Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von A. Brill und M. Nöther*).

Die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Functionen und das Werk von Clebsch und Gordan über denselben Gegenstand bieten eine reiche und für die Geometrie theilweise noch unbenutzte Quelle werthvoller algebraischer Sätze und Begriffe. Indem dieser Theorie der Begriff der algebraischen *Function* zu Grunde liegt, geht die Untersuchung auf solche Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden, deren wesentliche Eigenschaft die Unabhängigkeit von rationalen Transformationen ist. Es ist aber die Aufgabe der Algebra, diese interessanten Beziehungen direct und ohne die in den genannten Theorien angewandte Beihilfe transcendenter Sätze zu beweisen, um dieselben einerseits für ihr eigenes Gebiet zu erwerben, andererseits auch der Geometrie leichter zugänglich zu machen.

Indem die Verfasser sich die Aufgabe stellten, für die wichtigsten jener Sätze die algebraische Form und den algebraischen Beweis zu finden, war es ihre Absicht, einen Ausgangspunkt für die Entwicklung jenes theilweise einem fremden Gebiete entwachsenen Zweiges der Algebra zu finden**). Es genügte in dieser Beziehung, den bekannten Hilfsmitteln der Algebra einige wenige Begriffe hinzuzufügen. Um aber der Darstellung eine grössere Uebersichtlichkeit und Kürze zu verleihen, war es nöthig, auch einige neue Bezeichnungen einzuführen, welche man in den §§. 1. 2. 5. definirt finden wird.

---

*) Der vorliegende Aufsatz ist die Ausführung einer in den Göttinger Nachrichten (Febr. 1873) enthaltenen Note der Verfasser. — Ein Auszug aus dem Folgenden ist von Herrn Fiedler in die soeben erschienene Uebersetzung der 2. Ausgabe des Salmon'schen Werkes über höhere ebene Curven aufgenommen worden.

**) Wir bemerken, dass dieser Ausgangspunkt ganz verschieden ist von dem ebenfalls algebraischen, welchen Herr Weierstrass zur Aufstellung der Zahl p in seinen Vorlesungen nimmt.

Nach dem Vorgang von Clebsch und Gordan möge im Nachfolgenden die Gleichung, durch welche eine algebraische Function y der Variabeln x definirt wird, als Gleichung einer *Curve*, in den Cartesischen Coordinaten x, y (oder den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, wo $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$) geschrieben, aufgefasst werden (selbstverständlich ohne über die Realität der Variabeln, oder der in der Gleichung auftretenden Coefficienten irgend eine Voraussetzung zu machen). Die Vorzüge der an ein geometrisches Bild sich anlehnenden Darstellungsweise sind an anderen Orten genügend hervorgehoben worden, weshalb dies hier übergangen werden kann; ebensowenig scheint es nothwenig, an dieser Stelle über die mit den elementaren geometrischen Begriffen verbundenen Operationen an der Gleichung etwas zuzufügen. Wenn die hier gewählte Form der Definitionsgleichung für eine algebraische Function — die allgemeine Form der Gleichung einer Curve n.Ordnung — von der von Riemann gewählten Normalform abweicht, so sei erwähnt, dass nicht nur, vermöge der Annahme des § 1., diese letztere in unserer Darstellung mit inbegriffen ist, sondern dass auch alle Ausartungen der Riemann'schen Form, wie z. B. die auf hyperelliptische Functionen führenden Gleichungen, durch den letzten § (§ 7.) des I. Theiles in die Betrachtungen desselben mit hereingezogen worden sind. Diese Betrachtungen erfüllen die wesentliche Forderung, völlig unabhängig von Constantenzählung und somit auch für Curven mit beliebig speciellen Eigenschaften gültig zu sein.

Der erste Theil handelt von den Eigenschaften der Gruppe von Schnittpunkten, welche eine algebraische Curve mit irgend einer „ihr adjungirten", d. h. mit einer solchen Curve, die durch jeden ihrer Doppelpunkte einfach, durch einen i-fachen Punkt $(i-1)$-fach u. s. w. hindurchgeht, ausser diesen noch besitzt. Betrachtet man die Schaaren von Punkt-Gruppen, welche auf der gegebenen Curve durch *bewegliche* adjungirte Curven ausgeschnitten werden, so gelangt man zu einer Geometrie auf der Curve, vermöge deren es möglich wird, die bei eindeutiger Transformation der Curve ungeändert bleibenden Eigenschaften in einfacher Weise zu definiren. — Den Ausgangspunkt für diese Betrachtungen bildet der „Restsatz" (§ 1.), ein Satz über Punktgruppen auf einer Curve, welcher, dem Abel'schen Theorem nahe verwandt, dasselbe in seinen Anwendungen auf Geometrie in vielfacher Hinsicht zu vertreten geeignet ist. Sofern sich vermöge dieses Satzes aus einem vollständigen Schnittpunktsystem Theile desselben als selbständige Punktgruppen ausscheiden lassen, wird eine besondere Betrachtung der Schaaren von Punktgruppen, welche Curven verschiedener Ordnung aus der gegebenen Curve ausschneiden, nothwendig (§§ 2. 3.). Von besonderer Bedeutung erscheinen hierbei solche

„Special“-Gruppen, welche einer gewissen Ungleichung genügen (§ 3. a. E.). Von diesen wird (§ 4.) gezeigt, dass sie immer durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung (wenn n den Grad der gegebenen Curve bedeutet) ausgeschnitten werden können. Hieran anknüpfend wird (§ 5.) ein Satz bewiesen, der nach Riemann, von dem er zuerst ausgesprochen, und nach Roch, von dem er allgemein bewiesen wurde, im Nachstehenden der „Riemann-Roch'sche Satz“ genannt wird. Dieser Satz, der von hervortretender Wichtigkeit ist, ermöglicht den algebraischen Beweis aller der bereits aus der Theorie der Abel'schen Functionen bekannten Sätze über die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, über die bei eindeutiger Transformation erhaltenen Eigenschaften einer Curve und der ihr adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die Erhaltung des Geschlechtes u. s. f. (§ 6.).

Im zweiten Theil, der sich vorzugsweise mit einer allgemeinen Curve ihres Geschlechtes beschäftigt, wird (§ 9.) das Problem der Special-Gruppen in algebraischer Form aufgestellt und zur Herstellung einer Ungleichung für dieselben benutzt. Für einen Grenzfall (§ 10.), der durch diese Ungleichung bezeichnet ist, lässt sich die Anzahl der Lösungen (§ 11.) jenes algebraischen Problems bestimmen und in einzelnen Fällen auf indirectem Wege bestätigen (§ 12.). In den §§ 13—16. werden die Moduln für eine Klasse von Curven definirt und in mehrfacher Weise, je anschliessend an eine der Normalformen (§ 10.), auf die man eine allgemeine Curve ihres Geschlechtes eindeutig transformiren kann, bestimmt und gezählt. Die gegen die Riemann'sche Zahl $3p-3$ für die Moduln erhobenen Bedenken werden zerstreut und damit diese Frage, wie die Verfasser glauben, endgiltig erledigt.

Das Vorstehende gestattet noch einen Schluss auf die Anzahl der freien Bestimmungsstücke einer Raumcurve von gegebenem Grad und Geschlecht (zwischen denen jedoch eine Ungleichung besteht). (§ 17.)

Zum Schluss folgt eine uneingeschränkt gültige Anwendung der Theorie der Special-Gruppen auf die Definition der besonderen Punktgruppen in der Ebene, deren Untersuchung durch eine Bemerkung von Cayley (Proceed. Math. Soc. Dec. 1870) veranlasst worden war.

I. Theil.

§ 1.

Der Restsatz.

Die nachfolgenden Betrachtungen handeln von den Eigenschaften von Punktsystemen einer ebenen irreducibeln algebraischen Curve mit beliebigen Doppel- und vielfachen Punkten*), die durch ihre Gleichung $f(x, y) = 0$ (in homogenen Coordinaten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$), $f = 0$, oder kürzer durch f bezeichnet werden möge, und zwar beziehen sich dieselben insbesondere auf solche Punktsysteme, welche eine durch die Doppelpunkte von f einfach, die i-fachen Punkte $(i - 1)$-fach hindurchgehende, im Uebrigen aber willkührliche algebraische Curve (welche auch zerfallen kann) ausserdem noch ausschneidet. Curven dieser Art wollen wir „der Curve f adjungirte" oder kurzweg „*adjungirte Curven*" nennen**). Wenn wir uns in der Folge ausschliesslich mit den durch adjungirte Curven ausgeschnittenen Punktgruppen beschäftigen (unter „*Punktgruppe*" ein beliebiges Aggregat von einer endlichen Anzahl von Punkten auf f verstanden), so ist diese Beschränkung nur eine scheinbare; denn man braucht einer nicht adjungirten Curve nur eine solche feste Curve zuzufügen, welche das Aggregat Beider zu einer (zerfallenden) adjungirten Curve vervollständigt.

Man theile das System der Schnittpunkte, welche eine adjungirte Curve mit f ausser den (zur Charakterisirung der adjungirten Curve als solcher) in die „*singulären*" Punkte von f (wir fassen unter dieser Bezeichnung Doppel- und vielfache Punkte zusammen) fallenden Schnittpunkten besitzt, beliebig in zwei Gruppen G_R und G_Q von bez. R und Q Punkten. Mit Sylvester***) nennen wir dann die Gruppe G_Q das „*Residuum*" von G_R oder die zu G_R residuale Gruppe und umgekehrt, indem wir als Residuum einer Gruppe, die von einer adjungirten Curve ausgeschnitten wird, jede Gruppe von Punkten bezeichnen, welche mit den Punkten jener Gruppe und den singulären Punkten von f (jeden i-fachen Punkt von f als $i - 1$-fachen der adj. C. gerechnet) ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden. Legt man nun durch G_Q irgend eine andere adjungirte Curve (was immer möglich ist, wenn man nur den Grad hoch genug wählt) und nennt die Gruppe $G_{R'}$ von R' Punkten, welche diese noch ausserhalb der singulären Punkte ausschneidet, der Gruppe G_R „*corresidual*" in Bezug auf die Gruppe G_Q (weil sie das-

---

*) Wir setzen zunächst noch vielfache Punkte mit *getrennten* Tangenten voraus, werden indess in § 7. zeigen, wie man diese Beschränkung aufheben kann.

**) In unserer Note in den Göttinger Nachrichten werden dieselben „Curven vom Charakter der φ" genannt, indem dort unter „Curven φ" adjungirte Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung verstanden werden.

***) Man vergl. die Vorrede zu der (gleichzeitig mit dem Erscheinen unserer Note veröffentlichten) zweiten Ausgabe des Werkes von G. Salmon: Higher plane curves, woselbst jene Bezeichnung auf Curven 3. Ordnung angewendet wird; oder den Literaturnachweis zu Cap. V. der Uebersetzung dieses Werkes von Fiedler. — In Uebereinstimmung mit der hier adoptirten Bezeichnung wählten wir den Namen „Restsatz" statt des in unserer Note gebrauchten Wortes: „Aequivalenzsatz".

selbe Residuum G_Q wie jene besitzt), so kann man den folgenden *Satz* aussprechen:

Sind auf einer algebraischen Curve die Punktgruppen G_R, $G_{R'}$, $\cdots$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es in Bezug auf jede andere Punktgruppe $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist. Mit anderen Worten: „*corresiduale Gruppen*" ist ein Begriff, welcher von einem speciellen Residuum unabhängig ist. — Dabei ist noch zu bemerken, dass es gleichgiltig ist, ob die Gruppen G_R, $G_{R'}$, $\cdots$ und ebenso die Gruppen G_Q, $G_{Q'}$, $\cdots$ lauter verschiedene, oder theilweise je dieselben (festen) Punkte enthalten.

Um jenen Satz zu beweisen, nehmen wir an, die gegebene Curve sei $f=0$; auf dieser werden ausgeschnitten die Punktgruppen:

$$\begin{array}{llll} G_Q & \text{und } G_R & \text{durch} & A=0, \\ G_Q & \text{und } G_{R'} & \quad ,, & B=0, \\ G_{Q'} & \text{und } G_R & \quad ,, & \alpha=0, \end{array}$$

wo $A=0$, $B=0$, $\alpha=0$ f adjungirte Curven seien. Wir werden nun zeigen, dass auch die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ auf einer und derselben adjungirten Curve liegen. Zunächst lassen sich*) immer zwei Curven $\beta=0$, $\gamma=0$ finden von der Beschaffenheit, dass man identisch hat:

$$\alpha\cdot B \equiv \beta\cdot A + \gamma\cdot f.$$

Denn die Gleichung $\alpha\cdot B=0$ repräsentirt eine (zerfallende) Curve, welche durch alle nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte von $A=0$ und $f=0$ hindurchgeht. Ausserdem aber erfüllt das Produkt $\alpha\cdot B$ auch in den singulären Punkten von $f=0$ die Bedingungen**), an welche noch weiter die Möglichkeit geknüpft ist, dasselbe auf die Form der rechten Seite zu bringen. Dasselbe verschwindet nämlich in jedem i-fachen Punkte von $f=0$ (wo $A=0$ einen $(i-1)$-fachen Punkt besitzt) $(2i-2)$-fach, und besitzt somit alle Eigenschaften, um in die Form der rechten Seite übergeführt zu werden. Die hierbei sich ergebende Curve $\beta=0$ ist nun aber nothwendig eine adjungirte. Denn das Verhalten von $\beta\cdot A$ muss, wenn die obige *Identität* besteht, dem von $\alpha\cdot B$ in jedem i-fachen Punkte

*) Diese Schlussweise ist zwar schon lange bekannt (vgl. z. B. Plücker, Theorie der algebr. Curven; Einleitung.); die Grenzen ihrer Berechtigung sind indessen erst in jüngerer Zeit angegeben worden. (S. d. folgende Note.)

**) Nöther, Math. Annalen Bd. VI. S. 351, wo gezeigt wird, dass die Curve $\alpha\ B=0$, wenn sie auf die Form der rechten Seite soll gebracht werden können, in jedem i-fachen Punkt von $f=0$, in welchem $A=0$ einen k-fachen Punkt besitzt, entweder gewisse specielle Singularitäten oder wenigstens einen $k+i-1$-fachen Punkt haben muss.

von $f = 0$ auch den einzelnen Zweigen dieses Punktes gegenüber dasselbe sein. In einem solchen Punkte wird aber jeder Zweig von $f = 0$ von der Curve $\alpha \cdot B = 0$ in $2i - 2$ Punkten getroffen. Die Curve $\beta = 0$ muss somit jeden Zweig noch in $i - 1$ Punkten schneiden, der Punkt also ein $(i - 1)$-facher sein. Denn wäre derselbe etwa ein $(i - 2)$-facher Punkt von $\beta = 0$, dessen Zweige einzeln $i - 2$ Zweige von $f = 0$ berührten, so würden 2 Zweige nur in $2i - 3$ Punkten getroffen werden. Noch weniger könnte der Punkt ein $(i - 3) \cdots$-facher sein. Da nun der Ausdruck β ausser in den singulären Punkten bloss noch in den Punkten der Gruppen $G_{R'}$ und $G_{Q'}$ verschwindet, so liegen diese auf der adjungirten Curve $\beta = 0$, q. e. d. Tritt a Stelle von $B = 0$ eine *Schaar* von Curven $B = 0$, welche alle durch G_Q gehen und f in einer Schaar von G_Q residualen Gruppen $G_{R'}$ treffen, so liefert derselbe Satz an Stelle von $\beta = 0$ eine *Schaar* von Curven $\beta = 0$, die alle durch $G_{Q'}$ gehen und $f = 0$ in derselben Schaar von Gruppen $G_{R'}$ schneiden. Diese zweite Schaar hat dieselben willkührlichen Parameter, wie die erstere, und in derselben Form; sie ist in Bezug auf $f = 0$ der ersteren vollständig „*äquivalent*". Insbesondere gilt dies für die linearen Schaaren von Curven $B = 0$ und $\beta = 0$, die man durch G_Q, bez. $G_{Q'}$ legen kann; die Anzahl der linear von einander unabhängigen Curven $B = 0$ und $\beta = 0$ ist somit die gleiche, und charakteristisch für die Schaar der Gruppen $G_{R'}$, der wir sie später als Index beifügen werden.

Zur Aufstellung einer der Schaar der Curven $B = 0$ äquivalenten Schaar $\beta = 0$ kann für die Basisgruppe $G_{Q'}$ dieser letzteren eine beliebig specielle, der Gruppe G_R residuale Gruppe gewählt werden; indessen muss, wenn die Schaar $B = 0$ die allgemeinste lineare Schaar durch G_Q war, auch für $\beta = 0$ die allgemeinste lineare Schaar gewählt werden, welche $f = 0$ in der Gruppe $G_{Q'}$ schneidet. So sind die allgemeinsten adjungirten Curven 4. Ordnung zu einer Curve 5. Ordnung $f = 0$ mit 3-fachem Punkt P, für welche im Ganzen 12 Schnittpunkte in den letzteren fallen, nicht die in 4 Gerade zerfallenden Curven mit 4-fachem Punkt in P, denn diese bilden nur eine 4-fach unendliche Schaar, sondern diejenigen Curven 4. Ordnung, welche in P einen 3-fachen Punkt haben, dessen Tangenten mit denen von $f = 0$ übereinstimmen. Dieselben bilden noch eine 5-fach unendliche Schaar; und somit ist auch die Schaar der zu jenen 12 in P fallenden Schnittpunkten residualen Gruppen G_8 noch eine 5-fach unendliche.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass, obgleich Irreducibilität der Gleichung $f = 0$ vorausgesetzt ist, doch in dem Vorstehenden hiervon an keiner Stelle Gebrauch gemacht wurde und demnach *der Restsatz auch für reducibele Curven seine Geltung behält.*

§ 2.

Schaaren von Punktgruppen.

Durch den im Vorstehenden bewiesenen Restsatz sind Gruppen von Punkten, auch wenn dieselben nicht vollständige Schnittpunktsysteme bilden, in solcher Weise unabhängig von der sie ausschneidenden Schaar von Curven definirt, dass eine Betrachtung derselben an und für sich nicht umgangen werden kann.

Die beweglichen Schnittpunkte einer durch irgend welche Bedingungen nicht vollständig festgelegten adjungirten Curve bilden auf f eine *ein- oder mehrfach unendliche Schaar von Punktgruppen*, für welche sich folgende zunächstliegenden Unterscheidungsmerkmale aufstellen lassen:

1. Die Zahl der in jeder Gruppe der Schaar befindlichen Punkte (die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der adjungirten Curve).

2. Die Mannigfaltigkeit der Schaar (die Zahl der willkührlichen Parameter in der Gleichung jener Curve).

3. Der Grad, bezw. die Form, in welcher diese Parameter in die Gleichung eingehen.

Mit Rücksicht auf den Grad kann man z. B. von „*linearen*", „*quadratischen*", ⋯ *Schaaren von Punktgruppen* reden. So bilden die Gruppen von je 3 Punkten, welche alle Geraden aus einer Curve 3. Ordnung ausschneiden, eine lineare 2-fach unendliche (∞^2-) Schaar von je 3 Punkten. Die Punkte, in welchen die Tangenten eines Kegelschnitts eine Curve 3. Ordnung treffen, eine quadratische 1-fach unendliche (∞^1-) Schaar von je 3 Punkten; ein einzelner gegebener Punkt einer solchen Curve eine lineare ∞^0-Schaar von 1 Punkt. Dagegen gehört ein Punkt einer Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt einer linearen ∞^1-Schaar von je 1 Punkte an, u. s. w.

Sei jede der Gruppen von je Q Punkten, welche die Schaar bilden sollen, σ Bedingungen unterworfen, so wird die Schaar eine $(Q-\sigma)$-fach unendliche, da durch $Q-\sigma$ beliebig anzunehmende Punkte einer Gruppe auf $f=0$ die übrigen σ Punkte der Gruppe auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt sind.

Mit Hilfe des Restsatzes ist es nun möglich, insbesondere die *linearen* Schaaren, mit denen wir uns in der Folge vorzugsweise zu beschäftigen haben, vor den übrigen noch weiter auszuzeichnen. Jede *lineare* Schaar ist offenbar zugleich eine Schaar corresidualer Gruppen. Irgend eine Gruppe G_Q, welche σ Bedingungen genügt, möge durch den Restsatz zu einer linearen q-fach ($q \leq Q-\sigma$) unendlichen Schaar von Gruppen von je Q Punkten führen, die alle G_Q corresidual sind und zugleich den σ Bedingungen genügen. Jede Gruppe innerhalb dieser Schaar ist alsdann durch irgend q Punkte von $f=0$ eindeutig festgelegt. Von den Punkten irgend einer Gruppe, welche den σ Bedingungen genügt, waren aber $Q-\sigma$ Punkte ganz willkührlich anzunehmen, die daraus hervorgehende $\infty^{Q-\sigma}$-Schaar von Gruppen zerfällt also in ∞^{τ} Systeme von linearen ∞^{q}-Schaaren, wobei $\tau=(Q-\sigma)-q$ ist. Für $\tau=0$ erhält man so eine endliche Anzahl von linearen Schaaren, die im Allgemeinen einander nicht corresidual sind; und zwar dieselben, von welchen $Q-\sigma=q$ Punkten man auch ausgegangen ist.

Die Q Punkte einer Gruppe kann man sich demnach in 3 Theile zerlegt denken: q Punkte, welche die Gruppe innerhalb der Schaar festlegen, τ Punkte, welche sodann die Schaar, eindeutig oder mehrdeutig, bestimmen, die übrigen σ Punkte, welche durch die σ Bedingungen mit bestimmt sind.

So gehören irgend 3 Punkte einer Curve 3. Ordnung einer ∞^2-Schaar von je 3 Punkten an, für welche bei beliebiger Lage der Punkte $\sigma=0$, also $\tau=3-2=1$ ist. Es giebt demnach noch ein ∞^1-System von solchen ∞^2-Schaaren. Darunter befindet sich auch die Schaar der durch die Geraden der Ebene ausgeschnittenen Gruppen, für welche $\sigma=1$, $\tau=0$ ist.

Der Kürze halber möge in der Folge eine *lineare* ∞^q-*Schaar* von Gruppen von je Q Punkten durch $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$, und die *einzelne Gruppe* einer solchen Schaar entsprechend durch $G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$ bezeichnet werden. Auch möge, wenn nicht Anderes ausdrücklich zugefügt ist, unter einer ∞^q-Schaar eine *lineare* ∞^q-Schaar verstanden werden. — Die durch die Geraden der Ebene auf einer Curve 3. Ordnung ausgeschnittene Schaar von Gruppen ist demnach eine Schaar $g_3^{(2)}$.

§ 3.

Die linearen Schaaren.

Sind durch den Restsatz die linearen Schaaren von Punktgruppen von den sie ausschneidenden Curvenschaaren unabhängig gemacht, so giebt es doch eine gewisse Grenze für den Grad derjenigen Curven, durch die eine gegebene Schaar ausgeschnitten werden kann. Ehe wir indess auf diese Frage eingehen, betrachten wir die durch gegebene adjungirte Curven ausschneidbaren Schaaren, um einen Ueberblick über die einfachsten Punktgruppen überhaupt zu erhalten.

Die Curve $f=0$ sei von der n. Ordnung $(n>3)$, nicht zerfallend, und besitze α_2 Doppel-, α_3 dreifache-, $\cdots$ α_i i-fache Punkte je mit getrennten Tangenten. Sei die adjungirte Curve $\varphi=0$ von der s. Ordnung, und setzt man zunächst $s\geq n$ voraus, so geht durch die Schnittpunkte derselben mit $f=0$ auch noch die Curve:

$$\psi\equiv\varphi+A\cdot f=0$$

hindurch, wo A ein noch unbestimmter Ausdruck $(s-n)$. Ordnung ist. Ist es nun möglich, mit Hilfe der

$$\tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)=x$$

Coefficienten von A ebensovielen Coefficienten von ψ specielle Werthe zu ertheilen, so kann man an Stelle des Ausdrucks φ, welcher wenigstens*)

$$\frac{s(s+3)}{2}-\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2}=y$$

willkührliche Coefficienten besitzt, den Ausdruck ψ (mit übrigens denselben Eigenschaften gegenüber $f=0$) mit wenigstens

$$y-x=ns-\Sigma\alpha_i\cdot i(i-1)-p$$

$$\left(\text{wo } p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2} \text{ gesetzt wird}\right)$$

noch unbestimmten Coefficienten setzen. Im Fall also, dass man über alle Coefficienten in $A=0$ in der gewünschten Weise verfügen kann, sind von den nicht in die singulären Punkte von $f=0$ fallenden Schnittpunkten von $\varphi=0$ mit $f=0$ höchstens p durch die Uebrigen bestimmt, sofern diese nicht eine besondere Lage haben. Im Falle jedoch, dass jene Voraussetzung bezüglich $A=0$ nicht eintritt (wo dann statt $y-x$ eine grössere Zahl steht), sowie für besondere Lagen der $y-x$ ersten Schnittpunkte (wenn eine oder mehrere Gleichungen eine Folge der Uebrigen sind) werden jedenfalls weniger als p Punkte durch die Uebrigen bestimmt sein.

Eine Verminderung der Coefficientenanzahl der adjungirten Curve wird nicht mehr möglich, wenn $s<n$ ist. Nichtsdestoweniger gelten für die Fälle $s=n-1$ und $s=n-2$ die obigen Betrachtungen noch, weil für sie die Zahl x verschwindet.

Für $s=n-3$ wird die Zahl $y=p-1$; und weil dann die Anzahl der nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte $=2p-2$ wird, so sind höchstens $p-1$ Punkte durch die Uebrigen bestimmt**), sofern diese Letzteren nicht eine besondere Lage besitzen***).

*) Für besondere Lage der vielfachen Punkte von $f=0$ könnte z. B. die Zahl der Bedingungen dafür, dass $\varphi=0$ eine adjungirte Curve ist, geringer als $\Sigma\alpha_i\cdot\frac{i(i-1)}{2}$ sein, und alsdann φ mehr als y willkührliche Coefficienten besitzen.

**) Für besondere Curven $f=0$ kann es eintreten, dass *Jeder* der $p-1$ angenommenen Punkte je noch *einen* anderen mit bestimmt, wie für die (hyperelliptische) Curve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt, wo die adj. Curven $(n-3)$. Ordnung zerfallen, für eine gewisse (hyperelliptische) Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten u. s. w.

Die nachfolgenden Betrachtungen haben übrigens für Curven, für welche die Zahl $p=0$ oder $=1$ ist, keine Bedeutung mehr, weil im 1. Fall überhaupt keine, im 2. keine Schaaren von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung existiren. Es gelten dann jedoch analoge Betrachtungen für adj. Curven $(n-2)$. Ordnung.

***) Auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten $(p=4)$ nehme man

Man kann das Vorstehende dahin zusammenfassen, dass *von den nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkten einer adjungirten Curve s. Ordnung mit $f=0$:*

I. *Für $s>n-3$: höchstens p durch die übrigen*

$$ns-\Sigma\alpha_i\cdot i(i-1)-p=n\alpha+p-2 \quad (\alpha=s-(n-3))$$

Schnittpunkte bestimmt sind;

II. *für $s=n-3$: höchstens $p-1$ durch die übrigen $p-1$ Schnittpunkte bestimmt sind.*

Legt man also durch gewisse Punkte einer Curve $f=0$ eine adjungirte Curvenschaar, so wird für die durch diese Curven ausgeschnittene Schaar $g_Q^{(q)}$

im Fall I., $q \geqq Q-p$

im Fall II., $q \geqq Q-p+1$

sein.

Wir setzen hierbei keineswegs voraus, dass die adjungirten Curven nicht zerfallen. Darum ist es aber auch nicht nothwendig, Curven von niederer, als der $(n-3)$. Ordnung besonders zu betrachten, da man solche durch Zufügen einer festen Curve immer zu einer adjungirten Curve der $(n-3)$. oder höherer Ordnung machen kann.

§ 4.

Adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung.

Im vorstehenden § werden Ungleichungen zwischen dem oberen und unteren Index einer linearen Schaar hergeleitet, welche den Fall, wo die adjungirte Schnittcurve von der $(n-3)$. Ordnung ist, vor den übrigen Fällen in gewisser Weise auszeichnet. In diese Ungleichungen ging eine bloss von den Eigenschaften von f abhängige Zahl ein, die wir nach dem Vorgang von Riemann, Clebsch u. A. mit dem Buchstaben p bezeichnet haben und in der Folge mit Clebsch das *Geschlecht* der Curve f nennen wollen, indem wir uns vorbehalten, an späterer Stelle die eigentliche Bedeutung dieser Zahl zu erörtern.

In diesem § soll nun die Umkehrung des am Ende des vorigen entwickelten Satzes bewiesen werden, nämlich: *dass eine q-fach unendliche Schaar $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen von je Q Punkten* (unter welchen sich auch solche befinden können die für alle Gruppen *dieselben* sind) *immer dann durch eine Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann, wenn:*

$$q \geqq Q-p+1, \quad \text{also } Q-q \leqq p-1$$

$p-1=3$ Punkte in einer Geraden durch einen der Doppelpunkte an, dann bilden die 3 übrigen Schnittpunkte noch eine $g_3^{(1)}$. Wegen anderer Beispiele vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, S. 213.

*ist**). Wir werden diesen Satz für alle durch Curven von höherer als der $(n-3)$. Ordnung ausgeschnittenen Gruppen zu beweisen haben.

Ist zunächst $Q \leqq 2p-2$, so kann man zeigen:

1. Dass der Satz richtig ist für jede Schaar $g_Q^{(q)}$, wenn er richtig ist für Schaaren $g_{Q-1}^{(q-1)}$, immer vorausgesetzt, dass $q \geq Q-p+1$ ist.

2. Ist sofort klar, dass derselbe für $Q \leq p-1$ und $q=0$ giltig ist; denn durch eine vollständig bestimmte *einzelne* Gruppe von $p-1$ und weniger Punkten lässt sich immer eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung legen.

Um nun auch die erste Behauptung zu erweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Schaar $g_{Q-1}^{(q-1)}$ durch Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, die Schaar $g_Q^{(q)}$ durch ein System $(n-2)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn man nehme irgend eine Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ der letzten Schaar, lege durch einen beweglichen Punkt a derselben eine Gerade A und durch die übrigen $Q-1$ Punkte, welche eine Gruppe $\Gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ bilden, eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung C_{n-3}. Das Residuum R der Gruppe Γ_Q, welches aus den weiteren $2p-2-(Q-1)$ Schnittpunkten von C_{n-3} und den übrigen $n-1$ Schnittpunkten der Geraden A besteht, ist zugleich Residuum für jede Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$, weil es dies für eine derselben ist (§ 1.); die Schaar $g_Q^{(q)}$ wird somit in der That durch eine Schaar von durch R gehenden Curven $(n-2)$. Ordnung C'_{n-2} ausgeschnitten, die noch zudem Alle in die Gerade A und eine Curve $(n-3)$. Ordnung zerfallen, weil $n-1$ Punkte einer Curve $(n-2)$. Ordnung nicht auf einer Geraden liegen können, ohne dass Zerfallen eintritt. Betrachtet man nun statt der Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ irgend eine beliebige der corresidualen $g_Q^{(q)}$, *welche den Punkt a nicht enthält*, die aber gleichfalls durch eine der zerfallenden C'_{n-2} muss ausgeschnitten werden können, so erkennt man, dass, da A unbeweglich ist, dies nur durch eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geschehn kann. Q. e. d.

Der vorstehende Beweis macht an keiner Stelle Gebrauch von der Ungleichung $Q < 2p-2$. Er gilt demnach auch für den Fall, dass dieselbe nicht erfüllt ist. Weil nun aber adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung nicht existiren, welche in mehr als $2p-2$ Punkten die Curve f (wenn diese nicht zerfällt) schneiden, so schliesst man rückwärts, *dass Punktgruppen $G_Q^{(q)}$ von mehr als $2p-2$ Punkten, für*

*) Nach diesem Satz lässt sich beispielsweise jede Schaar $g_3^{(1)}$ auf einer Curve 5 Ordnung mit 2 Doppelpunkten, für welche also $p=4$ ist, durch adjungirte *Kegelschnitte* ausschneiden. Soll aber ein Kegelschnittbüschel mit der Curve 5. Ordnung ausser den beiden Doppelpunkten noch 3 feste Schnittpunkte besitzen, so muss jeder Kegelschnitt der Schaar zerfallen. Daher sind die einzigen Gruppen $g_3^{(1)}$ auf der Curve diejenigen beiden Schaaren, welche von den durch die Doppelpunkte gehenden Strahlen ausgeschnitten werden.

welche $q \geqq Q - p + 1$ *ist, nicht existiren;* und die eingangs des Beweises ausgesprochene Beschränkung $Q \leqq 2p - 2$ fällt somit von selbst weg.

Die zuletzt ausgesprochene Bemerkung kann man zum Beweis eines wichtigen Satzes gebrauchen. Gruppen G_Q, welche von einer adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, bilden, dem § 3. zufolge, mindestens eine $(Q - p + 1)$-fach unendliche Schaar; also Gruppen G_{2p-2} *mindestens* eine ∞^{p-1}-Schaar. Wir wollen nun zeigen, dass sie zugleich *höchstens* eine solche Schaar bilden. Denn bildeten sie z. B. eine ∞^p-Schaar, so könnte man durch Hinzunahme eines willkührlichen *festen* Punktes β von f eine Schaar $g_{2p-1}^{(p)}$, (in deren Gruppen allen der Punkt β vorkäme) herstellen, welche indess zufolge der oben gemachten Bemerkung nicht existiren kann. Somit giebt es auch keine Schaar $g_{2p-2}^{(p)}$, und umsoweniger solche $g_{2p-2}^{(p+1)}$, u. s. w. *Es giebt also nur eine* $(p-1)$*-fach unendliche Schaar d. h. nur* p *linear von einander unabhängige adjungirte Curven* $(n-3)$. *Ordnung.*

§ 5.

Der Riemann-Roch'sche Satz.

Wir haben oben in § 3. solcher Punktgruppen gedacht, für welche $q > Q - p + 1$ ist. Dieselben werden nach dem vorstehenden § immer durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten, besitzen indess auch diesen gegenüber einen speciellen Charakter, wie wir unten näher sehen werden, indem die Lage der einzelnen Punkte einer jeden Gruppe der Schaar nicht beliebig ist, sondern durch Einige derselben die Uebrigen bestimmt sind. Wir wollen daher eine solche Punktgruppe, welche einer ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ angehört, für die

$$q > Q - p + 1$$

ist, eine „*Specialgruppe*", und die Schaar selbst eine „*Special-Schaar*" nennen. Beispiele folgen unten (vgl. z. B. § 10.). Die Systeme der Specialgruppen auf einer gegebenen Curve lassen sich nun in merkwürdiger Form zu je zweien in der Weise gruppiren, dass jedes aus dem anderen eindeutig abgeleitet werden kann.

Der Satz, nach welchem diese Gruppirung vorgenommen werden kann, ist von Riemann in Nr. 5 seiner Abel'schen Functionen (Borch. Journ. Bd. 54) für den Fall $q = 1$ gegeben, und von Roch (Borch. J. Bd. 64) auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege allgemein bewiesen worden. Riemann hat in Nr. 3 seiner Abhandlung „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen" einen zweiten Beweis des Satzes, ebenfalls für einen speciellen Fall: $Q = p$, $p - 1$ und $p - 2$ gegeben, der sich indess ohne wesentliche Aenderung auf den allgemeinen Fall ausdehnen lässt. Ausserdem kann man den Satz aus den Differentialgleichungen des Umkehrproblems, für den unbestimmten Fall desselben, schliessen. Wir geben hier zwei algebraische Beweise. In seiner allgemeinen Form lautet der Riemann-Roch'sche Satz folgendermassen:

Legt man durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ einer Special-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf der Curve f, für welche $q = Q - p + 1 + r$ sein mag (r irgend eine ganze positive Zahl $< p - 1$), *eine adjungirte Curve* $(n - 3)$. *Ordnung, so schneidet dieselbe in* $2p - 2 - Q = R$ *weiteren Punkten, die ihrerseits wiederum einer Special-Schaar* $g_R^{(r)}$ *von Gruppen* $G_R^{(r)}$ *angehören, für welche* r *den aus obiger Gleichung sich ergebenden Werth* $r = R - p + 1 + q$ *besitzt*)*.

Zum Beweis dieses Satzes füge man zu jeder Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$ noch r festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu *jeder* Gruppe *dieselben*) Punkte von $f = 0$ hinzu. Man erhält so eine Schaar $g_{Q+r}^{(q)}$, für welche die Anzahl der willkührlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen. Durch eine Gruppe $G_{Q+r}^{(q)}$ dieser Schaar lässt sich noch eine adjungirte Curve $(n - 3)$. Ordnung legen, weil die Bedingung des § 4. erfüllt ist. Da nun aber die Lage jener r festen Punkte beliebig ist, so muss sich durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch mindestens eine ∞^r-Schaar von adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung legen lassen, und die durch dieselben ausgeschnittenen Gruppen $G_R^{(\varrho)}$ bilden mindestens eine ∞^r-Schaar, d. h. es ist ϱ mindestens $= r$. Dass aber andererseits ϱ nicht $> r$ sein kann, erkennt man aus der Umkehrung der eben angestellten Betrachtungen, indem man von einer Gruppe $G_R^{(\varrho)}$ ausgeht. Man gelangt so zu Gruppen $G_Q^{(\varkappa)}$, wo wieder $\varkappa$ mindestens $= Q - p + 1 + \varrho$ sein muss. Dieselben können aber nach dem Restsatze von der Schaar $g_Q^{(q)}$ nicht verschieden sein. Man hat somit $\varkappa = q$, daher auch $\varrho = r$, q. e. d.

Corollar. *Haben R Punkte G_R auf einer nichtzerfallenden Curve f eine solche specielle Lage, dass die durch sie gehenden adjungirten**) Curven* $(n - 3)$. *Ordnung noch eine* $q\,[> (p - 1 - R)]$ *-fach unendliche Schaar bilden* (q *eine positive ganze Zahl*), *wobei sie die Schaar* $g_Q^{(q)}$

---

*) Auf einer Curve 7. Ordnung mit 9 Dp. ($p = 6$) kann man (wie weiter unten gezeigt wird) Gruppen von 4 Punkten G_4 so bestimmen, dass durch sie noch eine ∞^2-Schaar von adjungirten C_4 geht. Diese schneiden in einer Schaar $g_6^{(2)}$, die demnach eine Specialschaar ist. Nach dem oben ausgesprochenen Satz *gehört aber dann auch die Gruppe* G_4 *einer Special-Schaar* $g_4^{(1)}$ *an; d. h. durch jede Gruppe der Schaar* $g_6^{(2)}$ *lässt sich noch ein* ∞^1*-Büschel von adj.* C_4 *legen.*

**) Was unter „adjungirten Curven" für den Fall einer Curve f mit besonderen Singularitäten zu verstehen ist, wird unten (§ 7.) näher definirt. Mit Rücksicht hierauf haben wir den obigen Satz gleich in seiner *allgemeinen* Form ausgesprochen.

ausschneiden ($Q = 2p - 2 - R$), *so gehört die Gruppe* G_R *einer* ∞^r-*Schaar* $g_R^{(r)}$ *an, für welche* $r = R - p + 1 + q = p - 1 - Q + q$ *ist, indem durch jede Gruppe* $\Gamma_Q^{(q)}$ *der Schaar* $\gamma_Q^{(q)}$ *noch eine* ∞^r-*Schaar von adjungirten Curven* ($n - 3$). *Ordnung hindurchgeht, welche* $g_R^{(r)}$ *ausschneidet.*

Dies Corollar folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satze. Dasselbe ist insofern weniger allgemein, wie dieser, als es nur von Punktgruppen handelt, die von Curven ($n - 3$). Ordnung ausgeschnitten werden. Freilich folgt aus § 4., dass dies die *allgemeinsten Specialgruppen* sind. Man kann indess auf diese Erkenntniss, wie überhaupt auf den Inhalt der §§ 4. und 5. verzichten und doch das vorstehende Corollar allgemein beweisen.

Man füge nämlich zu der Gruppe G_R eine andere G_{q+1} von $q+1$ beliebigen Punkten und bilde daraus die Gruppe G_{R+q+1}. Alsdann kann man eine mindestens r-fach unendliche Schaar von Gruppen Γ_{r+p} (es ist $r + p = R + q + 1$) finden, welche G_{R+q+1} corresidual ist. Denn man lege durch diese Gruppe eine adjungirte Curve C (von genügend hoher Ordnung), und durch deren übrige Schnittpunkte und r willkührliche Punkte eine andere adjungirte C' derselben Ordnung; so ist (§ 3.) die Gruppe Γ_p der p noch übrigen Schnittpunkte unmittelbar [oder doch, in besonderen Fällen, nach willkührlicher Annahme einer Anzahl, etwa von π, weiteren Punkten] vollständig bestimmt, und bilden mit jenen r zusammen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r)}$ [in jenen Fällen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$]. Man kann nun zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen die Gruppe G_{q+1}, welche ein Bestandtheil von G_{R+q+1} ist, ein solcher auch von Γ_p und somit von Γ_{r+p} ist. Alsdann bilden aber die übrigen $r + p - (q+1) = R$ Punkte von Γ_{r+p} noch eine r-fach [$(r+\pi)$-fach] unendliche Schaar, welche der Gruppe G_R corresidual ist, und von einer ∞^r [$\infty^{r+\pi}$-] Schaar von adjungirten Curven ($n - 3$). Ordnung ausgeschnitten wird. — Dass aber auch in jedem besonderen Fall $\pi = 0$ sein muss, erkennt man, indem man noch die obigen Betrachtungen auf die erhaltenen Gruppen $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$ anwendet, von denen man denn zu einer mindestens $\infty^{q+\pi}$-Schaar gelangt, welche aber mit der ∞^q-Schaar $\gamma_Q^{(q)}$, von der wir oben ausgingen, übereinstimmen muss. Man schliesst so $\pi = 0$.

Es muss noch bewiesen werden, dass die Gruppe G_{q+1} ein Bestandtheil von Γ_p ist [wie man auch jene π Punkte angenommen hat]. Nach dem Restsatz ist die Wahl der Curve C ohne Einfluss auf die Lage der p Punkte Γ_p [nachdem die π Punkte fest angenommen sind], es genügt somit, für eine specielle Schnittcurve nachzuweisen, dass *ein beliebiger Punkt* x von G_{q+1} in Γ_p auftritt; was von diesem gilt, gilt von allen $q+1$. Lässt man aber C aus einer durch x gehenden beliebigen Geraden und einer durch die übrigen q Punkte von G_{q+1} und durch G_R gehenden adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung bestehn (letztere ist nach Voraussetzung construirbar), so enthält auch die an die Stelle der obigen Curve $(n-2)$. Ordnung C' tretende Curve diese Gerade, und somit den Punkt x als Bestandtheil (während die zu C' gehörige Curve $(n-3)$. Ordnung durch die $r+\pi$ willkührlichen Punkte anderweitig bestimmt ist). Der Punkt x ist somit ein Bestandtheil der Gruppe Γ_p. Q. e. d.

Die Gleichungen des Riemann-Roch'schen Satzes lassen sich in folgende übersichtliche Gestalt bringen:

$$Q+R=2p-2;$$
$$Q-R=2q-2r.$$

Zu jedem Werthepaar Q, q, welches der Bedingung genügt, einer Special-Punktgruppe der erwähnten Art zuzugehören, lässt sich demnach nur *ein* Werthepaar R, r der entsprechenden Schaar $G_R^{(r)}$ bestimmen.

Selbstverständlich sind indess nur solche Special-Schaaren $G_Q^{(q)}$, $G_R^{(r)}$ in dieser Weise eindeutig einander zugeordnet, für welche zwischen den Q, bez. R Punkten der einzelnen Gruppen *keine weiteren Bedingungen* bestehen, als die, dass sie einer gegebenen unter ihnen *corresidual* sind, mit anderen Worten: solche Schaaren, welche *alle* Gruppen umfassen, die einer unter ihnen corresidual sind.

§ 6.

Die eindeutigen Transformationen.

Die im Vorstehenden entwickelten Sätze über Punktgruppen gewinnen ein weiteres Interesse durch das Verhalten der Punktgruppen bei der Ueberführung der gegebenen Curve in eine andere, welche ihr eindeutig und Punkt für Punkt (wie der Curve die Evolute) entspricht.

Hat man die Gleichung einer algebraischen Curve in homogenen Coordinaten: $f(x_1x_2x_3)=0$ oder kürzer $f(x)=0$ gegeben, so kann man die Coordinaten eines Punktes y einer neuen Curve mit denen eines Punktes x der gegebenen in Beziehung setzen durch die Relationen:

(1) $$y_1:y_2:y_3=\Theta_1(x):\Theta_2(x):\Theta_3(x),$$

wo die $\Theta(x)$ ganze homogene Functionen der Coordinaten des Punktes x sind. Eliminirt man dann mit Hilfe der Gleichung:

(2) $$f(x)=0$$

die Coordinaten x, so gelangt man zu der Gleichung einer Curve

(3) $$F(y)=0,$$

welche der gegebenen eindeutig entspricht, sofern nicht zwischen den Coefficienten der Θ und der Gleichung $f=0$ solche Relationen bestehen, dass die eindeutige Darstellung der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ durch die y aus den Gleichungen (1), (2) unmöglich wird. Wir werden unten ein Beispiel dieses Ausnahmefalls, von dem wir zunächst abstrahiren, kennen lernen.

Den *beweglichen* Schnittpunkten der ∞^2-Curvenschaar:

$$\alpha_1 \Theta_1 + \alpha_2 \Theta_2 + \alpha_3 \Theta_3 = 0$$

entsprechen alsdann die Schnittpunkte der Geraden

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

mit $F(y) = 0$, deren Grad somit gleich der Anzahl jener beweglichen Punkte der Schaar ist. Setzt man in (3) die aus (1) sich ergebenden Werthe der y ein, so muss wiederum (2) bis auf einen Factor zum Vorschein kommen, wenn Eindeutigkeit stattfindet, man hat also:

$$F(\Theta(x)) = M \cdot f(x) .$$

Wird auf der Curve $F(y) = 0$ durch eine Schaar von linearen (adjungirten) Curven:

$$\Sigma \alpha \Phi(y) \equiv \alpha_1 \Phi_1(y) + \alpha_2 \Phi_2(y) + \cdots \alpha_{q+1} \Phi_{q+1}(y) = 0$$

eine Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen ausgeschnitten, und transformirt man jene Schaar mit Hilfe der Gleichungen (1) in:

$$\Sigma \alpha \Phi(\Theta(x)) = 0,$$

so besitzt diese, somit auch die transformirte Schaar von Punktgruppen, dieselbe Mannigfaltigkeit wie jene; zugleich muss die Anzahl der beweglichen Punkte für beide Schaaren übereinstimmen, wie gleichfalls aus dem Begriff der eindeutigen Transformation folgt, und man kann demnach sagen, *dass bei eindeutiger Transformation einer Curve f eine lineare ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf f von Q beweglichen Punkten in eine ebensolche $\gamma_Q^{(q)}$ auf F übergeht.*

Ein bemerkenswerthes Verhalten bei eindeutiger Transformation von f zeigen die adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung. Punktgruppen, welche von diesen Curven auf $f=0$ ausgeschnitten werden, gehen in solche über, welche aus der transformirten Curve F (wenn diese vom Grad N ist) von adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, oder, wie man sagen kann:

Die Anzahl p der verschiedenen linear von einander unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung, die zu einer gegebenen Curve n. Ordnung gehören (eine Zahl, die wir als *„Geschlecht“* dieser Curve bezeichnet haben), *ist für alle durch eindeutige Transformation auseinander herleitbaren Curven dieselbe.*

Sei p das Geschlecht von f, P das von F. Wäre nun $P > p$, so liesse sich zu einer Gruppe G_P von P auf $f=0$ beliebig angenommenen Punkten immer eine corresiduale mindestens ∞^{P-p}-Schaar finden (vgl. § 3.), welcher nach Obigem auf $F=0$ eine ebensolche entspräche. Für diese wäre für $P>p$ zugleich die Bedingung erfüllt, dass die Mannigfaltigkeit der Schaar $\geqq P-P+1$, also $\geqq 1$ ist, so dass sich (§ 3.) dieselbe durch adjungirte Curven $(N-3)$. Ordnung ausschneiden liesse. Eine solche Curve besitzt aber nur $P-1$ Bestimmungsstücke (§ 4.), und es wäre demnach unmöglich, mehr als $P-1$ Punkte einer der corresidualen Gruppen, also mehr als $P-1$ Punkte von G_P anzunehmen, während wir P willkürlich angenommen haben.

Somit liegt in der Annahme $P>p$ ein Widerspruch. Von der umgekehrten Annahme $p>P$ lässt sich das nämliche auf demselben Wege nachweisen, es bleibt also nur $P=p$*).

Der hiermit bewiesene fundamentale Satz von der Erhaltung des Geschlechtes einer Curve bei eindeutiger Transformation lässt den invarianten Charakter der adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung deutlich hervortreten und auf einen engen Zusammenhang dieser Curven mit den Invarianten bei eindeutiger Transformation schliessen. Wir werden weiter unten noch hiervon zu sprechen haben.

Man überzeugt sich übrigens leicht davon, dass die p linear unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung ausser in den singulären Punkten auf f keinen Allen gemeinsamen Punkt besitzen. Denn wäre dies der Fall, so bildeten die übrigen $2p-3$ Schnittpunkte eine Schaar von Gruppen $G_{2p-3}^{(p-1)}$, deren jede nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte einer (s. d. Corollar): $(p-1)-(2p-3)+(p-1)=1$-fach unendlichen Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung liefern könnte, was der Annahme, dass auch der $(2p-2)$. Punkt fest ist, widerspräche.

Sind die Gleichungen von p linear unabhängigen der Curve $F(y)=0$ adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung, in beliebiger Auswahl:

$$\Phi_1(y)=0, \quad \Phi_2(y)=0 \cdots \Phi_p(y)=0,$$

ebenso die von ebensolchen $(n-3)$. Ordnung, welche $f(x)=0$ adjungirt sind:

---

*) Ein gleichfalls die invarianten Eigenschaften der Curven $(n-3)$. Ordnung benutzender Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Nachweis der Identität:

$$D(x)\cdot\Phi\big(\Theta(x)\big)\equiv M\cdot\varphi(x)+C\cdot f(x),$$

wo $\varphi(x)=0$ eine zu $f(x)=0$, $\Phi(y)=0$ eine zu $F(y)=0$ adjungirte Curve ist, $D(x)$ die Functionaldeterminante der Transformationsausdrücke $\Theta(x)$ nach den Coordinaten x; M der oben ebenso bezeichnete Factor von $f(x)$ ist (vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen § 14. (S. 52) und Nöther, Math. Annalen II., S. 314 und VI., S. 351.

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \cdots \varphi_p(x) = 0,$$

so kann man, wenn f und F sich eindeutig entsprechen, immer die unbestimmten Factoren α so bestimmen, dass man hat:

$$\Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \cdots : \Phi_p(y) = \Sigma \alpha_{1k}\varphi_k(x) : \Sigma \alpha_{2k}\varphi_k(x) : \cdots : \Sigma \alpha_{pk}\varphi_k(x),$$

wo

$$k = 1, 2, \cdots p.$$

Von diesen Gleichungen können je zwei die Transformationsgleichungen (1) ersetzen, was von Bedeutung ist, wenn es sich z. B. darum handelt, zu untersuchen, ob zwei gegeben vorliegende Curvengleichungen eindeutig in einander transformirbar sind.

Die durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnittenen Gruppen $G_Q^{(q)}$ haben (§ 3.) die Eigenschaft, dass für einen gegebenen Werth von q die Zahl Q möglichst klein wird.

Handelt es sich also darum, die Formeln (1) so zu bestimmen, dass, für $q = 2$, Q, d. h. der Grad der transformirten Curve, ein möglichst niedriger wird, so hat man adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung an Stelle der Θ zu setzen. Wir werden weiter unten die näheren Bedingungen angeben, denen diese Curven dann noch zu unterwerfen sind, wollen aber hier eines Ausnahmefalles gedenken, für welchen eine *eindeutige* Transformation durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung unmöglich wird.

Wenn nämlich auf der Curve f je zwei Punkte einander derart zugeordnet sind, dass (wie dies z. B. bei Curven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt der Fall ist) *alle* adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welche durch einen beliebigen Punkt gehn, damit von selbst durch einen oder mehrere diesem zugeordnete Punkte gehen, so wird die eindeutige Umkehrung der Formeln (1) auch mit Hilfe von f in der Weise unmöglich, dass sich die Variabeln x durch die y nicht mehr rational, sondern nur noch mit Hilfe von Wurzelzeichen (oder überhaupt Irrationalitäten) ausdrücken lassen, und das Entsprechen hört auf eindeutig zu sein.

Man überzeugt sich indess leicht davon, dass man höhere Irrationalitäten, als Quadratwurzeln (also den Uebergang zu *mehr* als zweideutig entsprechenden Curven) vermeiden kann. Denn wenn jedem *beliebig* gegebenen Punkte α auf f etwa i Punkte in der Weise entsprechen könnten, dass alle adjungirten Curven durch α auch durch jene Punkte hindurchgingen, so könnte man, da eine solche Curve $p-1$ Bestimmungsstücke besitzt, $(i+1)(p-1)$ Schnittpunkte durch Annahme von $p-1$ bestimmen, während es doch nur $2(p-1)$ Schnittpunkte giebt. Daher ist i höchstens $= 1$.

In der angegebenen Weise kann also höchstens *ein* weiterer Punkt einer Curve durch einen gegebenen mit bestimmt sein. Die Curven, für welche dies eintritt, sind nun aber keine anderen als die *hyperelliptischen*. Denn diese sind definirt durch die Bedingung, eine Schaar $g_2^{(1)}$ zu besitzen. Die beiden Punkte einer einzelnen Gruppe $g_2^{(1)}$ sind dann nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte von ∞^{p-2} adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, d. h. jede durch einen beliebigen Punkt von $f=0$ gelegte adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geht noch durch einen zweiten, durch den ersten eindeutig bestimmten Punkt. Sämmtliche adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung schneiden f also in Punktepaaren, von welchen es eine ∞^1-Schaar giebt. Soll nun die Transformation einer hyperelliptischen Curve $f=0$ eine eindeutige sein, so muss man demnach adjungirte Curven von mindestens der $(n-2)$. Ordnung an Stelle der 3 Ausdrücke $\Theta=0$ setzen. Legt man denselben noch die Bedingung auf, durch $n+p-4$ feste Punkte von $f=0$ zu gehen, so sind noch 2 Bestimmungsstücke derselben willkührlich, durch welche dann noch $p+2$ weitere Schnittpunkte bestimmt sind. Die Ordnung der transformirten Curve ist demnach $=p+2$, und zwar besitzt die letztere einen p-fachen Punkt, wie der Restsatz ergiebt. Alle Curven vom Geschlecht p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, können ähnlich durch adjungirte Transformationscurven $\Theta=0$ von der $(n-3)$. Ordnung mit $p-3$ gemeinsamen Basispunkten, die indess beliebig auf f angenommen sein können, auf eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden.

§ 7.

Berücksichtigung der singulären Punkte.

Wir haben bisher bezüglich der Singularitäten der Curve f die Voraussetzung gemacht, dass die einzelnen Zweige vielfacher Punkte *getrennt* seien.

In diesem § wollen wir zeigen, wie man durch eine von Nöther*) angegebene Methode in den Stand gesetzt wird, diese Beschränkung aufzuheben.

Wendet man auf eine Curve f, die einen singulären Punkt in P besitzt, eine beliebige eindeutige Transformation an, für welche P ein gemeinsamer Punkt der 3 Transformationscurven Θ ist, so entsprechen dem j-fachen Punkt von f, der in P fallen mag, j Punkte der transformirten Curve F, welche getrennt liegen, wenn die j Zweige von P getrennte Tangenten besitzen. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, der Punkt P liege in dem Eckpunkte des Coordinatendreiecks $x_1=0$, $x_2=0$, und die angewandte Transformation sei die quadratische:

*) Gött. Nachrichten 1871, S. 217.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 .$$

Dann entspricht dem Punkt $x_1 = x_2 = 0$ das Werthsystem:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{0}{0} = \frac{dx_2}{dx_1}; \quad y_3 = 0 .$$

Den j Zweigen in P entsprechen somit die j Punkte $\frac{y_1}{y_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$ auf der Geraden $y_3 = 0$. Fallen zwei oder mehrere Tangenten in P zusammen (also in Rückkehrpunkten), so berührt F die Gerade $y_3 = 0$ ein- oder mehrfach.

Weil nun durch das Zusammenrücken zweier oder mehrerer Schnittpunkte dieser Geraden mit F den F adjungirten Curven keine Bedingung auferlegt wird, so haben auch die diesen Curven entsprechenden f adjungirten Curven wegen des einfachen Zusammenfallens mehrerer Tangenten der Zweige des vielfachen Punktes keinerlei Bedingungen zu genügen, und in die frühere Definition der Zahl p, der adjungirten Curven etc. ist keine Modification aufzunehmen.

Es kann nun aber weiter vorkommen, dass die Schnittpunkte der Geraden $y_3 = 0$ mit F, welche den Zweigen von P entsprechen, sich selbst theilweise oder alle wieder zu singulären Punkten vereinigen. Sie entsprechen alsdann Punkten von derselben Beschaffenheit, welche man als in P hereingerückt sich vorstellen muss, und welche durch die Transformation von P selbst und von einander getrennt werden. Die Fortsetzung des Transformationsverfahrens löst auch diese entweder in einzelne Punkte oder in einfachere Singularitäten auf. Ein gänzliches Auflösen der Singularitäten der Curve wird aber darum unmöglich, weil sich bei der Transformation immer wieder neue vielfache Punkte bilden, welche man indess, durch solche Wahl der Seiten des Transformationsdreiecks, dass dieselben ausser in den Eckpunkten des Dreiecks keine Singularitäten der zu transformirenden Curve enthalten, von allen aussergewöhnlichen Eigenthümlichkeiten frei erhalten kann.

Hat man auf diesem Wege die einzelnen vielfachen Punkte, aus welchen sich eine höhere Singularität P auf f zusammensetzt, erkannt, so ist damit die Curve auf eine solche, wie wir sie in dem Früheren vorausgesetzt haben, zurückgeführt, und es ist nunmehr leicht, das Verhalten einer adjungirten Curve in dem Punkt P so zu fixiren, dass alle Sätze, die wir oben abgeleitet haben, namentlich also auch der Restsatz, noch giltig sind. Wäre nämlich in Bezug auf F eine Curvenschaar durch eine äquivalente mit Hülfe des Restsatzes zu ersetzen, so hätte diese zweite Schaar, was die besonderen singulären Punkte auf $y_3 = 0$ betrifft, nur der Bedingung zu genügen, auch in diesen Punkten F adjungirt zu sein. Die quadratische Transformation zeigt nun sogleich, dass, wenn es sich darum handelt, in Bezug auf f eine Curvenschaar durch eine äquivalente zu ersetzen, das Verhalten dieser zweiten Schaar in dem singulären vielfachen Punkte ebenfalls keiner andern Bedingung unterliegt, als der, ein adjungirtes zu sein; nämlich dass die zweite Schaar in dem zusammengerückten vielfachen Punkte sich ebenso verhalten muss, als ob die Punkte getrennt lägen. Die adjungirte Curve muss also in jedem j-fachen Punkte von f einen $(j-1)$-fachen Punkt besitzen; wenn noch weiter ein i-facher Punkt mit diesem vereinigt liegt, in demselben noch einen $(i-1)$-fachen Punkt etc. In einem Selbstberührungspunkt von f muss demnach die adjungirte Curve die gemeinsame Tangente berühren; ebenso in einem Rückkehrpunkt 2. Art, u. s. w.

Berücksichtigt man in dieser Weise die einzelnen Bestandtheile eines höheren singulären Punktes, so behalten der Restsatz und damit alle im Vorhergehenden entwickelten Sätze ihre uneingeschränkte Giltigkeit.

II. Theil.

§ 8.

Begrenzung der nachfolgenden Betrachtungen.

Die im I. Theil dieses Aufsatzes entwickelten Sätze über Punktgruppen auf einer Curve bedurften ihrer Natur nach keiner besonderen Voraussetzungen über den Grad der Allgemeinheit der Curve, auf welche sich dieselben bezogen.

Wenn wir in diesem II. Theil (mit Ausnahme der geometrischen Anwendung des letzten § 18.) zur Aufsuchung der im § 4. definirten Special-Punktgruppen auf einer gegebenen Curve f übergehn, so bedarf es einer Unterscheidung zwischen solchen Curven, welche die allgemeinsten ihres Geschlechtes sind und Curven mit speciellen Moduln, d. h. Curven, auf welchen Schaaren von Gruppen existiren, die nicht auf jeder ihres Geschlechtes ebenfalls vorkommen. Während diese letzteren Schaaren zur Charakterisirung der besonderen Curve von vornherein mit gegeben sein müssen, führt die Aufsuchung jener Special-Gruppen auf der allgemeinen Curve zu algebraischen Problemen, mit denen wir uns insbesondere im Nachfolgenden beschäftigen werden.

Beispielsweise sind demnach von der folgenden Untersuchung ausgeschlossen die im Früheren schon als „hyperelliptische“ bezeichneten Curven, welche Schaaren $g_2^{(1)}$ besitzen. Ausgeschlossen sind ferner alle Curven, deren Ordnungszahl *unter* einer gewissen von p abhängigen Zahl m liegt (wo m später bestimmt werden wird), Curven, welche eine Schaar $g_{m-i}^{(2)}$ $(i>0)$ besitzen, die in der allgemeinen Curve vom Geschlecht p nicht vorkommt. — Durch eine eindeutige Transformation kann, wie wir gesehen haben, *jede* Curve vom Geschlecht

p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, in eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden. Schliessen wir also jene aus, so können wir unsere Betrachtungen auf Curven $(p+1)$. Ordnung vom Geschlecht p, oder vielmehr auf die durch beliebige eindeutige Transformation aus ihnen hervorgehenden Curven beschränken. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass auch für Curven mit speciellen Moduln je eine Reihe der Resultate ihre Giltigkeit behalte.

§ 9.

Das Problem der Special-Gruppen.

Die algebraische Aufgabe, auf einer gegebenen Curve $f=0$, n. Ordnung mit je α_i i-fachen Punkten, die nun eine allgemeine ihres Geschlechtes sein soll, Schaaren von Special-Gruppen $G_R^{(r)}$ (für $r > R - p + 1$ und jedenfalls $r > 0$) aufzufinden, führt nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf die andere zurück, Gruppen G_R zu finden, durch die, als Basispunkte genommen, noch ∞^q adjungirte Curven $n-3$. Ordnung gelegt werden können, wo

$$q = r - (R - p + 1)$$

ist; und ebenso umgekehrt. Die letztere Aufgabe verallgemeinern wir noch zu folgender:

Gegeben sei eine ∞^t-Schaar von adjungirten Curven. Man soll auf $f=0$ R Punkte G_R so bestimmen, dass die durch sie gehenden Curven der Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden.

Die R Punkte sind demnach durch die Lage von $t-q$ unter ihnen eindeutig bestimmt.

Sei die Gleichung der ∞^t-Schaar:

$$0 = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_{t+1}\varphi_{t+1} \equiv \Phi\,.$$

Dieselbe erfüllt die R Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \Phi(x^{(1)}) = 0 \quad \Phi(x^{(2)}) = 0 \ \cdots \quad \Phi(x^{(R)}) = 0,$$

wo unter $x^{(1)}$ (homogene Coordinaten: $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$), $x^{(2)} \cdots x^{(R)}$ die Punkte der Gruppe G_R verstanden sind, für welche noch weiter die Gleichungen bestehn: $f(x^{(1)}) = 0 \cdots f(x^{(R)}) = 0$. Von jenen Gleichungen (A) sind zur Bestimmung der Verhältnisse der α nur $t-q$ verwendbar, weil aus je $t-q+1$ Jede eine identische Folge der Uebrigen sein soll. Aus dieser letzten Bemerkung folgt aber weiter, dass in dem aus den Coefficienten der α_i der Gleichungen (A) zu bildenden System:

$$\text{(B)} \qquad \left\|\begin{matrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_1(x^{(R)}) & \varphi_2(x^{(R)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(R)}) \end{matrix}\right\|,$$

sämmtliche $(t-q+1)$-gliedrige Determinanten verschwinden. Wie bekannt (vgl. Kronecker in Baltzer's Determinanten, 3. Aufl. S. 42) ist hierzu nothwendig, dass z. B. alle Determinanten von der Form:

$$\text{(C)} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(1)}) & \varphi_i(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(2)}) & \varphi_i(x^{(2)}) \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdots & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_1(x^{(t-q)}) & \varphi_2(x^{(t-q)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \varphi_i(x^{(t-q)}) \\ \varphi_1(x^{(k)}) & \varphi_2(x^{(k)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(k)}) & \varphi_i(x^{(k)}) \end{vmatrix},$$

wo

für i alle Werthe der Reihe $t-q+1,\ t-q+2,\ \cdots\ t+1,$
„ k „ „ „ „ $t-q+1,\ t-q+2,\ \cdots\ R$

zu setzen sind, *zugleich* verschwinden. Aus dem System der so erhaltenen Lösungen sind dann nur noch die überflüssigen, welche nicht zugleich auch *sämmtliche* $(t-q+1)$ gliedrigen Determinanten des Systems (B) befriedigen, auszuscheiden.

Nun liefert aber das Schema (C)

$$(q+1)(R-t+q)$$

von einander unabhängige Gleichungen mit R Unbekannten (die Coordinaten der R Punkte sind je durch die Gleichungen: $f(x^{(i)})=0$ verbunden). Von diesen bleiben also willkührlich:

$$R-(q+1)(R-t+q),$$

eine Zahl, die jedenfalls nicht negativ sein darf:

$$\text{(D)} \qquad R \geqq (q+1)(R-t+q).$$

Für den Fall, dass die Curven $\Phi=0$ von der $(n-3)$. Ordnung sind, für welche dann der Riemann-Roch'sche Satz gilt, erhält man noch eine andere Grenze für die Möglichkeit des Problems. Wir wollen dieselben bestimmen unter der weiteren Voraussetzung, dass $t=p-1$ ist, indem wir hiermit zu der früher gestellten Aufgabe, Gruppen $G_R^{(r)}$, für welche $r>R-p+1$ ist, zu finden, zurückkehren. Die Determinanten (C) werden in diesem Fall $(p-q)$-gliedrige, und von den R Punkten, welche in den durch das Verschwinden dieser Determinanten des Systems (B) gelieferten Gleichungen auftreten, sind noch:

$$R-(q+1)(R+q-p+1)$$

willkührlich annehmbar. Diese Zahl kann indess nicht beliebig klein angenommen werden. Denn wenn jene R Punkte noch einer ∞^r-Schaar von Gruppen angehören sollen, so darf die obige Zahl nicht unter r herabsinken, wenn das Problem keinen Widerspruch (nicht Null Lösungen) enthalten soll, oder man hat:

(E) $$R-(q+1)\cdot r \geqq r,$$
und hieraus:
(E') $$R \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1},$$
oder auch:
(E'') $$p \geqq (q+1)(r+1).$$
Die Differenz der rechten und linken Seite dieser Ungleichungen:
(F) $$\tau = R-(q+1)r-r = R(r+1)-r(r+p+1) = p-(q+1)(r+1)$$
kann nunmehr beliebig auf Null herabgedrückt werden. Diese Zahl τ giebt (vgl. § 2., wo τ dieselbe Bedeutung hat) die Anzahl derjenigen noch willkührlich annehmbaren Punkte einer Gruppe G_R an, welche, nachdem die übrigen r willkührlichen fest angenommen sind, aus einem ∞^τ-System von ∞^r-Schaaren, die alle den gegebenen Bedingungen genügen, eine endliche Anzahl solcher ∞^r-Schaaren ausscheidet.

Den Gruppen G_R sind durch den Riemann-Roch'schen Satz Gruppen $G_Q^{(q)}$ residual zugeordnet in der Weise, dass, wenn R und r der obigen Ungleichung (E') entsprechend angenommen sind, sich Q und q aus den Gleichungen bestimmen:

$$Q+R = 2(p-1),$$
$$Q-R = 2(q-r).$$

Jeder *Schaar* $g_R^{(r)}$ von corresidualen Gruppen G_R entspricht somit eine ebensolche $g_Q^{(q)}$ und umgekehrt, und zwar so, dass jede Gruppe der einen Schaar jeder der anderen residual ist. Nun giebt es nach Vorstehendem ∞^τ-Schaaren $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$; mithin ebenso viele Schaaren $g_Q^{(q)}$, welche *einzeln* den $g_R^{(r)}$ entsprechen. Die ∞^τ-Schaaren von Gruppen G_R haben die Eigenschaft, dass keine mit der andern eine vollständige Gruppe gemein hat (da irgend eine Gruppe die Schaar, der sie angehört, vollständig und eindeutig bestimmt); Aehnliches gilt von den Schaaren $G_Q^{(q)}$.

Für $\tau = 0$ findet man aus den Gleichungen (A), bez. aus dem Verschwinden der Determinanten (C), zu r gegebenen Punkten eine *endliche* Anzahl α von Gruppen von je $R-r = r(q+1)$ Punkten (von denen jede mit den r zusammen eine Gruppe $G_R^{(r)}$ bildet), wenn man eine Gleichung α^{ten} Grades löst, deren Coefficienten noch die Coordinaten von r willkührlichen Punkten enthalten. Alle möglichen Gruppen $G_R^{(r)}$ theilen sich demnach hierbei in α-Schaaren, welche den α Wurzeln dieser Gleichung zugeordnet sind, und, von einander völlig getrennt, auch nicht durch unendlich kleine Veränderungen (continuirlich) in einander übergeführt werden können. Den α Schaaren von Gruppen $G_R^{(r)}$ sind alsdann ebensoviele Schaaren von Gruppen $G_Q^{(q)}$ auf $f=0$ als Residuen eindeutig zugeordnet, und umgekehrt. Die Aufsuchung dieser Schaaren führt somit auf eine Gleichung desselben

Grades wie die der $G_R^{(r)}$; die Anzahl der Lösungen ist für beide Probleme gleich gross, und die Lösungen der beiden Gleichungen gehen eindeutig aus einander hervor, wenn gleich die Probleme vom algebraischen Standpunkte als völlig verschiedene erscheinen.

Ist dagegen τ von Null verschieden, so findet ein derartiges Entsprechen zweier bestimmter Probleme nicht mehr statt. Denn existirt auch eine endliche Anzahl von Gruppen $G_R^{(r)}$ zu $r+\tau$ gegebenen Punkten, so führen diese durch den Riemann-Roch'schen Satz auf Gruppen $G_Q^{(q)}$, welche zwar q, aber keine $q+\tau$ Punkte gemeinsam haben können. Nimmt man demnach $q+\tau$ Punkte beliebig an, und sucht zu diesen die Gruppen $G_Q^{(q)}$, so sind sie zwar in endlicher, aber von jener Zahl verschiedener Anzahl vorhanden. Wohl aber existiren, wie oben bemerkt, zu gegebenen r Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_R^{(r)}$, welchen zu beliebig gegebenen q Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_Q^{(q)}$ eindeutig entsprechen.

§ 10.

Grenzfälle.

Die Gleichung (E) des vorigen §. giebt die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten an, für welche eine Special-Gruppe $G_R^{(r)}$ bei gegebenem r auf der Curve $f=0$ bestehen kann. Wir ordnen, der Uebersichtlichkeit halber, diese Zahlen in einer Tabelle an, indem wir die zugehörigen Werthe von q und Q für die Residualgruppen hinzufügen. Die letzte Colonne enthält noch die Zahl τ der Mannigfaltigkeit der Doppelschaar von Gruppen $G_R^{(r)}$, $G_Q^{(q)}$ (vgl. den vorstehenden §.). Sollen ganze Zahlen für R u. s. w. zum Vorschein kommen, so muss man auf die Gestalt der Zahl p Rücksicht nehmen. π sei eine ganze positive Zahl.

für $p=$	r	Minimal-werth von R	Zugehöriger Werth von q	Q	τ
2π	1	$p-\pi+1$	$\pi-1$	$p+\pi-3$	0
$2\pi+1$					1
3π	2	$p-\pi+2$	$\pi-1$	$p+\pi-4$	0
$3\pi+1$					1
$3\pi+2$					2
4π	3	$p-\pi+3$	$\pi-1$	$p+\pi-5$	0
$4\pi+1$					1
$4\pi+2$					2
$4\pi+3$					3

etc.

So existiren z. B. auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$) zwei von einander verschiedene ∞^1-Schaaren von Gruppen G_3, ausgeschnitten von den Geradenbüscheln durch je einen der Doppelpunkte. Sind auch diese beiden *Geraden*schaaren durch die Gerade, welche beide Doppelpunkte verbindet, stetig in einander überführbar, so ist dies doch mit den durch sie ausgeschnittenen *Gruppen* keineswegs der Fall. — Die beiden Schaaren lassen sich übrigens zugleich als durch den Riemann-Roch'schen Satz einander zugeordnete Schaaren aufzufassen. Denn sie gehören einer ∞^2-Schaar von Kegelschnitten an, welche durch die beiden Doppelpunkte und einen *beliebigen* weiteren Punkt der Curve 5. Ordnung gelegt werden kann.

Auf der Curve 6. Ordnung C_6 mit 5 Doppelpunkten $a_1 \cdots a_5$ existiren zu 2 willkührlichen Punkten der Curve 5 Special-Gruppen $G_4^{(1)}$. Denn transformirt man die Curve mittelst der ∞^2 Curven 3. Ordnung, welche durch die a und die 2 Punkte b gelegt werden können, so erhält man wieder eine Curve 6. Ordnung, die 5 Doppelpunkte haben muss, und deren auf der Curve C_6 entsprechende Punktepaare bilden mit $b_1 b_2$ zusammen die Basispunkte für Curven 3. Ordnung, die C_6 in Schaaren $g_4^{(1)}$ schneiden. Man erhält auf C_6 im Ganzen ∞^1 Systeme von Schaaren $g_4^{(1)}$. Eine derselben besteht z. B. aus den Gruppen, welche von dem durch a_1 gehenden Geradenbüschel ausgeschnitten werden; die Residualschaar derselben sind die Gruppen $G_4^{(1)}$, welche von dem durch $a_2 a_3 a_4 a_5$ gehenden Kegelschnittbüschel ausgeschnitten werden.

§ 11.

Ueber die Lösung des Problems der Special-Gruppen.

Wir haben oben (§ 9.) das Problem der Special-Punktgruppen in algebraischer Form aufgestellt, ohne weiter zu untersuchen — abgesehen von der in Formel (E) desselben § aufgestellten Bedingung — ob auch die angegebenen Gleichungen (mit ebensovielen Unbekannten), auf welche das Problem führt, keinen Widerspruch enthalten, oder, auf der anderen Seite, ob dieselben nicht etwa unendlich viele Lösungen zulassen. Auch die letztere Möglichkeit, welche der Zahl τ einen anderen Werth ertheilen würde, als wir oben (§ 9.) festgestellt, muss, wenn die späteren Anwendungen zulässig sein sollen, ausgeschlossen sein.

Man hat nun aber zweierlei Wege, um die Widerspruchslosigkeit und die Endlichkeit der Anzahl von Lösungen eines algebraischen Problems festzustellen: entweder, indem man aus der Discussion der Gleichungen selbst den numerischen Ausdruck für die Anzahl der Lösungen ableitet, oder indem man an dem durch irgend welche besondere Annahme der Constanten specialisirten Problem, bei welchem man sich von der Existenz von Lösungen direct überzeugen kann, nachweist, dass dasselbe nicht unendlich viele Lösungen besitzt. Denn wenn durch Specialisirung der Constanten eine etwa vorhandene Functionalbedingung zwischen den Gleichungen (vermöge deren im allgemeinen Problem *keine* Lösungen vorhanden sind) identisch erfüllt wird, so wird die Anzahl der Gleichungen vermindert und die der Lösungen somit unendlich.

Durch die Formel (E, § 9.):

$$R - r(q + 1) \geqq r$$

haben wir bereits alle diejenigen Probleme als unmöglich ausgeschlossen, bei welchen die *beiden* Ungleichungen:

$$[\mathrm{A}] \qquad r > R - r(q + 1) \geqq 0$$

zugleich erfüllt sind, Probleme, für welche nach dem Riemann-Roch'schen Satz sich im Voraus erkennen liess, dass sie unendlich viele Lösungen besitzen müssen, wenn sie *eine* haben, die also im Allgemeinen *Null* Lösungen besitzen.

Was nun zunächst die Anwendung der *ersten* der oben erwähnten Methoden auf unser Problem angeht, so scheinen die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Discussion des Gleichungssystems, auf welches das angegebene Problem führt, entgegenstellen, dermalen noch unüberwindlich. Diese Discussion und die Aufstellung der Anzahl der Lösungen ist bisher nur für einige der hierher gehörigen Probleme möglich gewesen*), jedoch in der Weise, dass sich aus den erhaltenen Formeln auf die für eine wichtige Classe der obigen Probleme bestehende allgemeine Formel schliessen lässt.

Diese Formeln beziehen sich auf den Fall der Special-Gruppen $G_R^{(1)}$, für den das Problem als solches auch von Clebsch und Gordan (Abel'sche Functionen § 61.) schon algebraisch formulirt worden war; und zwar handelt es sich um Gruppen G_R, durch die noch $\infty^q = \infty^{p-R}$ adjungirte Curven gehn. Jene Formeln umfassen somit den von Riemann (Abel'sche Functionen § 5.) betrachteten Fall ($r = 1$ der Tabelle), in welchem R zugleich möglichst klein, nämlich $= \frac{1}{2}(p+2)$, bez. $= \frac{1}{2}(p+3)$ wird, während q bez. $= \frac{1}{2}(p-2)$ und $= \frac{1}{2}(p-3)$ wird.

Bezeichnet man die Anzahl der Lösungen, welche die R-gliedrigen Determinanten eines Systems von der Form (B, § 9.), das aus R Horizontalreihen und $(R + i)$ Verticalreihen ($i \geqq 0$) besteht, sämmtlich

---

*) S. Brill, Math. Annalen, Bd. VI. S. 61 ff. (Einen in der Formel für (7) (S. 63) befindlichen Fehler verbessere man nach dem Druckfehler-Verzeichniss des VI. Bandes.)

zum Verschwinden bringen (wobei die Punkte $x^{(i)}$ immer auf $f=0$ zu liegen haben), mit $(R+i)_R$, ist ferner M die Anzahl der nicht *allen* Curven $\varphi=0$ gemeinsamen Schnittpunkte *einer* derselben mit f (für den erwähnten Fall eines Minimalwerthes von R ist im System (B) $t=p-1$, oder $i=p-R=q$ zu setzen, sowie $M=2p-2$), ist endlich:

$$k=M-R+1, \quad (\text{für jenen Fall } =2p-1-R=Q+1)$$

und:

$$\binom{l}{m}=\frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots m},$$

so hat man für die Anzahl der gemeinsamen Lösungen:

$$[\mathrm{B}] \quad (R+i)_R=\binom{k}{i+1}-\binom{p}{1}\binom{k-2}{i-1}+\binom{p}{2}\binom{k-4}{i-3}-\cdots$$

$$\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{i}{2}}\cdot\binom{p}{\frac{1}{2}i}\cdot\binom{k-i}{1}\cdots\cdot(i\,\text{gerade})\\ (-1)^{\frac{i+1}{2}}\cdot\binom{p}{\frac{1}{2}(i+1)}\cdot\cdots\cdot(i\,\text{ungerade}).\end{cases}$$

Die directe Ableitung dieser Formel sei für eine andere Gelegenheit vorbehalten, indem es hier genügen möge, darauf hinzuweisen, dass a. a. O. bereits ein strenger Beweis derselben für die Fälle $i=0,1,2,3$ gegeben worden ist. Wir wollen jedoch hervorheben, dass sich eine leicht ausführbare Verification dieser Formel [B] aus der Bemerkung ergiebt, dass für den (in der Tabelle des § 10. nicht mehr enthaltenen) Fall: p ungerade und:

$$r=1, \quad R=\frac{p+1}{2}, \quad i=q=\frac{p-1}{2}, \quad k=\frac{2p-3}{2},$$

die Zahl der Lösungen $(R+i)_R$ *Null* sein muss, weil für diesen Fall, welches auch der Werth von p sein mag, die *beiden* obigen Ungleichungen [A]

$$r>R-r(q+1)\geqq 0$$

erfüllt sind. In der That erhält man Null, wie man leicht erkennt, wenn man die Formel, welche für diesen Fall aus [B] hervorgeht, durchaus in i anschreibt, und dann, vom ersten Glied anfangend, addirt. Die Summe der $\lambda+1$ ersten Glieder der rechten Seite lässt sich nämlich alsdann durch die Formel darstellen:

$$[\mathrm{B}'] \qquad \binom{2i}{\lambda}\binom{3i-2\lambda}{i-2\lambda+1}\frac{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda)}{i(i+1)},$$

wie man durch einen Schluss von λ auf $\lambda+1$ beweist. Dieser Ausdruck wird aber $=0$ für $\lambda=\frac{i+1}{2}$ und $\lambda=\frac{i}{2}$ (für welche Werthe der zweite Klammerausdruck in [B'] bez. den Werth 1 und $2i$ erhält), d. h. wenn man die Summe (für ungerade, bez. gerade i) bis zum letzten Glied erstreckt. Q. e. d.

Mit der Formel [B.] ist nun die Frage sowohl nach der Möglichkeit, wie nach der Bestimmtheit des Problems für $r = 1$ und $p > 1$ erledigt, indem dann der Ausdruck $(R + i)_R$ eine positive, ganze Zahl ergiebt, sofern nur die Constanten, die in den Gleichungen auftreten, allgemeine Werthe besitzen.

In gleicher Weise ist durch Vermittlung des Riemann-Roch'schen Satzes die Existenz der residualen Punktgruppen $G_Q^{(q-p+2)}$, insbesondere auch der Maximalgruppen, durch welche noch eine einfach unendliche Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung möglich ist, und für die $Q = \frac{1}{2}(3p-6)$, bez. $\frac{1}{2}(3p-7)$ und $q = \frac{1}{2}(p-2)$, bez. $= \frac{1}{2}(p-3)$ ist, erwiesen, was durch directe Inangriffnahme des betr. algebraischen Problems ungleich schwieriger gewesen wäre.

Der zweite im Früheren erwähnte Weg, um die Möglichkeit der auftretenden algebraischen Probleme zu erkennen, nämlich der der Untersuchung der Curve unter Voraussetzung einer Lösung des Problems, führt in vielen einzelnen Fällen zum Ziel, ohne dass sich deshalb eine zusammenfassende Methode angeben liesse. Wir erwähnen hier nur der Bestimmung der Gruppen $G_6^{(2)}$ für $p = 6$, die, an der Curve 6. Ordnung mit 4 Doppelpunkten ausgeführt, auf die Zahl 5 der Lösungen sogleich führt.

§ 12.

Ueber eine indirecte Bestimmungsweise der Minimal-Gruppen $G_R^{(1)}$.

Wenn eine Special-Gruppe $G_R^{(1)}$ aus der kleinsten Anzahl $R = \frac{1}{2}(p+2)$, bez. $\frac{1}{2}(p+3)$, von Punkten besteht, welche nach der Tabelle des § 10. noch für $r = 1$ zulässig ist, so kann man das Problem, die Anzahl α der zu 1 gegebenen Punkte möglichen Gruppen G_R zu finden, auf ein anderes zurückführen, welches zuweilen leichter zu lösen ist als das erstere, und umgekehrt.

Sei zunächst p gerade, also $R = \frac{1}{2}(p+2)$. Wir nehmen an, es seien 2 verschiedene der α zu einem gegebenen Punkt construirbaren Gruppen G_R gegeben, so gehört die Gruppe G_{2R}, welche sich aus beiden zusammensetzt, einer ∞^3-Schaar an, welche durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn seien $\varphi - \varkappa\,\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\,\psi' = 0$ die beiden Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welche bez. die Schaaren, welchen jene beiden Gruppen G_R angehören, ausschneiden, so wird die Gruppe G_{2R} ausgeschnitten von einer Curve der ∞^3-Schaar:

$$\mu \cdot \varphi\psi + \nu \cdot \varphi'\psi' + \varrho \cdot \varphi\psi' + \sigma \cdot \varphi'\psi = 0,$$

ist also eine Gruppe $G_{2R}^{(3)}$. Eine solche kann aber nach dem Satze des § 4. durch eine Curve $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, welche in noch $p-4$ weiteren Punkten schneidet, die ihrerseits wiederum einer ∞^0-Schaar angehören, wie sich sofort aus dem Riemann-

Roch'schen Satz ergiebt. Zu jedem Paar von Gruppen G_R, die einem Paar von Wurzeln jener Gleichung α. Grades entsprechen, gehört sonach eine einzige Gruppe Γ_{p-4}. Andererseits ordnen sich jeder einzelnen der α Gruppen G_R die $\alpha - 1$ übrigen durch Vermittlung von $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} zu. Geht man also von einer *einzelnen* Gruppe G_R aus, und fragt nach *denjenigen Gruppen* G_{p-4}, *welche mit* G_R *zusammen die Basispunkte einer* ∞^1-*Schaar von adjungirten Curven* $(n-3)$. *Ordnung bilden*, so muss man zu jenen $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} gelangen. Dass aber diese Aufgabe andererseits auch in der algebraischen Form, in welche dieselbe nach § 9. gebracht werden kann, eine völlig bestimmte und endliche ist, geht daraus hervor, dass die für diesen Fall in Betracht kommende Ungleichung (D) des § 9. (in welcher $R = p - 4$, $q = 1$, $t = \frac{1}{2}(p-2)$ zu setzen ist) erfüllt ist. Das Problem, die Gruppen Γ_{p-4} zu einer gegebenen Gruppe G_R zu finden, *enthält somit eine Lösung weniger*, als das Problem, die Gruppen G_R selbst zu finden. Diese Bemerkung kann in vielen Fällen für die indirecte Bestimmung der Anzahl der Lösungen des einen oder des anderen Problems von Nutzen sein; und es ist interessant, dass auch die Gleichung $(\alpha - 1)$. Grades, welche nach Ausscheidung eines Factors übrig bleibt, noch diese geometrische Deutung zulässt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für ungerade p anstellen. Dort existirt zu jeder Gruppe G_R noch eine endliche Anzahl von Gruppen Γ_{p-5} von $p - 5$ Punkten, die mit G_R zusammen die Basispunkte einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung bilden, welche noch in weiteren Gruppen G_R schneiden. Durch eine einzelne Gruppe Γ_{p-5} geht eine ∞^4-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die f in Punktgruppen schneiden, unter welchen die von $(\varphi - \varkappa\varphi')(\psi - \lambda\psi') = 0$ ausgeschnittenen enthalten sind. Es giebt aber ∞^2 solcher Gruppen Γ_{p-5}, die einander nicht corresidual sind.

§ 13.

Normalcurven.

Die im § 11. (am Ende) erwähnten Maximal-Punktgruppen $G_Q^{(Q-p+2)}$ sind es, welche Riemann zur Transformation der Curve f auf eine Normalform benutzt hat: eine Curve $(p+2)$. Ordnung (bez. $(p+3)$. Ordnung) mit zwei $\frac{1}{2}(p+2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p+3)$-)fachen Punkten und noch $\frac{1}{4}p(p-4)$ (bez. $\frac{1}{4}(p-1)^2$) Doppelpunkten. Die Punkte einer solchen Gruppe sind nämlich die Basispunkte eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welches in der Minimalzahl $R = \frac{1}{2}(p+2)$ (bez. $\frac{1}{2}(p+3)$) von beweglichen Punkten die Curve f schneidet. Seien $\varphi - \varkappa\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ zwei solche Büschel, deren Basispunkte jedoch nicht corresidual sein dürfen. Diese Gleichungen, mit $f = 0$ verbunden, ergeben in den neuen Coordinaten

$\varkappa$, λ die Riemann'sche Normalcurve, deren vielfache Punkte in $\varkappa = \infty$ und $\lambda = \infty$ liegen. Man kann indess, indem man $\varkappa = \frac{x_1}{x_3}$, $\lambda = \frac{x_2}{x_3}$ setzt, die beiden Büschel auch mittelst:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi\psi' : \varphi'\psi : \varphi'\psi' : \varphi\psi,$$

wo noch:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

ist, zur Transformation von f in eine auf dem Hyperboloid $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ gelegene Raumcurve $(p+2)$. (bez. $(p+3)$.) Ordnung benutzen (die ebenfalls noch wirkliche Doppelpunkte erhält). Diese Transformationen sind eindeutig, d. h. die beiden Büschel $\varphi - \varkappa\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ haben immer nur je *einen* beweglichen Punkt gemein; denn die Basispunkte sollen nicht corresidual sein, und man kann immer Curven schon direct angeben, bei welchen dann jene Eigenschaft wirklich eintritt, wie bei der oben genannten Normalcurve selbst, bei denen die beiden Geradenbüschel in den vielfachen Punkten dieselbe besitzen. (Ausgenommen sind die Fälle $p = 1$ und $p = 2$.)

Projicirt man diese Raumcurve von einem ihrer Doppelpunkte aus auf eine Ebene, so ergiebt sich eine Normalcurve p. (bez. $(p+1)$.) Ordnung mit zwei $\frac{1}{2}(p-2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p-1)$-)fachen Punkten und $\frac{1}{4}p(p-4) - 1$ (bez. $\frac{1}{4}(p-1)^2 - 1$) Doppelpunkten. (Ausgenommen von dieser Transformation ist noch der Fall $p = 4$.)

Diese Umformung ist identisch mit einer quadratischen Transformation der Riemann'schen Normalform, deren drei Fundamentalpunkte in die beiden vielfachen Punkte und einen Doppelpunkt derselben gelegt werden. Es ist noch zu bemerken (worauf wir später zurückkommen werden), dass für die Transformation von Curven mit ungeradem p in jedem der beiden Büschel noch $\tau = 1$ willkührliche Punkte zur Bestimmung der betreffenden Schaar vorhanden sind, denen entsprechend noch zwei willkührlich zu bestimmende Parameter zur Verfügung stehen.

Wie der Fall $r = 1$ der obigen Tabelle zur Transformation von f auf eine Curve führt, bei der Geradenbüschel existiren, welche in Gruppen von möglichst wenigen beweglichen Punkten schneiden, so dient der Fall $r = 2$ zur Transformation von f auf eine Curve, bei der die ∞^2-Schaar der Geraden der Ebene in möglichst wenigen Punkten schneidet, also zur Transformation auf die *Normalcurve niedrigster Ordnung.* Man hat zu diesem Zwecke nur die durch eine der dort angegebenen G_Q gehenden adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung den Geraden der Ebene entsprechen zu lassen. Die Normalcurve wird also eine Curve der Ordnung $p - \pi + 2$, mit $\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi) - p$ Doppelpunkten, wo $p = 3\pi$, bez. $= 3\pi + 1$ und $= 3\pi + 2$ gesetzt ist. Diesen 3 Fällen entsprechend hat man zur Wahl der Schaar der Transformationscurven keinen, einen oder zwei Parameter zur Verfügung.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl der Schaaren (wenn $\tau + r$ Bestimmungsstücke gegeben sind), von denen eine hier zur Transformation angewendet wird, ist noch nicht aufgestellt. Die niedrigsten Fälle, insbesondere für $p = 6, 7, 8$, sind indess schon mittelst der obigen Formel ([B] in § 11.) erledigt. Zu beachten ist jedoch, dass die Gleichungen, auf welche das Problem führt, von derselben Art sind, wie die im Vorigen betrachteten, dass also die Schwierigkeit der Abzählung nur eine formelle ist, und dass eine Formel von der Art der [B] offenbar auch hier existiren muss. Da die bisher bekannten Formeln für wachsende p rasch steigende Zahlenwerthe ergeben, für $p = 6, 7, 8$ aber hier schon ganze, steigende Zahlen erhalten werden, so dürfen wir annehmen, dass die hier gültige Formel diese Eigenschaft ebenfalls besitzen muss.

Man kann zufügen, dass man auch hier durch besondere Betrachtungen an speciellen Curven einzelne dieser Zahlen leicht erhalten kann, die nach dem früher Gesagten alsdann auch für die allgemeinen Fälle ihre Geltung behalten.

Für den vorliegenden Fall gilt dasselbe, was wir im Früheren über die Verwendbarkeit der betreffenden Schaaren zu *eindeutigen* Transformationen bemerkt haben; es lassen sich schon immer zu speciellen Curven wirklich existirende Schaaren angeben, welche die zur Transformation erforderlichen Eigenschaften besitzen, wie z. B. die Geraden bei der Normalcurve.

In ähnlicher Weise kann man die weiteren Curvenschaaren: $r = 3, 4, \cdots$, welche die Tabelle liefert, zur Transformation von f in Normalcurven benutzen, welche in einem Raum von bez. $3, 4, \cdots$ Dimensionen gelegen sind. So ist also in einem Raum von 3 Dimensionen *die Raumcurve niedrigster Ordnung* bei gegebenem p, welche einer ebenen Curve mit allgemeinen Moduln (s. den folgenden §) entspricht, von der Ordnung $p - \pi + 3$, wo $p = 4\pi$, bez. $= 4\pi + 1$, $4\pi + 2$, $4\pi + 3$ gesetzt ist. Für $p = 4\pi$ kann dabei, abgesehen von den linearen Transformationen im Raum, die Transformation nur auf eine endliche Anzahl von Arten stattfinden.

§ 14.

Die Moduln einer Classe von algebraischen Curven. Riemann's Bestimmungsweise.

Riemann hat die algebraischen Curven vom Geschlechte p in *Classen* geordnet. In dieselbe Classe gehören alle diejenigen Curven, welche sich eindeutig in einander transformiren, also auch aus irgend einer Curve der Classe durch eindeutige Transformation ableiten lassen. Eine Classe eindeutig einander entsprechender Curven hängt von einer bestimmten Anzahl von stetig veränderlichen Parametern ab, die als *Moduln* dieser Classe bezeichnet werden (Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 12 in Bd. 54 des Journ. Crelle-Borchardt). Wenn ein genau definirter algebraischer Process*) auf irgend eine der eindeutig in einander transformirbaren Curven der Classe angewendet, auf dieselben Werthe einer endlichen Anzahl von Parametern führt, und *umgekehrt* durch diese Werthe auch eine solche Classe von Curven eindeutig oder doch endlich vieldeutig bestimmt ist, so sind diese Parameter als die Moduln dieser Classe zu betrachten. Dieselben haben somit Invarianten-Eigenschaft bei eindeutiger Transformation. Je nach der Art der im Voraus zu definirenden algebraischen Operation erhält man verschiedene Systeme von Grössen als Moduln.

Offenbar muss nach dem, was (in § 6.) über den Invarianten-Charakter der adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung gesagt worden ist, dieser Process sich auf das *Verhalten der Curve f zu diesen Curven* beziehen. Wir werden mehrere solcher Operationen (bei welchen es gleichgültig ist, von welcher Curve der Classe man ausgeht) nach einander anführen und zeigen, *dass dieselben sämmtlich auf die Zahl $3p-3$ von Moduln führen.*

Des Zusammenhangs wegen erwähnen wir zunächst die bisher in dieser Frage angestellten Betrachtungen, und beginnen mit dem Verfahren Riemann's. Dasselbe bezieht sich auf das Verhalten von f zu einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die man durch $p-2$ feste Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-2}$ von f gelegt hat. Die ∞^1-Schaar der Gruppen von p weiteren Schnittpunkten hängt von $p-2$ Parametern ab, denn durch Veränderung der Lage auch nur eines der $p-2$ Punkte x geht die ∞^1-Schaar in eine andere ihr nicht corresiduale, das Büschel also in ein nicht äquivalentes über. In dem Büschel giebt es $4p-2$ Curven, welche f berühren. Denn die Berührungspunkte werden durch den Schnitt von f mit der Jacobi'schen Curve (Functionaldeterminante) von f, φ, φ' (wenn $\varphi - \lambda\varphi' = 0$ das Büschel ist) bestimmt, einer Curve von der Ordnung $3n-9$, die f in jedem der i-fachen Punkte $3i(i-1)$-punktig, in jedem der Punkte x 2-punktig trifft. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{4p-5}$ irgend $4p-5$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse der $4p-2$ Parameter λ dieser Curven; dieselben werden zwar von linearen Transformationen unabhängig, aber im Allgemeinen noch Functionen der $p-2$ Punkte x sein. Unter der Voraussetzung nun, dass es $p-2$ unter ihnen giebt, welche als von einander unabhängige Functionen der Coordinaten dieser $p-2$ Punkte auftreten, kann man, mittelst Elimination dieser Coordinaten, $(4p-5)-(p-2) = 3p-3$ Functio-

*) An sich sind hierbei auch transcendente Operationen (von denen Riemann ebenfalls Gebrauch macht) zulässig. Wir sehen jedoch in unseren algebraischen Betrachtungen von denselben ab.

nen der Doppelverhältnisse angeben, welche unabhängig sind von dem speciellen Büschel, das hier benutzt wird. Nimmt man den Riemann'schen, freilich transcendenten (aber auch leicht direct algebraisch durchführbaren (siehe unten)) Nachweis hinzu, dass sich zu beliebigen Werthen der λ_i eine *endliche**) Zahl von Classen in einander transformirbarer Curven finden lässt, so kann man also die $3p-3$ Functionen der λ_i als Moduln ansehn.

Wäre die erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, wären also die Coordinaten der $p-2$ Punkte nur in weniger als $p-2$ Combinationen in den Gleichungen enthalten, so würde die Zahl der Moduln $3p-3$ übersteigen. Wie sich diese Zahl in der That in speciellen Fällen modificiren kann, zeigt z. B. der Fall der hyperelliptischen Curven. Irgend ein Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung durch $p-2$ Punkte von f geht hierbei noch durch $p-2$ weitere feste Punkte von f, und in demselben giebt es nur $2p+2$ Berührungscurven. Da diese sämmtlichen Büschel hier weiter äquivalent sind, so sind die $2p-1$ Doppelverhältnisse der Parameter dieser Berührungscurven unabhängig von der Wahl der festen Punkte, und sie sind die $2p-1$ Moduln der hyperelliptischen Curve.

§ 15.

Modification der Riemann'schen Bestimmungsweise der Moduln.

Riemann hat den algebraischen Beweis der Zahl $3p-3$ fallen gelassen wegen der Schwierigkeit, die oben erwähnte Voraussetzung im allgemeinen Fall direct zu untersuchen. Wir wollen zeigen, dass diese Untersuchung in der That und zwar auf mehrfache Weise geleistet werden kann.

Wir schreiben der adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung vor, die gegebene Curve f in einem Punkte p-punktig zu treffen**). Diese Aufgabe hat, für $p>1$, immer eine endliche Anzahl von Lösungen. Denn sie kann nie, auch wenn man eine Lösung voraussetzt, *unendlich* viele Lösungen zulassen, da es alsdann ∞^p adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung geben müsste. Uebrigens kann die Zahl der Lösungen selbst*) durch die Formel angegeben werden:

*) Ist nämlich nur die Lage der Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche gegeben, so können zwar für *jede* der zugehörigen algebraischen Functionen diese Punkte als *dieselben* Blätter verbindend angesehen werden (s. Lüroth, Math. Ann. Bd. IV, S. 181 und Clebsch ibid. Bd. VI, S. 216), aber die Art des Zusammenhangs der einzelnen Blätter (die Lage der „Verzweigungsschnitte") kann immer noch eine wesentlich verschiedene sein. Vgl. Thomae, Borchardt's Journal Bd. 75, S. 224.

**) Dieser Weg ist vor längerer Zeit schon von Herrn Weierstrass eingeschlagen worden.

***) Vgl. Jonquières, in Borchardt's Journal Bd. 66, wo indess der vorlie-

$$(p-1)\,p\,(p+1).$$

Sei nun C_{n-3} eine der hier gefundenen Curven. Dieselbe trifft f noch in $p-2$ Punkten, welche wir als Basispunkte x der oben bezeichneten ∞^1-Schaar annehmen. Unter den $4p-2$ Berührungscurven dieser Schaar fallen jetzt $p-1$ in die C_{n-3} zusammen. Wir haben daher die $p-2$ Basispunkte des Büschels nun so bestimmt, dass von den $4p-5$ Doppelverhältnissen der Parameter λ_i $p-1$ gleiche Werthe annehmen. Die $3p-3$ Parameter, die hier noch die Classe bestimmen, sind die Moduln.

Dass umgekehrt durch die Werthe dieser $3p-3$ Parameter eine Classe endlich bestimmt ist, kann man gleichfalls algebraisch und zwar durch die folgenden, einer Schlussweise des Herrn Cayley (in den Proceedings of the London Math. Soc. Vol. I. Oct. 1865) nachgebildeten Betrachtungen zeigen. Die Curve, für welche man jene $3p-3$ Parameter als bekannt annehmen will, möge in folgender Weise aus f hergeleitet werden: Man transformire f durch eine ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die man durch $p-3$ der zuletzt bestimmten $p-2$ Punkte gehn lässt. Die transformirte Curve F wird von der $(p+1)$. Ordnung sein, mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten und der Eigenthümlichkeit, dass sie einen Punkt P besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig berührt, eine Eigenschaft, die $p-3$ Beziehungen zwischen den absoluten Invarianten der Curve darstellt. Die in P berührende Gerade trifft die Curve F noch in einem Punkte P', welcher der Scheitel des Geradenbüschels ist, der dem im Vorhergehenden gefundenen Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung für f entspricht. Nun hat diese Curve F, welche den Bedingungen genügt, von der $(p+1)$. Ordnung zu sein, $\frac{1}{2}p\,(p-3)$ Doppelpunkte zu besitzen, durch den Punkt P' hindurchzugehn und die gegebenen $3p$ Geraden des durch P' gehenden Büschels, und zwar eine derselben in der $(p-1)$. Ordnung, zu berühren, noch:

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(p+4)-\tfrac{1}{2}p\,(p-3)-(4p-2)-1=3$$

Constanten. Sei aber $F'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, in den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 geschrieben, und seien $x_1=0$, $x_2=0$ die Coordinaten des Punktes P'. Jede Curve $F=0$, die aus $F'=0$ durch die lineare Transformation, bei der $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$ an Stelle von x_3 in $F'=0$ eingesetzt wird, hervorgeht, erfüllt ebenfalls noch die Bedingungen und enthält 3 willkührliche Constanten, woraus folgt, dass alle Curven, welche den Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von

---

gende Fall adjungirter Berührungscurven nicht unmittelbar berücksichtigt ist, sowie Brill, Ueber zwei Berührungsprobleme, Math. Annalen IV, S. 530.

Curven F' durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. Wenn eine solche Curve F' noch irgend 3 durch lineare Transformation zerstörbare Bedingungen erfüllt (z. B. durch irgend 3 Punkte hindurchgeht, deren Coordinaten Zahlenwerthe sind), so besitzt sie nur $3p-3$ Constanten, welche dann bestimmte (irrationale) Functionen der $3p-3$ Parameter λ_i sind, was zu beweisen war. Statt dieser könnte man auch irgend $3p-3$ von einander unabhängige absolute Invarianten der Curve F (welche von den 3 in der Gleichung noch vorhandenen durch lineare Transformation zerstörbaren Constanten unabhängig sein müssen) oder endlich die $3p-3$ Constanten der Curve F' als Moduln definiren; die letztere Bestimmungsweise zeichnet sich vor den beiden anderen noch insofern aus, als sie, wenn die Coefficienten der Gleichung der Curve, also diese vollständig gegeben ist, die Classe *eindeutig* bestimmt.

Wir mögen hier anschliessend kurz den Einwand erledigen, den Herr Cayley in der oben citirten Note gegen die Zahl $3p-3$ erhoben hat. Sei eine der eben angeführten analoge Transformation von f auf eine Curve F mittelst einer ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die aber durch $p-3$ beliebige Punkte x_1, x_2, $\ldots x_{p-3}$ von f gehen, ausgeführt. Dann ergiebt sich durch den oben benutzten Schluss, dass $4p-6$ Functionen der $4p-5$ Parameter λ_i der Berührungscurven, welche durch noch einen festen Punkt x_{p-2} gehen, existiren, die unabhängig sind von der Wahl des Basispunktes x_{p-2}; denn die $4p-6$ absoluten Invarianten von F sind unabhängig von der Wahl des dem Punkt x_{p-2} entsprechenden Scheitels des Tangentenbüschels. Da nun die Punkte x_1, x_2, $\cdots$ x_{p-3}, x_{p-2} für den Curvenbüschel auf f, welcher dem Tangentenbüschel entspricht, symmetrisch eingehen, so schliesst Cayley, dass jene $4p-6$ Functionen unabhängig seien von der Lage der $p-2$ Punkte. Dies wäre gerechtfertigt, wenn auch die $4p-6$ Functionen selbst symmetrisch abhängen von den $p-2$ Punkten, wie die $4p-5$ Doppelverhältnisse, aus denen sie eben *durch Elimination eines der Punkte* sich ergaben. Dass diess in der That nicht der Fall ist, ergiebt sich gerade aus dieser Elimination. Hiernach aber erscheint es auch nicht erforderlich, zur Hebung des gedachten Widerspruchs auf den Begriff der imperfecten Invarianten (Cayley, Math. Annalen Bd. 3, S. 270) einzugehen.

§ 16.

Andere Bestimmungsweise der Moduln.

Ein Mittel anderer Art, um die von Riemann angedeutete Schwierigkeit zu erledigen, bildet die im Früheren (§ 11.) durchgeführte Untersuchung der auf einer allgemeinen Curve f liegenden Minimalgruppen $G_R^{(1)}$. Sie führt für gerade p direct auf die Zahl $3p-3$, für ungerade p bleibt noch *ein* weiterer Parameter zurück, dessen Beseitigung durch anderweitige Betrachtungen erfolgt.

Wir bedienen uns eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, dessen Basispunkte eine der Gruppen G_Q der Tabelle § 10., für $r=1$, bildet. In diesem Büschel giebt es noch $3p$, bez. $3p+1$ (für p gerade, bez. ungerade), Berührungscurven. Die $3p-3$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i dieser Curven sind, *wenn p gerade ist*, als *Moduln* aufzufassen. In der That gelangt man nur zu einer endlichen Anzahl von Werthen dieser $3p-3$ Grössen, wie auch die Basispunkte G_Q gewählt sein mögen; denn es giebt nur eine endliche Anzahl von Schaaren corresidualer Gruppen G_Q; die Curven äquivalenter Büschel entsprechen einander aber projectivisch, jene $3p-3$ Doppelverhältnisse sind daher für corresiduale Gruppen G_Q dieselben und nur für die Gruppen aus verschiedenen Schaaren verschieden. Weiterhin ist aber auch umgekehrt durch $3p-3$ gegebene Werthe der Doppelverhältnisse die Classe endlich vieldeutig bestimmt. Der algebraische Nachweis dieser Behauptung ist für $p \gtreqless 6$ identisch mit dem Nachweis, dass die (früher aus der Riemann'schen Normalform abgeleitete) Curve p. Ordn. mit zwei $\frac{1}{2}(p-2)$-fachen und $\frac{1}{4}p(p-4)-1$ Doppelpunkten, welche eben durch Benutzung zweier der Minimalschaaren $g_R^{(1)}$ entstanden ist (abgesehen von 8 durch die linearen Transformationen einzuführenden Constanten), noch $3p-3$ Constanten besitzt, welch' letzteres durch directe Abzählung bestätigt wird. Eine Curve der erwähnten Art genügt somit auf eine endliche Anzahl von Arten der Bedingung, dass $3p-3$ Doppelverhältnisse der Tangenten, die sich von einem ihrer vielfachen Punkte aus legen lassen, vorgeschriebene Werthe haben.

Ebenso hätte man auch die $3p-3$ absoluten Invarianten der Riemann'schen Normalform als die Moduln der aus ihr ableitbaren Classe bezeichnen können.

Für den Fall der *ungeraden p* hängen die $3p-2$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i der Berührungscurven des niedrigsten Büschels, welcher oben erwähnt wurde, von dem einen willkührlichen Parameter ab, der die Schaar der Basispunkte G_Q bestimmt ($\tau=1$ in der Tabelle).

Diesen Parameter kann man nun (ähnlich wie oben § 15.) dazu verwenden, um in den Berührungscurven zwei zusammenfallen zu lassen. Dies kann auf zwei verschiedene Arten geschehen, entweder so, dass in dem Büschel eine Curve vorkommt, die in 2 verschiedenen Punkten berührt, oder so, dass eine solche die gegebene Curve in 3 auf einander folgenden Punkten trifft, also osculirt. Diese Aufgaben sind also eine Verallgemeinerung der Aufgabe, die Doppeltangenten, bez. die Wendetangenten einer gegebenen Curve zu finden; auf welch letztere Aufgabe sie auch für $p=3$ direct zurückkommen. Algebraisch führt das Problem wieder auf ein simultanes System von Gleichungen von der Form des Systems (B. § 9.), wobei indess entweder zweimal zwei Punkte oder drei Punkte als unendlich benachbart anzunehmen sind. Für den Fall $p=5$ führen diese Aufgaben auf die Bestimmung der Werthe M_{22}, bez. M_{13} des Aufsatzes „über zwei Berührungsprobleme" (im IV. Bd. der Math. Ann. S. 548, Formel 6., und S. 547 unten) zurück, und ergeben beide 120 für die Zahl der Lösungen. — Wenn man für $p \geqq 5$ zwei solcher speciellen Büschel zur Transformation von f auf die § 13. erwähnte Normalform, eine Curve $F(p+1)$. Ordnung mit zwei $\frac{p-1}{2}$-fachen und $\frac{1}{4}(p-1)^2-1$ Doppelpunkten, anwendet, so erhält diese Curve die Eigenschaft, dass in dem Strahlenbüschel von jedem der beiden vielfachen Punkte aus sich je eine Gerade befindet, welche F doppelt, bez. in einem Wendepunkte berührt. Die Curve hat dann ebenfalls nur $3p-3$ Parameter, welche hier als die Moduln der aus F abgeleiteten Classe zu betrachten sind.

Man kann noch andere dem Riemann'schen analoge Wege zur Bestimmung der Moduln einschlagen, jedoch unter Anwendung von ∞^2-Schaaren adjungirter Curven. So ist oben bereits gezeigt worden, wie man die $p-3$ Basispunkte einer solchen Schaar auf f derart wählen kann, dass die transformirte Curve $(p+1)$. Ordnung einen Punkt besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig trifft.

Cremona hat (in einer gemeinschaftlich mit Casorati verfassten Note: osservazioni etc. Rend. Ist. Lombard. 1869) die $p-3$ Basispunkte so zu bestimmen versucht, dass in der transformirten Curve $(p+1)$. Ordnung von den $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten $p-3$ solche zu Rückkehrpunkten werden. Indess sind die Gleichungen, auf welche dieses Problem führt, zu verwickelt, um die Möglichkeit und Bestimmtheit des Problems im allgemeineren Fall untersuchen zu können*).

Die oben (§ 13.) aufgestellten *Normalcurven niedrigster Ordnung* von der $(p-\pi+2)$. Ordnung, wo p bez. $=3\pi$, $3\pi+1$ oder $3\pi+2$ ist, eignen sich gleichfalls zur Definition der Moduln. Diese Curven enthalten nämlich noch:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(p-\pi+2)(p-\pi+5)-\left\{\tfrac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1)-p\right\}-8&=\\=3p-3\ (\text{bez. } 3p-2,\ 3p-1)&\end{aligned}$$

Parameter. Für $p=3\pi$ sind diese Grössen direct als Moduln anzusehn. Für $p=3\pi+1$ (bez. $3\pi+2$) hat man dagegen für die Wahl der ∞^2-Schaar des Transformationscurven noch einen (bez. zwei) Parameter zur Verfügung. Diese Parameter wird man wieder so bestimmen, dass in der ∞^2-Schaar eine Curve enthalten ist, welche f in 4

*) Selbst der Fall $p=5$ kann noch nicht als auf diesem Wege erledigt angesehen werden, da, wie es scheint, in den bez. Betrachtungen der erwähnten Note ein Versehen mit untergelaufen ist.

(bez. 5) benachbarten Punkten trifft. Die Normalcurve enthält dann noch einen Punkt, in welchem eine Gerade 4- (bez. 5-) punktig berührt, eine Bedingung, die noch einen (bez. zwei) Parameter absorbirt. Für $p = 5$ kommt diese Bestimmung genau auf die oben gegebene zurück. Der allgemeine Fall lässt sich aber auch auf diesem Wege nicht völlig durchführen.

§ 17.

Die zu einer Classe gehörigen Raumcurven.

Wir benutzen die hier bewiesenen Constantenzählungen noch dazu, um die Gesammtheit der Raumcurven von gegebener Ordnung R mit gegebenem Geschlecht p, welche derselben ebenen Curve $f(x) = 0$ eindeutig entsprechen, welche also einer gegebenen *Classe* von algebraischen Curven zugehören, zu ermitteln.

In § 13. (am Ende) ist eine der Tabelle ($r = 3$) des § 10. entnommene untere Grenze für den Grad R einer Raumcurve, welche einer ebenen Curve f von gegebenem Geschlecht entspricht, angegeben. Sei diese Bedingung erfüllt, und seien die Transformationsgleichungen durch irgend eine ∞^3-Schaar von Curven φ in folgender Weise gegeben:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) : \varphi_4(x) ; \quad f(x) = 0 ,$$

so hat man zu bestimmen, wie viele Constanten (ausser den $3p - 3$ Parametern der Classe) durch die Transformation eingeführt werden können. Zunächst hängt jene ∞^3-Schaar der Transformationscurven ab von irgend einer der Gruppen $G_R^{(3)}$, in welchen f von einer derselben geschnitten wird. Für $R \leqq p + 2$ sind adjungirte Curven $(n - 3)$. Ordnung (n sei der Grad von f) zur Transformation zu benutzen. Es giebt aber (nach § 9., Formel (F.)) noch:

$$\tau = 4R - 3(p + 4)$$

solcher Schaaren; und durch lineare Transformation sind noch 15 weitere Constanten einzuführen. Für $R > p + 2$ (wo Curvenschaaren von höherer als der $(n - 3)$. Ordnung benutzt werden müssen, für welche denn erst p Punkte durch die übrigen bestimmt sind) hat man die R Punkte *einer* Gruppe ganz willkührlich zu nehmen, und diese bestimmen sodann eine ∞^{R-p}-Schaar. Für die erste der 4 Transformationscurven φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 kann man daher hier alle R Punkte willkührlich annehmen, für die zweite, dritte und vierte, die aus der ∞^{R-p}-Schaar zu nehmen sind, noch je $R - p$ Punkte, welche sie dann vollständig bestimmen. Endlich kann man diesen 3 Curven noch je einen willkührlichen Factor geben. Im Ganzen hat man also ebenfalls:

$$R + 3(R - p) + 3 = 4R - 3p + 3$$

Constanten eingeführt. Oder man kann sagen: die ∞^3-Schaar hängt ab von $(R-3)+3(R-p-3)$ Parametern, zu denen sodann noch die 15 Parameter der linearen Transformation hinzutreten.

Zu derselben Classe von algebraischen Curven mit allgemeinen Werthen der Moduln gehören demnach $\infty^{4R-3p+3}$ *Raumcurven vom Geschlecht* p *und der Ordnung* R $(\geqq \frac{3}{4}(p+4)$; und *überhaupt giebt es* ∞^{4R} *Raumcurven* R^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* p $(\leqq \frac{4}{3} R - 4)$.

§ 18.

Special-Punktgruppen in der Ebene.

In vielen Anwendungen, insbesondere bei den eindeutigen Abbildungen von Flächen auf Ebenen, stösst man auf Systeme einer endlichen Anzahl von Punkten der Ebene von einer solchen speciellen Lage, dass sie von Curven einer gegebenen Ordnung, welche diese Punkte zu einfachen oder vielfachen festen Punkten besitzen sollen, eine höhere Schaar zulassen, als die directe Abzählung ergeben würde. Der Restsatz, sowie die §§ 3., 4. liefern die Mittel, die Construction solcher Curvenschaaren aus den Eigenschaften einer einzelnen Curve der Schaar abzuleiten.

Ist nämlich irgend eine Curve der Schaar, oder ein irreducibeler Theil f (n. Ordnung) einer zerfallenden Curve derselben gegeben, so geht die Aufgabe zuerst in die bisher behandelte über, auf f selbst diejenigen Gruppen, bez. Specialgruppen G_Q anzugeben, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird; erst dann sind die etwa noch vorhandenen die Schaar beschränkenden Bedingungen, welche von dem Schnitt mit f unabhängig sind, zuzufügen.

Seien die Punktgruppen G_Q, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird, zu einer ∞^q-Schaar gehörig. Welcher Art dieselben auch sein mögen, ob sie durch den Schnitt von Curven höherer oder, wenn es Specialgruppen auf f sind, von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung definirt sind: die sie ausschneidenden Curven lassen sich vermöge des Restsatzes immer durch äquivalente Curven s^{ter} Ordnung ersetzen, wenn s $(\geqq n)$ die Ordnung der Curven der gesuchten Schaar bedeutet. Wie wir indess schon früher bemerkt haben, sind diese Curven C_s, deren feste Basispunkte auf f in dieser Weise bestimmt sind, noch nicht völlig gegeben; vielmehr kann man statt ihrer auch:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0$$

setzen (wo $A_{s-n}=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve $(s-n)$. Ordnung ist), ohne den Schnitt der C_s mit f zu ändern. Es ist daher möglich, den Curven C_s noch:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$$

äussere lineare Bedingungen vorzuschreiben, welche den Schnitt mit f, soweit derselbe von beliebig und fest anzunehmenden Schnittpunkten der C_s mit f abhängt, nicht beeinflussen — den σ Constanten von A entsprechend. Erst durch Einführung von mehr als σ linearen Bedingungen wird die Mannigfaltigkeit q der Schaar in Bezug auf $f = 0$ selbst reducirt.

Die Bedingungen, welche man den Curven C_s vorschreiben kann, mögen nun von der Art sein, dass dieselben einen i-fachen Punkt von f zum k-fachen ($k \geqq i$) Punkt besitzen sollen. Das System von Curven C_s, welches f in einem solchen Punkte ik-punktig treffen soll, genügt aber dann schon der Bedingung, welche der Restsatz stellt, wenn die Curven C_s den i-fachen Punkt von f ebenfalls zum i-fachen Punkt besitzen, und ausserdem jeden Zweig von f noch in $k - i$ unendlich nahen Punkten treffen*). Soll an Stelle eines derartigen Verhaltens ein eigentlicher k-facher Punkt treten, so sind noch:

$$\varrho = \tfrac{1}{2} k (k + 1) - \{\tfrac{1}{2} i (i + 1) + i (k - i)\} = \tfrac{1}{2} (k - i) (k - i + 1)$$

äussere Bedingungen von den Curven C_s zu erfüllen.

Sei $\Sigma\varrho$, auf alle vielfachen Punkte ausgedehnt, die Gesammtzahl der äusseren Bedingungen. Ist $\Sigma\varrho \leqq \sigma$, so haben dieselben weder einen Einfluss auf die übrigen festen Basispunkte der C_s, noch auf die Gruppen der beweglichen Punkte, in welchen f von diesen Curven geschnitten wird. Ist aber $\Sigma\varrho > \sigma$, so bilden diejenigen Curven C_s, welche allen jenen Bedingungen genügen, mit Hülfe von $f = 0$ nur noch eine $\infty^{q - \Sigma\varrho + \sigma}$-Schaar, welche linear aus der ∞^q-Schaar ausscheidet.

Die Gleichung der Gesammtschaar von Curven C_s, welche den oben vorgeschriebenen Bedingungen genügen, hat die Form:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0,$$

wo A_{s-n} noch die allgemeinste Curve $(s - n)$. Ordnung ist, welche die i-fachen Punkte von f, die für C_s k-fache Punkte sein sollen, zu $(k - i)$-fachen Punkten besitzt. Für $\Sigma\varrho \geqq \sigma$ wird A_{s-n} zu Null; die Gesammtschaar selbst ist aber *immer* eine $\infty^{q - \Sigma\varrho + \sigma}$-Schaar.

Nimmt man zur Curve f beispielsweise die hyperelliptische Curve 6. Ordnung für $p = 3$, deren Gleichung die Form besitzt: $\Sigma c_i c_k \alpha_{ik} = 0$ — wo die α Constante sind, i und k die Werthe 1, 2, 3 annehmen, und $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ die Gleichungen von 3 durch 7 gemeinsame Punkte $a_1, a_2, \cdots a_7$ gehenden Curven 3. Ordnung sind — so kann man, für speciellere Fälle mit Hülfe der Punktepaare, in welchen f von den Curven der Schaar $c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0$ getroffen wird,

*) Vgl. die Schlussbemerkungen zum Restsatz, § 1.

auf dieser Curve f Gruppen von Basispunkten für besondere Schaaren von Curven 7. Ordnung C_7 angeben. Es bedeute z. B. $\{[a_1^2]a_2^3 a_3 \cdots a_7\}$ eine Curve 7. Ordnung, welche a_1 zum Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie f, a_2 zum 3-fachen, $a_3 \cdots a_7$ zu einfachen Punkten besitze. Dann bilden die Curven C_7:

$$\{[a_1^2]a_2 \cdots a_7\};\quad \{[a_1^2]\,[a_2^2]a_3 \cdots a_7\};\quad \{[a_1^2]\,[a_2^2]\,[a_3^2]\,a_4 \cdots a_7\};\quad \{[a_1^2]\,[a_2^2]\,[a_3^2]\,[a_4^2]\,a_5 \cdots a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{23};\quad \infty^{20};\quad \infty^{16};\quad \infty^{12}\text{-Schaar.}$$

Dagegen bilden die Curven C_7

$$\{a_1^3 a_2 \cdots a_7\};\ \{a_1^3 a_2^3 a_3 \cdots a_7\};\ \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4 \cdots a_7\};\ \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 \cdots a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{24};\quad \infty^{18};\quad \infty^{13};\quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Mit Hülfe von $f = 0$ aber bilden jene Curven eine

$$\infty^{21};\quad \infty^{17};\quad \infty^{13};\quad \infty^{9}\text{-Schaar;}$$

die letztern Curven dagegen eine

$$\infty^{21};\quad \infty^{17};\quad \infty^{13};\quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Specieller aber giebt es eine ∞^5-Schaar von C_7 $\{a_1 \cdots a_7\}$ und durch 24 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f = 0$ eine ∞^2-Schaar, die f gerade so trifft, wie die Schaar der c_i). Ebenso eine ∞^4-Schaar $\{a_1 \cdots a_7\}$, durch 26 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f = 0$ eine ∞^1-Schaar). Dies bleibt ungeändert, wenn ein Theil der weiteren festen Punkte so in die Punkte a_i hineinrückt, dass man Curven $\{[a_1^2], [a_2^2], \cdots\}$ erhält. Und auch hier ändert sich wieder der Schnitt der C_7 mit f nicht, wenn sodann einer, zwei oder drei der Punkte $[a_1^2]$, $[a_2^2]$, $\cdots$ zu dreifachen Punkten a_1^3, $a_2^3 \cdots$ werden; wohl aber, sobald dies noch bei einem vierten Punkte eintritt.

Im September 1873.