Ueber die Einführung der irrationalen Zahlen.

Von

M. Pasch in Giessen.

Obwohl wir für die Einführung der irrationalen Zahlen Darstellungen besitzen, welche zu einem in sich folgerichtigen Aufbau der Analysis dienen, so erscheint das Bedürfniss nach Klarstellung jenes Gegenstandes immer noch nicht in jeder Hinsicht befriedigt. Ein Zeichen hiervon sind die neuerlichen Erörterungen von Herrn Illigens in diesen Annalen 1889 Bd. 33 S. 155 und 1890 Bd. 35 S. 451.

Vom rein analytischen Standpunkte aus kann man Erklärungen eines Begriffs, welche auf dessen Anwendung keine Rücksicht nehmen, als genügend anerkennen und sie sogar andern Erklärungen vorziehen; nur wird dann in gewissen Fällen — und hierher gehört der Begriff der irrationalen Zahlen — eine besondere Auseinandersetzung darüber nothwendig, wie der zunächst nur für die Benutzung innerhalb der Analysis zubereitete Begriff zu seiner thatsächlichen Anwendung ausserhalb der Analysis gelangt. In dieser Weise bin ich selbst bezüglich der irrationalen Zahlen bei Abfassung der Schrift „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung" (Leipzig 1882) verfahren. Späterhin jedoch habe ich der Erklärung eine andere Fassung zu geben gesucht, welche ich in Hinblick auf die Anmerkungen, mit denen die Redaction der Annalen die Aufsätze des Herrn Illigens begleitet hat, hier mitzutheilen mir erlaube. Ich muss zu dem Zweck auf die Einführung der gebrochenen und der negativen rationalen Zahlen zurückgehen.

Schon die natürlichen Zahlen n — welche hier als Ergebniss des Zählens angesehen werden — bestehen nur innerhalb der Analysis (Zahlenlehre im weitesten Sinne) für sich allein, ohne Benennung; vor dem Eintritt in die Analysis kann ich nur von n Stücken irgend einer Mehrheit sprechen. Ueber die in solchen Aussagen auftretenden Zahlen selbst kommen ebenfalls Aussagen zu Stande; die letzteren bilden den Inhalt der Analysis, aber ihre Berechtigung beruht einzig darauf, dass sie ausserhalb der Analysis — unter Hinzufügung von Benennungen — verwirklicht werden können.

Alle wahrhaft analytischen Sätze sollen hiernach Sätze über die natürlichen Zahlen sein. Wenn sie uns überwiegend nicht unmittelbar als solche entgegentreten, so ist dies durch die Ausdrucksweise verursacht, wie sie sich aus wissenschaftlichen und practischen Bedürfnissen heraus weiter entwickelt hat. Betrachten wir zuerst die Einführung der Brüche. Die Stücke $\mathfrak{A}$ einer Mehrheit können selbst Mehrheiten sein. Sind die $\mathfrak{A}$ insbesondere Mehrheiten von je n (immer anderen) Stücken $\mathfrak{B}$, so wird jedes $\mathfrak{B}$ als n^{ter} Theil eines $\mathfrak{A}$, kurz als $\frac{1}{n}\mathfrak{A}$ bezeichet, und weiter wird $\frac{m}{n}\mathfrak{A}$ eine neue Bezeichnung für $m\mathfrak{B}$, wobei m eine natürliche Zahl vorstellt. Da nun in den Aussagen, welche auf Grund dieser Festsetzung erfolgen, $\frac{m}{n}$ sprachlich neben der Benennung in derselben Weise auftritt, wie eine natürliche Zahl, so nennen wir auch $\frac{m}{n}$ eine Zahl und haben jetzt ganze und gebrochene Zahlen zu unterscheiden.

Während die gebrochenen Zahlen uns der Mühe entheben, den zulässigen genauen Theilen von Benennungen besondere Namen zu ertheilen, schaffen wir uns mittels der negativen Zahlen in dem Gebiete gewisser paarweise einander gegenüberstehender Begriffe die Möglichkeit, je zwei derselben auf eine gleichmässige Ausdrucksweise zurückzuführen. Wir können dies erreichen durch die Bestimmung, dass die Addition der Zahl a zur Zahl b eine Veränderung von b um $+a$, dagegen die Subtraction der Zahl a von der Zahl b eine Veränderung von b um $-a$ heissen soll. Von einer solchen Bestimmung ausgehend, gelangt man dahin, die Ausdrücke $+a$ und $-a$ mit Benennungen sprachlich in derselben Weise zu verbinden, wie ursprünglich nur die natürlichen Zahlen. Erst hieraus scheint mir die Berechtigung zu erwachsen, auf jene Ausdrücke den Namen „Zahl“ zu übertragen. — Bei der Einführung der „Zahl“ Null will ich nicht verweilen.

Zwischen je zwei Zahlen lassen sich jetzt beliebig viele Zahlen einschalten. Eine Zahlenmenge kann nun so beschaffen sein, dass jede Zahl, welche sich zwischen zwei Zahlen der Menge einschalten lässt, zu ihr gehört; eine solche Zahlenmenge möchte ich eine *Schicht* nennen, und zwar eine *offene Schicht*, wenn sie keine endliche rationale Schranke (diese Annalen 1887 Bd. 30 S. 133) besitzt. Eine offene Schicht bilden beispielsweise die positiven Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist, ebenso die positiven Zahlen, deren Quadrat die 2 übertrifft. Diese beiden Schichten setzen sich zu der Gesammtheit aller positiven Zahlen zusammen. Indem wir den von Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872 S. 19) eingeführten Ausdruck mit einiger

Einschränkung gebrauchen, nennen wir jede Eintheilung aller positiven (rationalen) Zahlen in zwei offene Schichten (untere und obere) einen *Schnitt*. Diese Erklärungen haben einen wesentlich anderen Charakter, als die arithmetischen im engeren Sinne. Sie genügen nicht der von Herrn Kronecker aufgestellten Forderung*); denn man besitzt kein Mittel, um zu erkennen, ob eine irgendwie definirte Zahlenmenge eine gegebene Zahl enthält, ob eine irgendwie definirte Schicht eine offene ist, u. s. w.

Die Vergleichung zweier geraden Strecken A und B führt unter Umständen zu einem Schnitte, indem sich ergiebt, dass die Strecke A grösser als das r-fache und kleiner als das t-fache der Strecke B ist, wenn r aus der unteren, t aus der oberen Schicht eines gewissen Schnittes beliebig entnommen wird. Diesem Schnitte ordnen wir alsdann ein Zeichen zu, etwa s, welches wir zu der Redeweise: A ist gleich sB (oder: das Verhältniss von A zu B ist s, u. s. w.) verwenden, um lediglich auszudrücken, dass A immer zwischen rB und tB eingeschlossen bleibt. Wieder wird das Zeichen s, welches hier den Platz einer Zahl einnimmt, geradezu eine Zahl genannt und dadurch die Unterscheidung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen veranlasst. Die Einführung negativer Irrationalzahlen bedarf keiner besonderen Auseinandersetzung.

Gewöhnlich macht man — stillschweigend oder ausdrücklich — die Annahme**), dass jedem arithmetisch definirten Schnitte ein Verhältniss zwischen Linien entspricht, und ist dann berechtigt, jedem Schnitte in vorstehender Weise eine irrationale Zahl zuzuordnen. Abgesehen jedoch von den gegen diese Annahme an andrer Stelle***) geltend gemachten Bedenken, kann man überhaupt fordern, dass hier jede Annahme, zumal jede ausserhalb der Analysis gelegene, wennmöglich vermieden werde. Wenn nun ein beliebiger Schnitt vorliegt, so kann man sich in der That, unter Einführung eines dem Schnitte zugeordneten Zeichens s, der Redeweise: $\mathfrak{A}$ ist kleiner (grösser) als $s\mathfrak{B}$, bedienen, ohne darüber zu urtheilen, ob es einen Gegenstand giebt, der gleich $s\mathfrak{B}$ zu nennen wäre; denn man braucht jene Redeweise nur dahin zu verstehen, dass $\mathfrak{A}$ gleich $q\mathfrak{B}$ oder kleiner (grösser)

---

*) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen 1882 S. 11 (Festschrift zu Kummer's Doctor-Jubiläum, auch Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 92).

**) Siehe G. Cantor, diese Annalen 1872 Bd. 5 S. 128; Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872 S. 18. Beide Autoren stützen jedoch die Erklärung des Irrationalen weder auf diese noch eine andere Hypothese.

***) F. Klein, Sitzungsberichte der phys.-med. Soc. zu Erlangen, 8. Dec. 1873 (wieder abgedruckt in diesen Annalen 1883 Bd. 22 S. 249—259), sowie Ann. 1890 Bd. 37 S. 571 f.; Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882 S. 126 sowie Ann. 1887 Bd. 30 S. 129.

als $q\mathfrak{B}$ ist, wo q eine Zahl aus der unteren (oberen) Schicht des Schnittes und $\mathfrak{B}$ eine Benennung bedeutet. Auch ist stets — und das genügt für die Anwendungen — eine Aussage möglich von der Form: $\mathfrak{A}$ ist mit gewisser Genauigkeit gleich $s\mathfrak{B}$; wenn nämlich $\mathfrak{A}$ zwischen $r\mathfrak{B}$ und $t\mathfrak{B}$ so eingeschlossen werden kann, dass die Zahl r der unteren, t der oberen Schicht des Schnittes angehört und die Differenz $t - r$ eine gewisse Kleinheit besitzt.

Dass derartige Ausdrucksweisen sich eingebürgert haben, beruht auf dem Bedürfniss, möglichst viele Fälle unter eine und dieselbe sprachliche Form zu bringen. Eine Nothwendigkeit aber war nicht vorhanden, und man könnte — wie Herr Kronecker ausgesprochen hat — „die Modificationen und Erweiterungen des Zahlbegriffs wieder abstreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind“ (Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller gewidmet, 1887 S. 265; Journal für die reine und angewandte Mathematik 1887 Bd. 101 S. 339).

Besondere Ausführungen sind erforderlich, um das Rechnen in dem erweiterten Zahlengebiete zu begründen. Hier war nur beabsichtigt, in den Grundzügen einen Weg anzugeben, auf welchem die Erweiterung selbst geschehen kann.

Giessen, October 1891.