo:

$$(C_6) \equiv [a_1^2 \, a_2^2 \ldots a_8^2 \, b_1 \, b'_1]^{p=2, \; k=2}_{\mu=6, \; c'=2},$$

dotata della *cubica fondamentale minima* $\Gamma_3 \equiv a_1 \ldots a_8 \, b_1 \, b'_1$ si otterrà una rete contenente almeno una curva fondamentale; comunque si trasformi il fascio d'ordine minimo:

$$(C_6) \equiv [a_1^2 \ldots a_8^2 \, b_1 \, b_2 \, b'_1 \, b'_2]^{p=2, \; k=0}_{\nu=6, \; c'=1},$$

dotato delle *due cubiche fondamentali minime:*

$$\Gamma_3 \equiv a_1 \ldots a_8 \, b_1 \, b'_1, \qquad \Gamma'_3 \equiv a_1 \ldots a_8 \, b_2 \, b'_2,$$

(*) Per brevità chiamo *minima* una *curva fondamentale d'ordine* $\nu > 1$, quando la somma delle tre sue moltiplicità più elevate (nei punti fondamentali del sistema) non ne superi l'ordine ν.

si otterrà un fascio dotato di almeno due curve fondamentali; comunque si trasformi il fascio d'ordine minimo:

$$(C_{3m}) \equiv [a_1^m\, a_2^m \ldots a_9^m]_{\mu=3m,\ c'=1}^{p=1,\ k=0},$$

dotato (se $m > 1$) della *cubica fondamentale minima* $\Gamma_3 \equiv a_1 a_2 \ldots a_9$ (n.° 50), si otterrà un fascio dotato di almeno una curva fondamentale; ecc.

62. Segue dal teorema testè dimostrato che se (C_μ) possiede β punti base e $\gamma (\geqq 0)$ curve fondamentali *minime*, il sistema trasformato (C_μ) conterrà (n.° 14):

$$f = \varphi - \eta + \beta,$$

punti base e (n.° 19):

$$f_c = \varphi - \eta + \gamma,$$

linee fondamentali; e per conseguenza *l'eccesso degli elementi fondamentali di* (C_M) *sarà:*

$$\varepsilon \equiv f - f_c = \beta - \gamma. \tag{1}$$

Onde tenuto presente il teorema III e il corollario di II (§ 3) si può ora dire più generalmente:

XXVI. — Se un sistema lineare di genere p è riducibile a un sistema minimo privo di curve fondamentali (*) o a uno dotato di una sola retta fondamentale o a uno dotato di γ linee fondamentali *minime*, l'eccesso ε sarà rispettivamente $= \beta$ o $= 1$ o $= \beta - \gamma$; β indicando il numero dei punti base del sistema minimo.

§ 10. Sistemi generali d'ordine minimo dei generi $p = 0,\ 1,\ 2$.

63. In questo paragrafo diamo pei primi tre generi i sistemi *generali* minimi del tipo normale e i corrispondenti tipi derivati, come li abbiamo ottenuti applicando i metodi precedentemente esposti.

Notiamo però che, per quanto è detto ai n.i 54, 57 e 66 xxxii, i derivati del terzo sistema normale di genere $p = 2$ contengono implicitamente due sistemi minimi *speciali di 1° tipo*, cioè la rete e il fascio di sestiche indicati negli esempii del n.° 61.

(*) Fanno eccezione i fasci del genere zero. Per un fascio di curve razionali ritengo aver luogo invece la relazione $\gamma = 2(\beta - 1)$: la quale trovai verificata in tutti gli esempi che mi è accaduto di considerare.

TABELLA IV. — SISTEMI LINEARI GENERALI D'ORDINE MINIMO DEI GENERI $p = 0, 1, 2$.

Tipi normali					Tipi derivati corrispondenti			
Qualifica	Simbolo	Grado k_0	Dimensione c'_0	Ordine minimo μ	Simbolo	Grado $k = k_0 - \beta$	Dimensione $c' = c'_0 - \beta$	Indice β e osservazioni
				$p = 0$ (*)				
monomio	$(C_\mu) \equiv [a^{\mu-1}]$	$2\mu - 1$	2μ	$\mu \geqq 1$	$(C'_\mu) \equiv [[a^{\mu-1} b]]$	$2\mu - 2$	$2\mu - 1$	(**)
				$p = 1$				
monomio	$(C_3) \equiv [0]$	9	9	3	$(C'_3) \equiv [a_1 a_2 \dots a_\beta]$	$9 - \beta$	$9 - \beta$	$0 < \beta < 9$
binomio 2ª specie	$(C_4) \equiv [[a_1^2 a_2^2]]$	8	8	4	———	—	—	—
				$p = 2$				
monomio	$(C_4) \equiv [a^2]$	12	11	4	$(C'_4) \equiv [a^2 b_1 b_2 \dots b_\beta]$	$12 - \beta$	$11 - \beta$	$0 < \beta < 11$
binomio 2ª specie	$(C_5) \equiv [[a^3 b^2]]$	12	11	5	———	—	—	—
trinomio 1ª specie	$(C_6) \equiv [a_1^2 a_2^2 \dots a_8^2]$	4	3	6	$(C'_6) \equiv [a_1^2 \dots a_8^2 b_1 \dots b_\beta]$	$4 - \beta$	$3 - \beta$	$0 < \beta < 3$

(*) Pel genere $p = 0$ i sistemi d'ordine minimo furono già indicati da GUCCIA, l. c., pag. 144.

(**) Nel solo caso di $\mu = 2$ oltre a questo derivato $[[a\,b]]$, dal tipo $[a]$ si ricava anche il tipo $[a^0]$ ossia $[0]$; cosicchè (cfr. n.° 33) si hanno *tre* sistemi minimi di coniche, cioè:

$$[0]_{\mu=2}, \qquad k = 4, \qquad c' = 5$$
$$[a]_{\mu=2}, \qquad k_0 = 3, \qquad c'_0 = 4$$
$$[[a_1 a_2]]_{\mu=2}, \qquad k = 2, \qquad c' = 3.$$

Aggiungeremo per mettere meglio in rilievo alcune delle proprietà condensate in questa tabella, le seguenti osservazioni relative a ciascun genere.

64. *Genere* $p = 0$.

Per $k = 4$ vi sono *due famiglie* di sistemi lineari del genere *zero:*

(*a*) *quelli della prima famiglia sono riducibili alla serie* ∞^5 *di coniche* $[0]_{\mu=2}$ *poste in un piano e il rispettivo eccesso* ε *è* $= 0$;

(*b*) *quelli dell'altra sono riducibili alla serie* ∞^5 *di cubiche* $[[a^2 b]]_{\mu=3}$ *aventi un punto doppio e un punto semplice comuni; il rispettivo eccesso* ε *è* $= 1$.

Per qualsivoglia altro valore del grado k vi è *una sola famiglia* di sistemi lineari razionali.

XXVII. — *In ogni rete omaloidica* (*) ($k = 1$, $c' = 2$) — *e in ogni sistema lineare appartenente all'anzidetta prima famiglia* ($k = 4$, $c' = 5$) — *vi sono tante curve fondamentali quanti sono i punti fondamentali* (n.° 52); *in qualsivoglia altro sistema lineare di genere zero e di dimensione* $c' > 1$ *vi sono tante curve fondamentali quanto è il numero dei punti fondamentali diminuito dell'unità.*

65. *Genere* $p = 1$.

XXVIII. — *Qualsivoglia sistema lineare generale di genere uno è riducibile mediante trasformazioni quadratiche a un sistema di cubiche aventi* β *punti comuni* ($\beta = 0, 1, 2, \ldots$) — *oppure ad uno di quartiche aventi gli stessi due punti doppi e nessun altro punto fisso comune.*

Soltanto quando il grado k *è* $= 8$ *è indeciso a priori se il sistema si ridurrà a uno di cubiche* $[a_1]_{\mu=3}$ *oppure a uno di quartiche* $[[a_1^2 a_2^2]]_{\mu=4}$; *in ambedue i casi però il suo eccesso* ε *è* $= 1$.

Vi sono in tutto 10 famiglie di sistemi lineari *generali* del genere $p = 1$: nessuna è di grado $k > 9$, due sono del grado $k = 8$, tutte le altre di gradi differenti.

In particolare:

XXIX. — *Qualunque rete di curve del genere* $p = 1$, *la quale sia determinata da punti base dati ad arbitrio, ha il grado* $k = 2$ *ed è riducibile a una rete di* C_3 *passanti per* 7 *punti fissi arbitrarii. Il numero dei punti base, diminuito di sette unità uguaglia il numero delle linee fondamentali.*

(*) Noto teorema di CREMONA sulle reti omaloidiche.

E tenuti presenti i n.i 50 e 62:

XXX. — *Qualunque fascio di curve ellittiche, il quale non sia riducibile a uno di cubiche (fascio generale o speciale* di 1° tipo), *si può trasformare in un fascio di curve d'ordine* $3m$, *dotato di* 9 *punti fondamentali* m *pli* ($m > 1$) *e di una cubica fondamentale passante per ciascuno di esso* (fascio speciale di 2° tipo).

I fasci di curve ellittiche si aggruppano in *una famiglia di fasci speciali di 1° tipo,* il cui eccesso è $\varepsilon = 9$ — e in *una* ∞^1 *di famiglie di fasci speciali di 2° tipo,* per ciascuna delle quali l'eccesso è $\varepsilon = 8$.

66. *Genere* $p = 2$.

XXXI. — *Un sistema lineare generale di genere* $p = 2$ *e di dimensione* $c' > 1$ *è riducibile a uno dei seguenti di minimo ordine:*

(*a*) *Sistemi di quartiche dotate di un punto doppio comune; il loro grado* k *è* $\leqq 12$, *la loro dimensione* $c' \leqq 11$;

(*b*) *Sistema (unico) di quintiche aventi uno stesso punto triplo, uno stesso punto doppio e nessun altro punto fisso comune; grado* $k = 12$, *dimensione* $c' = 11$;

(*c*) *Sistemi di sestiche aventi* 8 *punti doppi comuni; il loro grado* k *è* $\leqq 4$, *la loro dimensione* $c' \leqq 3$.

In particolare:

XXXII. — *Vi sono due sole famiglie di reti del genere* $p = 2$ *e del grado* $k = 3$. *Esse sono riducibili rispettivamente alle seguenti reti d'ordine minimo:*

$$(C_4)_{p=2}^{k=3} \equiv [a^2\, b_1\, b_2 \ldots b_9]_{\mu=4}$$

$$(C_6)_{p=2}^{k=3} \equiv [a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \ldots a_8^2\, b]_{\mu=6}.$$

In quest'ultima, due dei punti espressi dal grado $k = 3$ sono variabili ed uno fisso, il quale si trova sulla cubica $\Gamma_3 \equiv a_1\, a_2 \ldots a_8\, b$ determinata dai 9 punti fondamentali arbitrarii.

Onde la trasformazione di terzo grado che con questa rete si può stabilire è una degenere: ogni terna di punti conjugati del *piano semplice* si compone di un punto fisso e di due variabili.

§ 11. Sistemi lineari generali d'ordine minimo dei generi $p = 3,\ 4$.

67. Nelle due tabelle seguenti, relative ai generi $p = 3$ e $p = 4$, abbiamo segnato i sistemi *generali* minimi del tipo normale e i corrispondenti tipi derivati, come si sono ricavati coi metodi esposti; rimane però aperta una questione, cioè se gl'indicati gruppi di punti fondamentali definiscano tutti delle vere curve algebriche costituenti altrettanti sistemi lineari.

Quanto ai sistemi *speciali di 1° tipo,* essi sono implicitamente contenuti, quando esistono (n.i 54-57), nelle anzidette due tabelle. Per averli in forma esplicita bisognerebbe, per ogni singolo sistema generale di minimo ordine, esaminare se fra le k intersezioni esterne ai punti fondamentali arbitrarii ve ne siano di fisse, e quante (§ 9) (e riconoscere in pari tempo se alcune delle intersezioni fisse per avventura riunendosi non diano luogo a punti multipli, nel qual caso il considerato sistema generale di genere p somministrerebbe in realtà un sistema speciale di genere diverso). Di questa interessante questione, che rimane pure aperta, noi non ci siamo occupati se non in casi particolari (*) nella presente Memoria, non avendo essa influenza sul problema che ne formava l'oggetto principale: quello cioè di assegnare i sistemi lineari *generali* di minimo ordine relativi a un dato genere p.

Senza pregiudicare le questioni accessorie accennate, si può tuttavia affermare che le Tabelle V e VI, salve le fatte riserve (XXXIII e XXXV), non potranno arricchirsi di nuovi sistemi *generali* d'ordine minimo (**), ma ch'esse potrebbero bensì eventualmente perderne qualcuno. Uguale osservazione vale anche pei valori di p qui non considerati; cosicchè col sussidio di ricerche ausiliarie, speciali pei singoli casi, i metodi esposti somministrano per ogni dato genere p la totalità (**) dei rispettivi sistemi lineari *generali.*

(*) Questi casi particolari provengono tutti da un medesimo sistema minimo del tipo trinomio (n.° 48, Tabella III, d) cioè dal sistema generale:

$$(C_{3p})_{p=p} \equiv \left[a_1^p\, a_2^p \ldots a_8^p\, l^{p-1}\right]_{c'_0=p}^{k_0=2p-1}.$$

Uno b' dei $2p-1$ punti del gruppo (k_0) è evidentemente fisso e situato sulla cubica Γ_3 determinata dai 9 punti fondamentali arbitrarii; onde il detto sistema *generale* contiene il sistema *speciale di 1.° tipo* d'ordine minimo:

$$(C_{3p})_{p=p} \equiv \left[a_1^p\, a_2^p \ldots a_8^p\, l^{p-1}\, b'\right]_{c'=p}^{k=2(p-1)},$$

avente per linea fondamentale minima la cubica $\Gamma_3 \equiv a_1\, a_2 \ldots a_8\, b\, b'$ (se $p > 1$) e il cui grado k esprime esclusivamente punti variabili (se $p > 1$).

(**) Si tenga presente che in questo lavoro si considerano soltanto sistemi lineari dotati di singolarità *ordinarie* nei punti fondamentali.

TABELLA V. — SISTEMI LINEARI GENERALI D'ORDINE MINIMO DEL GENERE $p = 3$.

	TIPI NORMALI					TIPI DERIVATI CORRISPONDENTI			
	Qualifica	Simbolo	Grado k_0	Dimensione c'_0	Ordine minimo μ	Simbolo	Grado $k = k_0 - \beta$	Dimensione $c' = c'_0 - \beta$	Indice β
1.	monomio	$(C_4) \equiv [0]$	16	14	4	$(C_4') \equiv [a_1\, a_2 \ldots a_\beta]$	$16 - \beta$	$14 - \beta$	$0 < \beta < 14$
2.	»	$(C_5) \equiv [a^3]$	16	14	5	$(C_5') \equiv [a^3\, b_1 \ldots b_\beta]$	$16 - \beta$	$14 - \beta$	$0 < \beta < 14$
3.	binomio 2ª specie	$(C_6) \equiv [[a^4\, b^2]]$	16	14	6	———	—	—	—
4.	trinomio 1ª specie	$(C_6) \equiv [a_1^2\, a_2^2 \ldots a_7^2]$	8	6	6	$(C_6') \equiv [a_1^2 \ldots a_7^2\, b_1 \ldots b_\beta]$	$8 - \beta$	$6 - \beta$	$0 < \beta < 6$
5.	» 2ª specie	$(C_7) \equiv [a^3\, b_1^2 \ldots b_9^2]$	4	2	7	$(C_7') \equiv [a^3\, b_1^2 \ldots b_9^2\, c]$	3	1	—
6.	» 1ª specie	$(C_9) \equiv [a_1^3\, a_2^3 \ldots a_8^3\, b^2]$	5 (*)	3	9	$(C_9') \equiv [a_1^3 \ldots a_8^3\, b^2\, c_1 \ldots c_\beta]$	$5 - \beta$	$3 - \beta$	$0 < \beta < 3$
7.	» 1ª specie	$(C_{12}') \equiv [a_1^4\, a_2^4 \ldots a_8^4\, b^3\, c^2]$	3	1	12	———	—	—	—

(*) Di questi 5 punti, uno b' è fisso e si trova sulla cubica $\Gamma_3 \equiv a_1\, a_2 \ldots a_8\, b$; questo sistema *generale* contiene il sistema *speciale di 1º tipo* (n.º 57):

$$(C_9) \equiv [a_1^3\, a_2^3 \ldots a_8^3\, b^2\, b']_{c'_0=3}^{k_0=4},$$

avente la cubica fondamentale (minima) Γ_3: vedasi la nota (*) al n.º 67.

XXXIII. — *Se un sistema lineare generale di genere $p=3$ non si può ridurre a uno dei sistemi tipici contenuti in questa tabella, esso avrà la dimensione $c' \leqq 6$ e sarà trasformabile in altro d'ordine minimo del tipo trinomio.*

In particolare:

XXXIV. — *Se una rete (generale e determinata) di genere $p=3$ e di grado $k=4$ non è riducibile a una delle seguenti:*

$$(C_4)_{p=3}^{k=4} \equiv [a_1\, a_2\, a_3 \,.\,.\,.\,.\,.\, a_{12}]_{\mu=4}$$

$$(C_5)_{p=3}^{k=4} \equiv [a^3\, b_1\, b_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, b_{12}]_{\mu=5}$$

$$(C_6)_{p=3}^{k=4} \equiv [a_1^2\, a_2^2 \ldots a_7^2\, b_1 \ldots b_4]_{\mu=6}$$

$$(C_7)_{p=3}^{k=4} \equiv [a^3\, b_1^2\, b_2^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, b_9^2]_{\mu=7}$$

$$(C_9)_{p=3}^{k=4} \equiv [a_1^3\, a_2^3 \,.\,.\,.\,.\,.\, a_8^3\, b^2\, c]_{\mu=9},$$

essa sarà trasformabile in una rete d'ordine minimo del tipo trinomio.

Mediante l'ultima rete si può stabilire una trasformazione degenere di 4° grado, inquantochè tre soltanto dei punti espressi dal grado $k=4$ sono variabili, mentre uno, situato sulla cubica $\Gamma_3 \equiv a_1\, a_2 \ldots a_8\, b$, rimane fisso.

TABELLA VI. — SISTEMI LINEARI GENERALI D'ORDINE MINIMO DEL GENERE $p = 4$.

	TIPI NORMALI					TIPI DERIVATI CORRISPONDENTI			
	Qualifica	Simbolo	Grado k_0	Dimensione c'_0	Ordine minimo μ	Simbolo	Grado $k = k_0 - \beta$	Dimensione $c' = c'_0 - \beta$	Indice β
1.	binomio	$(C_5) \equiv [a_1^2\, a_2^2]$	17	14	5	$(C_5) \equiv [a_1^2\, a_2^2\, b_1 \dots b_\beta]$	$17 - \beta$	$14 - \beta$	$0 < \beta < 14$
2.	monomio	$(C_6) \equiv [a^4]$	20	17	6	$(C_6) \equiv [a^4\, b_1 \dots b_\beta]$	$20 - \beta$	$17 - \beta$	$0 < \beta < 17$
3.	binomio 2ª specie	$(C_6) \equiv [[a_1^3\, a_2^3]]$	18	15	6	———	—	—	—
4.	trinomio 1ª specie	$(C_6) \equiv [a_1^2\, a_2^2 \dots a_6^2]$	12	9	6	$(C_6) \equiv [a_1^2 \dots a_6^2\, b_1 \dots b_\beta]$	$12 - \beta$	$9 - \beta$	$0 < \beta < 9$
5.	binomio 2ª specie	$(C_7) \equiv [[a^5\, b^2]]$	20	17	7	———	—	—	—
6.	trinomio 1ª specie	$(C_7) \equiv [a_1^2\, a_2^2 \dots a_{11}^2]$	5	2	7	$(C_7) \equiv [a_1^2\, a_2^2 \dots a_{11}^2\, b_1]$	4	1	—
7.	» 2ª specie	$(C_7) \equiv [a^3\, b_1^2 \dots b_8^2]$	8	5	7	$(C_7) \equiv [a^3\, b_1^2 \dots b_8^2\, c_1 \dots c_\beta]$	$8 - \beta$	$5 - \beta$	$0 < \beta < 5$
8.	» 2ª specie	$(C_8) \equiv [a^4\, b_1^2 \dots b_{11}^2]$	4	1	8	———	—	—	—
9.	» 1ª specie	$(C_9) \equiv [a_1^3\, a_2^3 \dots a_8^3]$	9	6	9	$(C_9) \equiv [a_1^3 \dots a_8^3\, b_1 \dots b_\beta]$	$9 - \beta$	$6 - \beta$	$0 < \beta < 6$
10.	» 2ª specie	$(C_{10}) \equiv [a^4\, b_1^3 \dots b_8^3\, c_1^2\, c_2^2]$	4	1	10	———	—	—	—
11.	» 1ª specie	$(C_{12}) \equiv [a_1^4\, a_2^4 \dots a_8^4\, b^3]$	7 (*)	4	12	$(C_{12}) \equiv [a_1^4 \dots a_8^4\, b^3\, c_1 \dots c_\beta]$	$7 - \beta$	$4 - \beta$	$0 < \beta < 4$
12.	» 1ª specie	$(C_{15}) \equiv [a_1^5\, a_2^5 \dots a_8^5\, b^4\, c^2]$	5	2	15	$(C_{15}) \equiv [a_1^5 \dots a_8^5\, b^4\, c^2\, d]$	4	1	—
13.	» 2ª specie	$(C_{16}) \equiv [a^6\, b_1^5 \dots b_8^5\, c^4]$	4	1	16	———	—	—	—

(*) Uno di questi 7 punti è fisso e si trova sulla cubica $\Gamma_3 \equiv a_1\, a_2 \dots a_8\, b$; onde ecc. [v. la Nota (*) al n.° 67].

XXXV. — *Se un sistema lineare generale di genere $p=4$ non è riducibile a uno dei sistemi tipici segnati in questa tabella, esso avrà la dimensione $c' \leqq 9$ e si potrà trasformare in altro d'ordine minimo del tipo trinomio.*

In particolare:

XXXVI. — *Una rete (generale e determinata) di genere $p=4$ e di grado $k=5$ o è riducibile a una delle seguenti:*

$$(C_5)^{k=5}_{p=4} \equiv [a_1^2\, a_2^2\, b_1 \ldots\ldots b_{12}]_{\mu=5}$$
$$(C_6)^{k=5}_{p=4} \equiv [a^4\, b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{15}]_{\mu=6}$$
$$(C_6)^{k=5}_{p=4} \equiv a_1^2\, a_2^2 \ldots a_6^2\, b_1 \ldots b_7]_{\mu=6}$$
$$(C_7)^{k=5}_{k=4} \equiv [a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \ldots\ldots a_{11}^2]_{\mu=7}$$
$$(C_7)^{k=5}_{p=4} \equiv [a^3\, b_1^2 \ldots b_8^2\, c_1\, c_2\, c_3]_{\mu=7}$$
$$(C_9)^{k=5}_{p=4} \equiv [a_1^3\, a_2^3 \ldots a_8^3\, b_1 \ldots b_4]_{\mu=9}$$
$$(C_{12})^{k=5}_{p=4} \equiv [a_1^4\, a_2^4 \ldots a_8^4\, b^3\, c_1\, c_2]_{\mu=12} \text{ (*)}$$
$$(C_{15})^{k=5}_{p=4} \equiv [a_1^5\, a_2^5 \ldots\ldots a_8^5\, b^4\, c^2]_{\mu=15},$$

o è trasformabile in una rete d'ordine minimo del tipo trinomio.

Milano, gennaio 1887.

(*) Un'osservazione analoga a quelle fatte per le reti $(C_6)^{k=3}_{p=2}$ e $(C_9)^{k=4}_{p=3}$ — vedasi XXXII e XXXIV — si potrebbe quì ripetere per questa rete.