Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von Felix Klein in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen stellt sich neben die Modulargleichung sechsten Grades und ihre bekannte Resolvente vom fünften Grad, beide beherrschend, die Galois'sche Resolvente sechszigsten Grades, die *Ikosaedergleichung.* Von ihr ausgehend übersieht man Bildungsgesetz und Eigenschaften jener Gleichungen niederen Grades mit grösster Leichtigkeit. Ich wünsche im Folgenden die Theorie der Transformation *siebenter* Ordnung bis zu demselben Punkte zu führen. Wie man bei ihr die Modulargleichung achten Grades in einfachster Form aufzustellen hat, habe ich bereits in meiner Arbeit: *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen* etc. (pag. 111 ff. dieses Bandes) gezeigt; die zugehörige Resolvente siebenten Grades betrachtete ich in der hier voraufgeschickten Note: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen.* Es handelt sich nunmehr darum, *die zugehörige Galois'sche Resolvente vom* 168^{ten} *Grade in zweckmässigster Weise zu bilden und von ihr aus jene niederen Gleichungen abzuleiten.*

Die Wurzel η dieser Galois'schen Resolvente hat, wie bekannt, als Function des Periodenverhältnisses ω betrachtet, die charakteristische Eigenschaft, bei allen denjenigen linearen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur bei denjenigen ungeändert zu bleiben, welche modulo 7 zur Identität congruent sind. Dies ist für mich im Folgenden die Definition der Irrationalität η. Ich beginne also (§ 1.) mit einer kurzen Untersuchung der linearen Substitutionen in Bezug auf den Modul 7, welche durchaus elementarer Natur ist, aber der Vollständigkeit wegen hier eingeschaltet werden musste*). Es ergiebt sich daraus (§ 2.), wie η als Function der absoluten Invariante J verzweigt ist, und vor allen Dingen dies Resultat, dass die zwischen η und J bestehende Gleichung, dem Geschlechte $p=3$ angehörig, durch 168 eindeutige Transformationen von a priori angebbarer Gruppirung in sich übergeht. Dies führt zur

---

*) Vergl. die allgemeineren Untersuchungen in Serret's Traité d'algèbre supérieure.

Kenntniss einer merkwürdigen Curve vierter Ordnung, welche durch 168 Collineationen der Ebene in sich übergeht (§ 3.) und in Folge dessen eine Reihe besonders einfacher Eigenschaften besitzt (§ 4., 5.). Es genügt, von der Existenz jener 168 Collineationen zu wissen, um mit leichter Mühe das volle System der zur Curve gehörigen Covarianten aufzustellen (§ 6.), und man erhält die Gleichung 168^{ten} Grades, um welche es sich handelt, in übersichtlichster Weise, indem man die Grundcurve mit einem covarianten Curvenbüschel von der 42^{ten} Ordnung schneidet (ebenda). Will man von der so erhaltenen Gleichung zur Modulargleichung achten Grades oder zur Resolvente siebenten Grades hinabsteigen, so kommen zumal solche Sätze in Betracht, welche man bei der allgemeinen Curve vierter Ordnung hinsichtlich der Berührungscurven dritter Ordnung und gewisser Gruppirungen der Doppeltangenten kennt (§ 7.—10.). Die Wurzeln der gemeinten Gleichungen erweisen sich dabei als rationale Functionen der Coordinaten *eines* Curvenpunktes, und in dieser expliciten Darstellung scheint mir der wesentliche Fortschritt zu liegen, der für die Transformation siebenter Ordnung erreicht ist. — Die nun noch folgenden Paragraphen (11.—15.) haben den Zweck, ein möglichst anschauliches Bild von der Verzweigung der Riemann'schen Fläche zu entwerfen, welche η als Function von J darstellt und die in mehr abstracter Weise schon in § 2. betrachtet wurde. Die Figuren welche ich dabei erhalte, wollen für die hier vorliegenden Fragen dieselbe Bedeutung beanspruchen, welche die *Gestalt* des Ikosaeders für die Probleme fünften Grades hat.

Die hauptsächlichsten der genannten Resultate habe ich bereits in einer Note veröffentlicht, welche ich am 20. Mai dieses Jahres der Erlanger Societät vorlegte.*) Ebendort zeigte ich bereits, wie sich nunmehr die Zurückführung derjenigen Gleichungen siebenten Grades, welche die Gruppe der Modulargleichung haben, auf eben diese Modulargleichung explicite bewerkstelligen lässt. Im Folgenden bin ich auf diese und andere sich anschliessende Fragen noch nicht eingegangen; ich möchte mir vorbehalten, demnächst ausführlicher auf sie zurückzukommen.

§ 1.

Eintheilung der Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ in Bezug auf den Modul 7.

Unter einer Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ schlechthin verstehe ich im Folgenden immer eine solche

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta},$$

*) Ueber Gleichungen siebenten Grades, zweite Mittheilung.

deren Coefficienten ganzzahlig und deren Determinante gleich Eins ist. Dabei will ich, der Kürze wegen, folgende Ausdrucksweise gebrauchen. Zwei Substitutionen S_1 und S_2 sollen *gleichberechtigt* heissen, wenn es eine dritte Substitution S giebt, so dass man die Relation hat:

$$S_1 = S^{-1} \cdot S_2 \cdot S.$$

Nun unterschied ich früher (pag. 122)*) elliptische, parabolische und hyperbolische Substitutionen. Man hat dann ohne Weiteres folgende Sätze:

Gleichberechtigte Substitutionen haben dieselbe Summe $\alpha + \delta$.

Alle elliptischen Substitutionen von der Periode Zwei ($\alpha + \delta = 0$) *sind gleichberechtigt.*

Nimmt man die elliptischen Substitutionen von der Periode Drei ($\alpha + \delta = \pm 1$) *in der Weise paarweise zusammen, wie sie durch Iteration aus einander hervorgehen, so sind alle solchen Paare gleichberechtigt.*

Die parabolischen Substitutionen ($\alpha + \delta = \pm 2$) *zerfallen in unendlich viele Classen; jede Substitution ist mit einer der folgenden:*

$$\omega' = \omega, \quad \omega' = \omega + 1, \quad \omega' = \omega + 2, \ldots$$

gleichberechtigt.

Fortan werden wir nun die Substitutionen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ nicht mehr an sich, sondern in Bezug auf den Modul 7 betrachten, und also zwei Substitutionen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und $\frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$ als identisch betrachten, wenn $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, $\gamma \equiv \gamma'$, $\delta \equiv \delta'$ ist, demnach auch nicht mehr verlangen, dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Eins ist, sondern nur, dass es congruent Eins ist (modulo 7). Wir haben dann jedenfalls den Satz:

Substitutionen, welche früher gleichberechtigt waren, sind es auch jetzt.

Uebrigens giebt es jetzt nur eine endliche Anzahl von Substitutionen; man zählt sofort ab:

Die Zahl der Substitutionen ist 168.

Unter diesen ist eine, S_1, von der Periode 1, nämlich die Identität $\omega' = \omega$. Das ist selbstverständlich.

Um Substitutionen von der Periode 2 zu erhalten, führen wir die Bedingung $\alpha + \delta = 0$ ein, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode Zwei charakterisirte. Wir finden 21 modulo 7 verschiedene Substitutionen; da sie ihre Periode nicht geändert haben können, so folgt:

Es giebt 21 *gleichberechtigte Substitutionen von der Periode Zwei.* Dieselben sollen S_2 genannt werden; Beispiel: $-\frac{1}{\omega}$.

---

*) Die Citate auf blosse Seitenzahlen beziehen sich immer auf den gegenwärtigen Annalenband.

Auf dieselbe Weise findet man durch Heranziehen der Bedingung $\alpha + \delta = \pm 1$, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode Drei charakterisirte:

Man hat 28 *gleichberechtigte Paare von Substitutionen* S_3 *mit der Periode* 3. Beispiel für ein Paar: $\frac{-2\omega}{3}$, $\frac{-3\omega}{2}$.

Bei den parabolischen Substitutionen war $\alpha + \delta = \pm 2$. Dementsprechend erhalten wir 49 modulo 7 verschiedene Substitutionen. Von diesen ist eine die Identität $\omega' = \omega$. Die übrigen erweisen sich mit $\omega \pm 1$, $\omega \pm 2$, $\omega \pm 3$ gleichberechtigt; sie haben daher, wie diese, die Periode 7.

Es giebt 48 *Substitutionen* S_7 *von der Periode sieben, welche sich auf acht gleichberechtigte Sextupel vertheilen.*

Beispiel eines Sextupels: $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots\ \omega + 6$.

So bleiben noch $168 - 1 - 21 - 56 - 48 = 42$ Substitutionen, für welche $\alpha + \delta \equiv \pm 3$ ist. Iterirt man sie, so wird für die neue Substitution $\alpha' + \delta' \equiv 0$. Unsere Substitutionen ergeben also, wiederholt, Substitutionen von der Periode 2, haben demnach selbst die Periode 4. Ich werde jede solche Substitution mit der inversen zu einem Paare zusammenfassen. Dann folgt:

Es giebt 21 *gleichberechtigte Paare von Substitutionen* S_4 *mit der Periode* 4, *die einzeln den* 21 *Substitutionen* S_2 *zugeordnet sind.*

Beispiel: $\frac{2\omega + 2}{-2\omega + 2}$, $\frac{2\omega - 2}{2\omega + 2}$, zu $-\frac{1}{\omega}$ gehörig.

An diese Unterscheidung der Periodicität unserer Substitutionen knüpft sich sofort die Aufstellung der aus ihnen zusammenzusetzenden *Gruppen*. Zunächst hat man diejenigen Gruppen, welche nur Wiederholungen einer und derselben Substitution enthalten. *Es giebt von solchen Gruppen:*

1) *Eine,* G_1, *welche nur eine Substitution enthält:* $\omega' = \omega$,

2) 21, G_2, *mit zwei Substitutionen, z. B.:* ω, $-\frac{1}{\omega}$,

3) 28, G_3, *mit drei Substitutionen:* ω, $-\frac{2\omega}{3}$, $\frac{-3\omega}{2}$,

4) 21, G_4, *mit vier Substitutionen:* ω, $\frac{2\omega+2}{-2\omega+2}$, $-\frac{1}{\omega}$, $\frac{2\omega-2}{2\omega+2}$,

5) 8, G_7, *mit sieben Substitutionen:* ω, $\omega + 1$, $\ldots\ \omega + 6$.

Unter diesen Gruppen sind immer diejenigen, welche gleich viele Substitutionen enthalten, gleichberechtigt. Es genügt daher zum Beweise der nachfolgenden Sätze jedesmal nur ein Beispiel anzuführen, welches sich auf eine einzelne der im Satze gemeinten Gruppen bezieht. Man findet:

1) *Jede Substitution* S_2 *ist mit vier anderen* S_2 *vertauschbar. Diese vier* S_2 *vertheilen sich in der Art auf zwei Paare, dass die Substitutionen eines Paares unter sich ebenfalls vertauschbar sind.*

Beispiel: Die Substitution $-\frac{1}{\omega}$ ist mit folgenden vertauschbar:

$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2},\quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3},\quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

Die beiden ersten sind unter einander gleichfalls vertauschbar, ebenso die beiden letzten.

2) *Demnach giebt es 14 Gruppen G_4' mit vier Substitutionen, welche, von der Identität abgesehen, nur Substitutionen von der Periode 2 enthalten.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2},\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}$

oder auch: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\ \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$

Diese 14 Gruppen sind untereinander nun *nicht* gleichberechtigt, sondern vertheilen sich, den beiden angeführten Beispielen entsprechend, zu je sieben auf zwei Classen. Jede G_2 ist an einer Gruppe G_4' aus jeder Classe betheiligt.

3) *Mit jeder Gruppe G_3 sind drei Substitutionen S_2 vertauschbar. Also giebt es 28 unter einander gleichberechtigte Gruppen G_6' von sechs Substitutionen. Jede G_2 ist an vier solchen G_6' betheiligt.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{3\omega}{2},\ -\frac{2\omega}{3},\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2}{3\omega},\ \frac{3}{2\omega}.$

4) *Die vier Substitutionen S_2, welche Satz* (1) *zufolge mit einer gegebenen S_2 vertauschbar sind, sind auch mit der G_4 vertauschbar, in welcher die gegebene S_2 enthalten ist. Dies giebt 21 gleichberechtigte Gruppen G_8' von acht Substitutionen.*

Beispiel: $\omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+2}{-2\omega+2},\ \frac{2\omega-2}{+2\omega+2},$

$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2},\quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3},\quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

5) *Mit jeder Gruppe G_7 sind 14 Substitutionen S_3 vertauschbar. Dies giebt acht gleichberechtigte Gruppen G_{21}' von 21 Substitutionen. Jede S_3 ist an zwei solchen Gruppen betheiligt.*

Beispiel: $\omega+k,\ \frac{-2(\omega+k)}{3},\ \frac{-3(\omega+k)}{2}$ für $k=0, 1, \ldots. 6,$

oder auch: die Gesammtheit der Substitutionen $\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega+\delta}$.

6) *Den $2\cdot 7$ Gruppen G_4'* (*Satz* (2)) *entsprechend giebt es $2\cdot 7$ Gruppen G_{24}'' mit 24 Substitutionen.* Dieselben entstehen folgendermassen. Man nehme eine G_4' und vervollständige dieselbe:

a) durch diejenigen 6 S_4, deren Wiederholungen die der G_4' angehörigen drei Substitutionen S_2 sind,

b) durch diejenigen 6 S_2, welche mit einer der genannten drei S_2 vertauschbar sind, ohne selbst bereits der G_4' anzugehören.

Wenn man die so zusammengestellten Substitutionen beliebig combinirt, so entstehen nur noch:

c) vier Paare zusammengehöriger Substitutionen S_3, und $4+6+6+4\cdot 2$ ist 24.

Beispiel: G_4': $\qquad \omega,\ -\frac{1}{\omega},\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2},\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3};$

$$\left\{\begin{array}{ll}
S_4,\ \text{welche zu } -\frac{1}{\omega} \text{ gehören:} & \frac{2\omega+2}{-2\omega+2},\ \frac{2\omega-2}{2\omega+2};\\[1ex]
S_4,\ \text{welche zu } \frac{2\omega+3}{3\omega-2} \text{ gehören:} & \frac{\omega+1}{\omega+2},\ \frac{-2\omega+1}{\omega-1};\\[1ex]
S_4,\ \text{welche zu } \frac{3\omega-2}{-2\omega-3} \text{ gehören:} & \frac{3\omega-3}{-3\omega+1},\ \frac{\omega+3}{3\omega+3};
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Neue } S_2,\ \text{mit } -\frac{1}{\omega} \text{ vertauschbar:} & \frac{2\omega-3}{-3\omega-2},\ \frac{3\omega+2}{2\omega-3};\\[1ex]
\text{„} \quad \text{„},\ \text{„}\ \frac{2\omega+3}{3\omega-2} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad : & \frac{-\omega+1}{-2\omega+1},\ \frac{\omega+2}{-\omega-1};\\[1ex]
\text{„} \quad \text{„},\ \text{„}\ \frac{3\omega-2}{-2\omega-3} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad : & \frac{3\omega-1}{3\omega-3},\ \frac{-3\omega-3}{\omega+3}.
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Paare von } S_3,\ \text{welche durch Combination entstehen:}\\[1ex]
\qquad\qquad \frac{-3\omega-1}{2},\ \frac{-2\omega-1}{3};\\[1ex]
\qquad\qquad \frac{2\omega}{\omega-3},\ \frac{3\omega}{\omega-2};\\[1ex]
\qquad\qquad \frac{2}{3\omega+1},\ \frac{-\omega+2}{3\omega};\\[1ex]
\qquad\qquad \frac{-\omega+3}{2\omega},\ \frac{-3}{2\omega+1}.
\end{array}\right.$$

Man sieht: Die 24 Substitutionen einer G_{24}'' sind ebenso beschaffen, wie die 24 Vertauschungen von vier Elementen, oder auch wie die 24 Drehungen, welche ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Ich werde von beiden Vergleichungen später eine Anwendung machen. — Uebrigens sind diese G_{24}'' selbstverständlicherweise keine anderen Gruppen, als diejenigen, deren ich mich in dem Aufsatze: *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen* bediente. Ich habe sie damals im Anschlusse an Betti in einer etwas anderen Gestalt mitgetheilt, indem ich nämlich nicht daran festhielt, dass $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1$ (mod. 7) sei, sondern nur verlangte, dass $\alpha\delta-\beta\gamma$ congruent einem quadratischen Reste werde, — ein Unterschied, der für die gebrochene Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ bedeutungslos ist.

7) Man beweist endlich durch bekannte Methoden, *dass in der Gesammtheit der 168 Substitutionen* $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *keine anderen Untergruppen vorhanden sind, als die nun aufgezählten.*

§ 2.

Die Function $\eta(\omega)$ und ihre Verzweigung in Bezug auf J.

Es sei jetzt η eine algebraische Function von J, welche so verzweigt ist, dass sie, als Function von ω betrachtet, folgende Eigenschaften besitzt:

1) Sie ist innerhalb der positiven Halbebene ω durchaus eindeutig,

2) sie geht durch diejenigen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur durch diejenigen in sich über, welche modulo 7 zur Identität congruent sind.

Ich will mit $\eta(\omega)$ einen der Werthe bezeichnen, welche zu einem gegebenen J gehören. Man erhält dann alle anderen, indem man statt ω die 167 Ausdrücke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ einträgt, welche modulo 7 von ω verschieden sind, denn *alle* Werthe von ω, die zu dem gegebenen J gehören, sind in dieser Form enthalten. Daher:

η ist mit J durch eine Gleichung vom Grade 168 *in η verbunden.*

Es mögen die 168 Wurzeln in irgend einer Reihenfolge mit

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{168}$$

bezeichnet sein. Wenn jetzt J in der Ebene, welche seine complexen Werthe versinnlicht, einen geschlossenen Weg beschreibt, so erfährt ein beliebiges der zugehörigen ω eine Substitution $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$. Dementsprechend erleiden die η eine bestimmte Permutation, indem in $\eta\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ für ω der eben angegebene Werth eingetragen werden muss. Soll nun nach dieser Permutation (bei allgemeinem Werthe von J) *irgend* ein η_i mit einem Anfangswerthe zusammenfallen, so ist offenbar nöthig, dass die Substitution $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ modulo 7 zur Identität congruent ist; dann aber fallen *alle* Werthe η mit ihren Anfangswerthen zusammen. Denn bezeichnet S irgend eine Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, S_0 eine beliebige solche, die modulo 7 zur Identität congruent ist, und S_0' eine bestimmte derselben Art, so hat man allemal die Relation:

$$SS_0 = S_0'S.$$

Ich drücke das so aus:

Alle Wurzeln η_i sind in Bezug auf J gleichverzweigt.

Die Verzweigungspunkte selbst können nach meinen früheren Angaben nur bei $J = 0, 1, \infty$ liegen (pag. 128). Umkreist J den Punkt 0, so erfährt ω eine elliptische Substitution von der Periode 3, umkreist es den Punkt 1, so erfährt ω eine elliptische Substitution von der Periode 2. Endlich, wenn es den Punkt ∞ umkreist, so erfährt ein passend gewähltes ω die parabolische Substitution $\omega' = \omega + 1$. Daher folgt:

Bei $J = 0$ hängen von den 168 Blättern der η repräsentirenden Riemann'schen Fläche 56-mal drei Blätter im Cyklus zusammen, bei $J = 1$ 84-mal zwei Blätter, bei $J = \infty$ 24-mal sieben Blätter.

Das *Geschlecht* der zwischen η und J bestehenden Gleichung erweist sich hiernach gleich *Drei:*

$$p = \tfrac{1}{2}(2 - 2 \cdot 168 + 56 \cdot 2 + 84 \cdot 1 + 24 \cdot 6) = 3.$$

Algebraische Functionen von J, welche in Bezug auf J gleichverzweigt sind, lassen sich durch einander mit Hülfe von J rational darstellen. Daher folgt:

Jede Wurzel η_i unserer Gleichung ist eine rationale Function von jeder anderen Wurzel η_k und J.

Oder anders ausgedrückt:

Man kann 168 rationale Functionen $R(\eta, J)$ mit numerischen Coefficienten bilden, so dass, unter η eine beliebige Wurzel verstanden, folgende Relationen bestehen:

$$\eta_1 = R_1(\eta, J), \; \eta_2 = R_2(\eta, J), \ldots \eta_{168} = R_{168}(\eta, J).$$

Es giebt also, den 168 Substitutionen entsprechend, welche im ersten Paragraphen betrachtet wurden, 168 *eindeutige Transformationen unserer Riemann'schen Fläche in sich.* Die weiteren Schlüsse stützen sich alle darauf, dass man, nach § 1., die Gruppirung jener Substitutionen kennt und dass diese Gruppirung sich bei den nunmehr in Betracht kommenden eindeutigen Transformationen wiederfinden muss.

Doch beachten wir zunächst Folgendes. Durch die Transformationen wird jeder Punkt unserer Riemann'schen Fläche in jeden anderen über ihm resp. unter ihm liegenden Punkt verwandelt. Fragt man also, ob es Punkte der Riemann'schen Fläche giebt, welche bei einigen der 168 Transformationen fest bleiben und aus denen also weniger als 168 verschiedene Punkte hervorgehen, so beantwortet sich diese Frage einfach durch die Verzweigungsstellen, — denn sie sind die einzigen Punkte, welche gleichzeitig verschiedenen Blättern angehören. Mit Rücksicht auf das, was soeben hinsichtlich der Verzweigung gesagt wurde, haben wir also den Satz:

Unter den Gruppen von je 168 durch die Transformationen zusammengeordneten Punkten haben wir, $J = \infty$ entsprechend, eine siebenfach zählende von nur 24, $J = 0$ entsprechend eine dreifach zählende von nur 56, $J = 1$ entsprechend eine doppeltzählende von nur 84. Andere mehrfach zählende Punktgruppen giebt es nicht.

Ich werde diese Punkte, ihrer Wichtigkeit halber, mit einer besonderen Bezeichnung belegen; sie sollen die Punkte a, b, c heissen.

Jeder Punkt a bleibt bei einer Transformation von der Periode 7 ungeändert, d. h. also überhaupt bei den Transformationen einer G_7. Ebenso bleibt jeder Punkt b bei den Transformationen einer G_3, jeder Punkt c bei den Transformationen einer G_2 ungeändert. Nun wissen wir aber, dass es nur acht Gruppen G_7, 28 Gruppen G_3 und 21 Gruppen G_2 giebt, ausserdem 21 Gruppen G_4. So schliessen wir:

Bei den Transformationen einer G_7 bleiben immer drei Punkte a fest, bei den Transformationen einer G_3 zwei Punkte b, bei den Transformationen einer G_2 vier Punkte c.

Bei den Transformationen einer G_4 bleibt kein Punkt ungeändert.

Nun war jede G_7 ausgezeichnete Gruppe in einer G'_{21}, welche neben den Substitutionen der G_7 nur Substitutionen von der Periode 3 umfasste. Die drei Punkte a, welche bei den Transformationen der G_7 ungeändert bleiben, können es bei den anderen Transformationen der G'_{21} nicht thun; denn sonst würde es nicht 24, sondern nur acht Punkte a geben. Daher werden die drei Punkte a durch die neuen Transformationen unter einander vertauscht, und da die Periode der neuen Transformationen Drei ist, so werden sie *cyklisch* vertauscht.

In diesem Sinne bleibt bei den Transformationen einer G'_{21} jedesmal ein Tripel zusammengehöriger Punkte a ungeändert.

Ebenso schliesst man:

Bei den Transformationen einer G_6' bleibt jedesmal ein Paar zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Die G_6' enthält Transformationen von der Periode Drei und solche von der Periode Zwei. Bei den ersteren bleiben die beiden Punkte b einzeln genommen fest, bei den letzteren werden sie wechselseitig vertauscht.

Diese Sätze lassen sich vervielfachen. Ich führe nur noch folgende an.

Jede S_2 war mit vier anderen S_2 vertauschbar. Das heisst:

Bei einer Transformation von der Periode 2 bleiben ausser dem Quadrupel der einzeln festbleibenden Punkte c noch vier andere Quadrupel ungeändert (aber nicht die Punkte c in ihnen).

Ferner war jede S_2 mit vier G_3 vertauschbar. Also:

In demselben Sinne bleiben bei einer Substitution von der Periode Zwei vier Paare zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Ich erinnere endlich daran, dass sich unter den Substitutionen einer G''_{24} vier Gruppen G_3 befanden. Dementsprechend erhalten wir vier Paare zusammengehöriger Punkte b, und nach dem, was über die Beschaffenheit der G''_{24} gesagt wurde, ist deutlich, *dass diese vier Paare vermöge der Transformationen der G''_{24} auf alle Weisen unter einander permutirt werden.*

Die angeführten Sätze sind immer so zu verstehen, dass auch nicht mehr Paare etc., als angegeben ist, ungeändert bleiben resp. auf alle Weisen permutirt werden.

§ 3.

Die Normalcurve von der vierten Ordnung.

Als Unbekannte η in unserer Gleichung 168. Grades kann jede algebraische Function gewählt werden, die innerhalb der nunmehr geschilderten Riemann'schen Fläche eindeutig ist und bei den 168 eindeutigen Transformationen 168 im Allgemeinen verschiedene Werthe annimmt. Wir werden jedenfalls die einfachste Function auswählen wollen, wenn es sich um wirkliche Aufstellung der Gleichung handelt, und dementsprechend beschäftige ich mich zunächst mit dem Probleme, diejenige *Normalcurve niederster Ordnung* anzugeben, auf welche sich die Gleichung η und J eindeutig beziehen lässt. Dies Problem erledigt sich, wie man sehen wird, durch eine Reihe einfacher Schlüsse, welche sich desshalb ermöglichen, *weil man die algebraischen Functionen vom Geschlechte $p = 3$ auf Grund anderer Untersuchungen ziemlich genau kennt.**)

Bei den algebraischen Functionen $p = 3$ sind zwei Fälle hinsichtlich der Normalcurve zu unterscheiden: der *hyperelliptische* und der *allgemeine*. Im ersteren Falle ist die Normalcurve eine Curve fünfter Ordnung mit dreifachem Punkte, im zweiten eine Curve vierter Ordnung.

Ich behaupte nun zunächst: *hyperelliptisch kann unsere Normalcurve nicht sein.* Denn sie muss, wie die Gleichung zwischen η und J, auf die sie eindeutig bezogen ist, durch 168 eindeutige Transformationen der bewussten Gruppirung in sich übergehen. Bei der hyperelliptischen Curve aber hat die einfach unendliche Schaar von Punktpaaren, die bei der C_5 mit dreifachem Punkte durch die von diesem Punkte ausgehenden Strahlen ausgeschnitten wird, gegenüber eindeutiger Transformationen eine invariante Bedeutung. Es müsste also der von dem dreifachen Punkte ausgehende Strahlbüschel auf 168 Weisen eindeutig in sich transformirt werden.**) Nun ist ein Strahlbüschel eine rationale Mannigfaltigkeit von einer Dimension; es müsste also (nach dem von

*) Siehe namentlich: *Weber*, *Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p = 3$* (Berlin, 1876).

**) Man könnte an bloss 84 Weisen denken, indem eine Substitution S_2 möglicherweise darin bestehen könnte, dass die beiden von einem Strahl ausgeschnittenen Punkte vertauscht werden, — was sich dann auch, wie im Texte, als unmöglich erweisen würde. Aber das ist schon deshalb unzulässig, weil die Gruppe der 168 Transformationen einfach ist.

mir schon oft angewandten Schlusse) eine Gruppe von 168 linearen Transformationen einer Veränderlichen geben, welche, wohlverstanden, ebenso beschaffen wäre, wie unsere Transformationsgruppe, also z. B. keine Substitution von einer Periode > 7 enthielte. Eine solche Gruppe aber giebt es bekanntlich nicht.

Also ist unsere Normalcurve von der vierten Ordnung.

Jetzt lehrt die Theorie der algebraischen Functionen*), dass allgemein bei einer eindeutigen Transformation einer Curve in sich die von Riemann so genannten Functionen φ linear transformirt werden. Bei der Curve vierter Ordnung nehmen die Functionen φ jeden Werth im Allgemeinen in *vier* Punkten an, und die Punktquadrupel, welche in diesem Sinne einer Function φ entsprechen, können durch die geraden Linien, welche sich in einem bestimmten Punkte der Ebene kreuzen, ausgeschnitten werden. Daher gehört zu jeder linearen Transformation der φ eine Umformung der Ebene, bei welcher jeder geraden Linie eine gerade Linie, jedem Punkte ein Punkt entspricht, d. h. eine *Collineation* im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Daher:

Unsere Curve vierter Ordnung geht durch 168 *Collineationen, welche die bewusste Gruppirung haben, in sich über;*

und vor allen Dingen:

Es giebt eine endliche Gruppe von 168 *Collineationen der Ebene, unter denen keine eine Periode* > 7 *hat.***)

Auf unserer Curve vierter Ordnung werden sich, diesen Collineationen entsprechend, die Punkte im Allgemeinen zu je 168 zusammenordnen. Nur einmal sind es bloss 24 (die Punkte a, wie ich sie auch jetzt nennen werde), ein anderes Mal bloss 56 (die Punkte b), ein drittes Mal bloss 84 (die Punkte c). Andere Gruppen von weniger als 168 zusammengehörigen Punkten giebt es nicht.

Nun aber kennt man auf einer Curve vierter Ordnung Gruppen von 24, 56, 84 ausgezeichneten Punkten, das sind die 24 *Wendepunkte*, die 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten*, die 84 *sextaktischen Punkte*. Diese Punkte sind sämmtlich durch Eigenschaften charakterisirt, welche bei Collineationen der Ebene ungeändert bleiben und werden also bei den 168 Collineationen der Curve in sich bez. unter einander vertauscht. Daher folgt:

---

*) Siehe Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, diese Annalen Bd. VII.

**) In der Aufzählung aller endlichen Gruppen ternärer linearer Substitutionen, welche Camille Jordan gegeben hat (Borchardt's Journal Bd. 84) scheint diese Gruppe übersehen zu sein. [Wie mir Hr. C. Jordan mittheilt, befindet sich der Fehler auf S. 167 der genannten Arbeit, Z. 8 v. u., indem Ω daselbst nicht durch 9φ sondern nur durch 3φ dividirbar zu sein braucht. (Dec. 1878)].

Die Punkte a sind die Wendepunkte, die Punkte b die Berührungspunkte der Doppeltangenten, die Punkte c die sextaktischen Punkte.

Man könnte diesem Schlusse gegenüber vielleicht einwenden, dass möglicherweise die Wendepunkte mit den Berührungspunkten der Doppeltangenten oder mit den sextaktischen Punkten, oder diese beiden letzten Kategorien unter einander zum Theil zusammenfallen. Um diesen Einwand zu entkräften, genügt es, darauf hinzuweisen, dass 56 durch 24 nicht theilbar ist und dass sich 84 aus 56 und 24 nicht ganzzahlig zusammensetzen lässt. In der That können wir, nach dem, was wir von der Riemann'schen Fläche wissen, nun einmal nur Gruppen von 24, 56, 84 Punkten gebrauchen. —

Aber auch die *Tripel* der Punkte *a*, die *Paare* der Punkte *b* und die *Quadrupel* der Punkte *c* bekommen eine einfache Bedeutung.

Was zunächst die *Tripel* betrifft, so beachte man, dass jede Wendetangente der C_4 dieselbe noch in *einem* weiteren Punkte schneidet. Solcher Punkte erhalten wir, entsprechend der Zahl der Wendepunkte, 24. Nun giebt es auf unserer Curve nur *eine* Gruppe von 24 zusammengehörigen Punkten, das sind die Wendepunkte selbst. Wir schliessen also:

Die neuen Punkte fallen mit den Wendepunkten in irgend einer Reihenfolge zusammen.

Mit dem anfänglich gewählten Punkte kann der neue Punkt nicht coincidiren; sonst hätte man eine vierpunktig berührende Tangente und die Wendepunkte wären weder unter sich noch von den Berührungspunkten der Doppeltangenten durchaus verschieden. Daher:

Jede Wendetangente unserer C_4 schneidet dieselbe noch in einem weiteren Wendepunkte.

Nun giebt es Collineationen der C_4 in sich, welche den anfänglich gewählten Wendepunkt fest lassen. Dieselben lassen jedenfalls auch den nun construirten neuen Wendepunkt ungeändert; dann weiter auch denjenigen, welcher aus diesem durch Wiederholung desselben Processes abgeleitet wird, etc. Nun sind aber die *Tripel* zusammengehöriger Punkte *a* eben dadurch charakterisirt worden, dass sie bei denselben Transformationen ungeändert bleiben. Also folgt:

Die 24 Wendepunkte unserer C_4 vertheilen sich in der Weise auf acht Dreiecke, dass die Dreiecksseiten zugleich die Wendetangenten sind.

Diese Wendedreiecke entsprechen den Tripeln zusammengehöriger Punkte a.

Noch einfacher ist die Bedeutung der *Paare* zusammengehöriger Punkte *b*. Bleibt bei einer Collineation, welche die C_4 in sich überführt, der eine Berührungspunkt einer Doppeltangente fest, so gewiss auch der andere. Daher:

Den 28 Paaren zusammengehöriger Punkte b entsprechen die 28 Doppeltangenten mit ihren beiden Berührungspunkten.

Um endlich die *Quadrupel* der Punkte c zu interpretiren, beachte man den leicht zu beweisenden Satz, dass in der Ebene jede Collineation von der Periode 2 eine *Perspective* ist. Wir erhalten also den 21 Substitutionen S_2 entsprechend 21 *Axen* und 21 zugehörige *Centra*, in Bezug auf welche unsere C_4 sich selbst perspectivisch ist. Jede Axe schneidet die C_4 in vier Punkten: das sind eben die 4 Punkte c, welche bei der betreffenden S_2 ungeändert bleiben. Also:

Die 84 sextaktischen Punkte unserer C_4 werden von 21 geraden Linien ausgeschnitten.

Die vier Punkte, welche einer Linie angehören, repräsentiren jedesmal ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.

Betrachten wir zuletzt noch die drei am Ende des vorigen Paragraphen angeführten Sätze. So bekommen wir:

Durch jedes Centrum der Perspectivität laufen vier Axen hindurch, auf jeder Axe liegen vier Centra.

Jede Doppeltangente trägt drei Centra, indem durch jedes Centrum vier Doppeltangenten verlaufen.

Bei den 24 Collineationen einer G''_{24} werden vier ausgezeichnete Doppeltangenten auf alle Weise permutirt.

§ 4.

Gleichungsformen der Curve vierter Ordnung.

Die angeführten Sätze sind mehr als hinreichend, um für unsere C_4 verschiedene Gleichungen aufzustellen, in denen die Collineationen der verschiedenen Gruppen ohne Weiteres hervortreten.

Als Coordinatendreieck möge zunächst ein *Wendedreieck* zu Grunde gelegt werden. Seine Seiten seien $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ und sollen bezüglich im Schnitte mit $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$ die Curve osculiren. Dann hat die Gleichung der C_4 jedenfalls folgende Gestalt:

$$A\lambda^3\mu + B\mu^3\nu + C\nu^3\lambda + \lambda\mu\nu(D\lambda + E\mu + F\nu) = 0.$$

Nun soll unsere Curve bei cyklischer Vertauschung der Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Daher ist, wenn wir in die Definition von λ, μ, ν passende Zahlenfactoren aufnehmen, $A = B = C$ und $D = E = F$. Ferner soll die C_4 bei sechs Collineationen von der Periode 7 in sich übergehen, vermöge deren die Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Diese Collineationen drücken sich analytisch jedenfalls so aus, dass die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ mit passenden siebenten Einheitswurzeln multiplicirt werden. Dabei kann der Term $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ unmöglich in ein

Multiplum seiner selbst übergehen; er darf daher in unserer Gleichung nicht vorkommen. *Die Gleichung lautet daher einfach:*

$$0 = f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda. \tag{1}$$

Ich will die Collineationen, durch welche f in sich selbst übergeht, immer so angeben, dass sie die Determinante *Eins* besitzen. Dann hat man erstens die Collineation von der Periode Drei:

$$\lambda' = \mu, \quad \mu' = \nu, \quad \nu' = \lambda, \tag{2}$$

sodann folgende Collineation von der Periode 7:

$$\lambda' = \gamma\lambda, \quad \mu' = \gamma^4\mu, \quad \nu' = \gamma^2\nu, \quad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right), \tag{3}$$

verbindet man beide in beliebiger Wiederholung, *so hat man die G'_{21}, bei welcher das zu Grunde gelegte Wendedreieck ungeändert bleibt.*

Um nunmehr die 6 Collineationen einer G_6' hervortreten zu lassen, werde ich ein neues Coordinatendreieck einführen, dessen Seiten dadurch definirt sind, dass sie bei den Vertauschungen (2) ungeändert bleiben. Dementsprechend setze ich zunächst:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda + \mu + \nu}{\alpha - \alpha^2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu}{\alpha - \alpha^2} \\ x_3 = \dfrac{\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu}{\alpha - \alpha^2} \end{cases} \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right). \tag{4}$$

Dann wird die Gleichung unserer Curve

$$0 = f = \tfrac{1}{3}(x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 3x_2^2x_3^2 + x_1((1+3\alpha^2)x_2^3 + (1+3\alpha)x_3^3)). \tag{5}$$

Um hier rechter Hand die dritten Einheitswurzeln fortzuschaffen, setze ich ferner:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt[3]{7}}, \\ x_2 = y_2\sqrt[3]{3\alpha + 1}, \\ x_3 = y_3\sqrt[3]{3\alpha^2 + 1} \end{cases} \tag{6}$$

und erhalte:

$$0 = f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}(y_1^4 + 21y_1^2y_2y_3 - 147y_2^2y_3^2 + 49y_1(y_2^3 + y_3^3)). \tag{6}$$

Man sieht hier ohne Weiteres, dass $y_1 = 0$ eine Doppeltangente unserer Curve ist, welche im Schnitt mit $y_2 = 0$ und mit $y_3 = 0$ berührt, und *dass sich die sechs Substitutionen der zugehörigen G_6' aus folgenden beiden zusammensetzen lassen*, von *denen die erste mit* (2) *zusammenfällt:*

$$y_1' = y_1, \qquad y_2' = \alpha y_2, \qquad y_3' = \alpha^2 y_3, \tag{7}$$

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_3, \quad y_3' = -y_2. \tag{8}$$

Die drei Centra, welche auf $y_1 = 0$ liegen, sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$y_2 + y_3 = 0, \quad y_2 + \alpha y_3 = 0, \quad y_2 + \alpha^2 y_3 = 0,$$

während die zugehörigen Axen der Perspectivität folgende sind:

$$y_2 - y_3 = 0, \quad y_2 - \alpha y_3 = 0, \quad y_2 - \alpha^2 y_3 = 0.$$

Um jetzt den Uebergang zu einer G''_{24} zu finden, suche ich vor allen Dingen die Doppeltangenten zu bestimmen, welche von den genannten Centren auslaufen. Durch jedes Centrum gehen vier Doppeltangenten, aber eine derselben fällt bei uns jedesmal mit $y_1 = 0$ zusammen, so dass es sich nur um 9 Doppeltangenten handelt. Betrachten wir zunächst diejenigen, welche durch das erste Centrum hindurchgehen und demnach eine Gleichung folgender Form haben:

$$\sigma y_1 + (y_2 + y_3) = 0.$$

Um sie zu bestimmen, trage man den Werth von y_1 aus vorstehender Gleichung in die Curvengleichung ein, ordne nach $\frac{y_2 y_3}{(y_2 + y_3)^2}$ und bilde die Discriminante der für diese Grösse entstehenden quadratischen Gleichung. So erhält man folgende Gleichung für σ:

$$28\sigma^3 - 21\sigma^2 - 6\sigma - 1 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$\sigma = 1, \quad \sigma = \frac{-1 \pm 3\sqrt{-\frac{1}{7}}}{8}.$$

Die drei durch das Centrum laufenden Doppeltangenten lauten demnach:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

$$(-7 \pm 3\sqrt{-7})y_1 + 56y_2 + 56y_3 = 0.$$

Die sechs übrigen durch die beiden anderen Centra laufenden Doppeltangenten ergeben sich aus diesen durch die Substitutionen (7).

Ich sage nun, *dass $y_1 = 0$ zusammen mit solchen drei der genannten Doppeltangenten, welche durch* (7) *aus einander hervorgehen, ein Quadrupel von Doppeltangenten bildet, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.* Allgemein nämlich werden die sechs Punkte, welche aus einem beliebigen Punkte durch die Substitutionen der G_6' hervorgehen, mit den Berührungspunkten von $y_1 = 0$ auf einem Kegelschnitte liegen, weil bei den Substitutionen (7), (8) jeder quadratische Ausdruck $y_1^2 + k y_2 y_3$ ungeändert bleibt. Die sechs Berührungspunkte der genannten Tripel von Doppeltangenten gehen aber durch die Substitutionen der G_6' aus einander hervor, denn jede einzelne Doppeltangente bleibt, weil sie durch ein Centrum verläuft, bei einer

Substitution von der Periode 2 ungeändert, während sich die Berührungspunkte auf ihr vertauschen.

Demnach kann jetzt die Gleichung unserer C_4 auf drei Weisen in die Form gesetzt werden: $pqrs - w^2 = 0$, wo p, q, r, s Doppeltangenten, w ein Kegelschnitt ist, der durch ihre Berührungspunkte läuft. Man findet einmal:

$$(9) \quad 0 = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}} \{49 y_1 (y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3) - 3(4 y_1^2 - 7 y_2 y_3)^2\},$$

das andere Mal:

$$(10) \quad 0 = f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}} \cdot \Big\{ \frac{y_1}{7 \cdot 8^3} ((-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 y_2 + 56 y_3) \cdot ((-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 \alpha y_2 + 56 \alpha^2 y_3) \cdot ((-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 \alpha^2 y_2 + 56 \alpha y_3) - 3\Big(\frac{1 \pm 3\sqrt{-7}}{16} \cdot y_1^2 - 7 y_2 y_3\Big)^2 \Big\}.$$

Die Gleichungsform (9) wird uns später (im letzten Paragraphen) von Wichtigkeit sein, *die andere ergiebt, wie ich nun zeigen werde, ohne Weiteres die Substitutionen einer* G''_{24}.

Man setze nämlich:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = (21 \mp 9\sqrt{-7}) y_1, \\ \mathfrak{z}_2 = (-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 y_2 + 56 y_3, \\ \mathfrak{z}_3 = (-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 \alpha y_2 + 56 \alpha^2 y_3, \\ \mathfrak{z}_4 = (-7 \pm 3\sqrt{-7}) y_1 + 56 \alpha^2 y_2 + 56 \alpha y_3, \end{cases}$$

so dass $\Sigma \mathfrak{z} = 0$ ist. Dann geht (10), von einem Zahlenfactor abgesehen, in folgende Gleichung über:

$$(12) \quad (\Sigma \mathfrak{z}^2)^2 - (14 \pm 6\sqrt{-7}) \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3 \mathfrak{z}_4 = 0$$

und diese Gleichung bleibt bei den 24 Collineationen ungeändert, welche durch die Vertauschungen der $\mathfrak{z}$ *dargestellt sind. Dies also sind die Collineationen der betreffenden* G''_{24}.

Man sieht: bei den Collineationen einer G''_{24} bleibt allemal ein Kegelschnitt ungeändert:

$$\Sigma \mathfrak{z}^2 = 0,$$

welcher durch die Berührungspunkte der ausgezeichneten Doppeltangenten hindurchläuft. Da es $2 \cdot 7$ Gruppen G''_{24} giebt und alle Doppeltangenten unter einander gleichberechtigt sind, so giebt es $2 \cdot 7$ derartiger Kegelschnitte, von denen jedesmal sieben zusammengehörige die Berührungspunkte sämmtlicher Doppeltangenten ausschneiden. Diese Kegelschnitte werden weiterhin von grösster Wichtigkeit werden.

§ 5.

Die 168 Collineationen bezogen auf das Wendedreieck. Sonstige Formeln.

De Gleichungen, welche nach (4), (6) zwischen den Variablen λ, μ, ν und y_1, y_2, y_3 bestehen, lassen sich so schreiben:

$$(12a)\begin{cases} -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\lambda = y_1 + \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\mu = y_1 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\nu = y_1 + \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3. \end{cases}$$

Vertauscht man nun hier y_1, y_2, y_3 nach (8) mit $-y_1$, $-y_3$, $-y_2$ und schreibt dementsprechend:

$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\lambda' = -y_1 - \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\mu' = -y_1 - \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\nu' = -y_1 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$

eliminirt sodann zwischen beiden Gleichungssystemen die y_1, y_2, y_3, *so hat man offenbar den Uebergang von einem Wendedreiecke* $\lambda\mu\nu = 0$ *zu einem anderen* $\lambda'\mu'\nu' = 0$ *gefunden.* Die Rechnung ergiebt ein sehr einfaches Resultat, wenn man die bekannten Ausdrücke für die rechts stehenden Cubikwurzeln in dritten und siebenten Einheitswurzeln benutzt*). Sei nämlich:

$$(13)\qquad A = \frac{\gamma^5-\gamma^2}{\sqrt{-7}},\quad B = \frac{\gamma^3-\gamma^4}{\sqrt{-7}},\quad C = \frac{\gamma^6-\gamma}{\sqrt{-7}},$$
$$\sqrt{-7} = \gamma+\gamma^4+\gamma^2-\gamma^6-\gamma^3-\gamma^5,$$

so kommt einfach:

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda' = A\lambda + B\mu + C\nu, \\ \mu' = B\lambda + C\mu + A\nu, \\ \nu' = C\lambda + A\mu + B\nu. \end{cases}$$

Verbindet man nun diese Substitution (welche die Periode 2 hat) auf alle Weisen mit beliebigen Wiederholungen der beiden (2), (3):

$$\lambda' = \mu,\qquad \mu' = \nu,\qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma\lambda,\quad \mu' = \gamma^4\mu,\quad \nu' = \gamma^2\nu,$$

so hat man explicite die 168 Collineationen, welche die Curve vierter Ordnung, oder, besser gesagt, die ternäre biquadratische Form

---

*) Es ist

$$\sqrt[3]{7(3\alpha+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha\,(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha^2(\gamma^4+\gamma^3),$$
$$\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha^2(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha\,(\gamma^4+\gamma^3).$$

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda$$

in sich überführen.

An dieses Resultat anknüpfend lassen sich die Coordinaten sämmtlicher singulärer Elemente, welche unsere Curve besitzt, ohne Weiteres angeben; man hat jedesmal nur die Coordinaten eines einzigen Elementes der gewollten Art zu bestimmen und auf diese die 168 Collineationen anzuwenden. Auf solche Art ergeben sich sofort die Coordinaten der 24 Wendepunkte und der zugehörigen Wendetangenten. Was die Doppeltangenten angeht, so bemerke ich, dass die Doppeltangente $y_1 = 0$ des vorigen Paragraphen auf unser Wendedreieck bezogen die Gleichung erhält $\lambda + \mu + \nu = 0$, und dass die Berührungspunkte auf ihr die Coordinaten $1 : \alpha : \alpha^2$ resp. $1 : \alpha^2 : \alpha$ besitzen. Um endlich die 21 Axen der Perspectivität und die zugehörigen Centra zu bestimmen, genügt es, diese Elemente für die Substitution (14) auszurechnen. Man findet als Axe der Perspectivität:

$$(15) \qquad \lambda' + \lambda = \mu' + \mu = \nu' + \nu = 0$$

und entsprechend für die Coordinaten des Centrums:

$$-B - C : B : C$$

oder, was auf dasselbe hinaus kommt:

$$B : -B - A : A, \text{ resp. } C : A : -C - A.$$

Im Folgenden werde ich vor allen Dingen diejenigen Ausdrücke in λ, μ, ν gebrauchen, welche gleich Null gesetzt die *acht Wendedreiecke*, resp. die *zweimal sieben Kegelschnitte* darstellen, von denen am Ende des vorigen Paragraphen die Rede war. Ich will diese Ausdrücke hier so mittheilen, wie sie aus einander durch die 168 Substitutionen von der Determinante Eins hervorgehen.

Es sei das als Coordinatendreieck benutzte Wendedreieck mit δ_∞ bezeichnet und unter Zufügung eines später zweckmässigen Zahlenfactors rechter Hand gesetzt:

$$(16) \qquad \delta_\infty = -7\lambda\mu\nu.$$

Dann ergiebt sich für die übrigen Wendedreiecke ($x = 0, 1, \ldots 6$):

$$(17) \quad \delta_x = -7(A\gamma^x\lambda + B\gamma^{4x}\mu + C\gamma^{2x}\nu)\cdot(B\gamma^x\lambda + C\gamma^{4x}\mu + A\gamma^{2x}\nu)\cdot(C\gamma^x\lambda + A\gamma^{4x}\mu + B\gamma^{2x}\nu)$$

$$= +\lambda\mu\nu - (\gamma^{3x}\lambda^3 + \gamma^{5x}\mu^3 + \gamma^{6x}\nu^3) + (\gamma^{6x}\lambda^2\mu + \gamma^{3x}\mu^2\nu + \gamma^{5x}\nu^2\lambda) + 2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu + \gamma^x\nu^2\mu + \gamma^{2x}\mu^2\lambda).$$

Wir erhalten ferner für zwei der 14 Kegelschnitte, wenn wir in die Gleichung $\Sigma\mathfrak{z}^2 = 0$ des vorigen Paragraphen rückwärts die y und für diese die λ, μ, ν eintragen, unter Zufügung eines geeigneten Zahlenfactors:

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = 0.$$

Dementsprechend kommt, wenn wir allgemein die linke Seite der Kegelschnittsgleichung mit c_x bezeichnen, für $x = 0, 1, 2, \ldots 6$:

$$(18)\quad c_x = (\gamma^{2x}\cdot\lambda^2 + \gamma^x\cdot\mu^2 + \gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu + \gamma^{3x}\cdot\nu\lambda + \gamma^{5x}\cdot\lambda\mu).$$

Diese beiden Ausdrücke sind es, welche später die einfachsten Resolventen achten und siebenten Grades ergeben werden.

§ 6.

Aufstellung der Gleichung 168^{ten} Grades.

Als Unbekannte η der Gleichung 168^{ten} Grades kann, wie schon gesagt, jede auf unserer C_4 eindeutige Function, also jede rationale Function von $\lambda : \mu : \nu$ gewählt werden, welche in den 168 durch die Collineationen zusammengeordneten Punkten im Allgemeinen verschiedene Werthe aufweist. Es scheint am einfachsten, $\frac{\lambda}{\mu}$ oder $\frac{\lambda}{\nu}$ selbst zu wählen. Das Resultat gewinnt aber ausserordentlich an Uebersichtlichkeit, wenn wir nicht *einen* solchen Quotienten, sondern gleichzeitig *beide* einführen, die dann durch die Gleichung

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

an einander gebunden sind. Es lässt sich dann nämlich J als rationale Function 42^{ter} Ordnung von $\lambda : \mu : \nu$ dartellen

$$(19)\qquad J = R(\lambda, \mu, \nu),$$

wo R ein *sehr einfaches* Bildungsgesetz hat, und *diese Gleichung* (19) *von der* 42^{ten} *Ordnung zusammen mit der Gleichung vierter Ordnung* $f = 0$ *vertritt dann die eine Gleichung* 168^{ten} *Grades, von welcher bislang immer die Rede war.* Ein ähnliches Verfahren scheint allemal angebracht, wenn es sich um Aufstellung einer Gleichung handelt, deren Geschlecht p grösser als Null ist.

Die Function $R(\lambda, \mu, \nu)$ muss vor allen Dingen die Eigenschaft haben, bei den 168 Collineationen ungeändert zu bleiben. Um R zu finden beschäftige ich mich daher zunächst damit, alle *ganzen* Functionen von λ, μ, ν aufzustellen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Dabei wird selbstverständlicherweise vorausgesetzt, dass die 168 Collineationen mit der Determinante *Eins* genommen werden. — Wir kennen *eine* solche ganze Function, das ist

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda;$$

wir wissen ferner, dass die *Covarianten* von f jedenfalls dieselbe Eigenschaft haben. Eine leichte Discussion zeigt dann, dass sich die Covarianten von f mit den gesuchten Functionen decken, und lässt zugleich ihr volles System mit den zwischen den Systemformen bestehenden Relationen aufstellen. Die rationale Function R erweist sich als die einfachste aus den Covarianten zu bildende Verbindung nullter Dimension. — Das ist dieselbe Methode, deren sich Gordan und ich in unseren neueren Arbeiten wiederholt bedienten.

Wir haben als erste Covariante von f die Hesse'sche ∇ von der sechsten Ordnung:

$$(20) \qquad \nabla = \frac{1}{54} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} \end{vmatrix} = 5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda).$$

Gleich Null gesetzt bestimmt sie auf $f = 0$ die 24 Wendepunkte, also in der That eine Gruppe zusammengehöriger Punkte. Nun gab es auf $f = 0$ keine andere Gruppe von nur 24 Punkten und überhaupt keine von einer geringeren Punktzahl. Wir schliessen daraus, dass es keine ungeändert bleibende ganze Function von geringerer als sechster Ordnung geben kann, und dass jede Function sechster Ordnung bis auf einen Zahlenfactor mit ∇ übereinstimmen muss. Gäbe es nämlich noch eine andere Function der sechsten Ordnung, so würde sich dieselbe jedenfalls in der Form

$$k \cdot \nabla + l \cdot \varphi \cdot f$$

darstellen lassen, wo k, l Constante sind, — denn gleich Null gesetzt muss sie auf $f = 0$ eben auch die 24 Wendepunkte bestimmen. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Function zweiten Grades und eine solche Function kann, wie oben bemerkt, nicht existiren. Genau ebenso schliesst man: *Die nächst höhere in Betracht kommende ganze Function ist vom Grade* 14 *und schneidet, gleich Null gesetzt, aus* $f = 0$ *die* 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten aus.*

Nun kann man auf verschiedene Weisen eine Covariante vierzehnter Ordnung bilden. Bekanntlich gab schon Hesse für die allgemeine Curve vierter Ordnung eine Curve vierzehnter Ordnung an, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. In unserem Falle geschieht das von *jeder* Covariante 14ter Ordnung, die nicht eben ein Multiplum von $f^2\nabla$ ist, und es genügt also, irgend eine hinzuschreiben. Ich wähle:

$$(21) \qquad C = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \nu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial \nu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \mu} & \frac{\partial^3 f}{\partial \nu^2} & \frac{\partial \nabla}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \nabla}{\partial \lambda} & \frac{\partial \nabla}{\partial \mu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \nu} & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^{14} + \mu^{14} + \nu^{11}) + \cdots$$

Ich bilde mir ferner *eine Function vom* 21^{ten} *Grade, die Functionaldeterminante von* f, ∇, C:

$$(22)\qquad K = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \lambda} & \frac{\partial \nabla}{\partial \lambda} & \frac{\partial C}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \mu} & \frac{\partial C}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} & \frac{\partial \nabla}{\partial \nu} & \frac{\partial C}{\partial \nu} \end{vmatrix} = -(\lambda^{21} + \mu^{21} + \nu^{21}) \cdots$$

Gleich Null gesetzt ergiebt K auf $f = 0$ die 84 sextaktischen Punkte. Man kann auch wieder erschliessen, dass es ausser K keine ungeändert bleibende Function von der 21^{ten} Ordnung giebt. Denn eine solche müsste sich in der Gestalt darstellen lassen:

$$kK - l\varphi f^{\nu},$$

wo k, l Constante bedeuten. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Function vom Grade $21 - 4\nu$, schnitte also, gleich Null gesetzt, aus $f = 0$ eine Anzahl von Punkten aus, die durch 4 aber nicht durch 8 theilbar wäre. Nun umfassen die einzigen Punktgruppen, welche hier in Betracht kommen können, 24 und 56 Punkte; daher hat man Widerspruch. Jetzt erinnere man sich, dass wir früher die 84 sextaktischen Punkte durch 21 gerade Linien, *die 21 Axen der Perspectivität,* ausgeschnitten haben (siehe Gleichung (15)). Es folgt also:

Die Gleichung $K = 0$ *stellt das Aggregat der 21 Axen dar.*

Will man *allgemein* 168 zusammengehörige Punkte auf $f = 0$ ausschneiden, so genügt es offenbar, den Curvenbüschel

$$\nabla^7 = k\, C^3$$

für veränderliches k zu betrachten. Hieraus folgt vor allen Dingen, *dass man für geeignete Werthe von* k, l *unter der Bedingung* $f = 0$ *eine Relation folgender Form hat:*

$$(23)\qquad \nabla^7 = k \cdot C^3 + l \cdot K^2,$$

es folgt dann aber ferner, *dass* f, ∇, C, K, *zwischen denen diese eine Relation besteht, das volle System der in Betracht kommenden Formen bilden und also um so mehr das volle System der Covarianten von* f.

Um die in (23) vorkommenden Constanten k, l zu bestimmen, setze ich zunächst $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Dann wird nach Formel (20), (21), (22):

$$(23)\qquad \nabla = 0 \quad C = 1, \quad K = -1$$

und übrigens $f = 0$. Also folgt:

$$k = -l.$$

Ich nehme ferner für f die Form (6):

$$f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}} \cdot \{y_1^4 + 21 y_1^2 y_2 y_3 - 147 y_2^2 y_3^2 + 49 y_1 (y_2^3 + y_3^3)\}$$

und berechne einige Terme von ∇, C, K. So kommt:

$$\nabla = \frac{1}{27}\{7^2 \cdot y_3^6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y_1 y_2 y_3^4 \cdots\},$$

$$C = \frac{2^3 \cdot 7^5 \cdot \sqrt[3]{7}}{3^6} y_2 y_3^{13} \cdots,$$

$$K = \frac{-2^3 \cdot 7^7}{3^9} \cdot y_3^{21} \cdots.$$

Setzt man nun hier $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, so ergiebt sich ausser $f=0$:

$$\nabla = \frac{7^2}{3^3}, \quad C = 0, \quad K = \frac{-2^3 \cdot 7^7}{3^9} \tag{23 b}$$

und also:

$$l = \frac{1}{2^6 \cdot 3^3}, \quad k = \frac{-1}{2^6 \cdot 3^3}.$$

Die Relation zwischen ∇, C, K lautet daher:

$$(-\nabla)^7 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{K}{216}\right)^2. \tag{24}$$

Auf Grund dieser Relation bestimmt sich jetzt die Function $R(\lambda, \mu, \nu) = J$ unmittelbar. J soll in den Berührungspunkten der Doppeltangenten gleich Null werden, in den sextaktischen Punkten gleich Eins, in den Wendepunkten unendlich, es soll überdies jeden anderen Werth in 168 zusammengehörigen Punkten und nur in diesen annehmen. *Daher hat man folgende Gleichung:*

$$J : J - 1 : 1 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 : 27\left(\frac{K}{216}\right)^2 : -\nabla^7 \tag{25}$$

und diese Gleichung, zusammen mit

$$f = 0$$

repräsentirt das Problem 168^{ten} *Grades, dessen Formulirung unsere Aufgabe war.*

Will man statt J die Invarianten g_2, g_3, Δ des elliptischen Integrals benutzen, so kann man auch schreiben:

$$\begin{cases} g_2 = \dfrac{C}{12}, \\ g_3 = \dfrac{K}{216}, \\ \sqrt[7]{\Delta} = -\nabla. \end{cases} \tag{26}$$

§ 7.

Resolventen niederen Grades.

Die Gruppe der 168 Collineationen besass Untergruppen G_{21}' und G_{24}' von 21 bez. 24 Collineationen. Demnach besitzt unser Problem

168^{ten} Grades Resolventen vom achten und vom siebenten Grad. Wie diese Resolventen in einfachster Form lauten werden, kann nicht zweifelhaft sein. Denn es müssen eben diejenigen Gleichungen achten und siebenten Grades sein, welche ich früher von der directen Betrachtung der ω-Substitutionen ausgehend als einfachste ihrer Art aufgestellt habe. Es handelt sich also nur mehr darum, von den jetzigen Betrachtungen aus den Uebergang zu jenen Gleichungen zu finden. Dies gelingt (wie immer bei diesen Untersuchungen) auf doppelte Weise.

Entweder, man sucht die einfachste *rationale* Function $r(\lambda, \mu, \nu)$, welche in den durch die G'_{21} oder die G''_{24} zusammengeordneten Punkten denselben Werth annimmt, und fragt, wie sie mit J zusammenhängt. —

Oder, man bestimmt die niedrigste *ganze* Function von λ, μ, ν, welche bei den Substitutionen der G'_{21} resp. der G''_{24} ungeändert bleibt und bestimmt ihren Zusammenhang mit ∇, C, K, bez. Δ, g_2, g_3.

Beide Methoden haben ihre eigenthümlichen Vorzüge, und so mag im Folgenden die zweite der ersten jedesmal als Ergänzung beigegeben sein.

§ 8.

Die Resolvente vom achten Grade.

Betrachten wir die G'_{21}, welche durch Combination folgender Substitutionen entsteht:

$$\lambda' = \mu, \qquad \mu' = \nu, \qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma \cdot \lambda, \quad \mu' = \gamma^4 \cdot \mu, \quad \nu' = \gamma^2 \cdot \nu.$$

Ungeändert bleibt bei ihr vor allen Dingen das Wendedreieck $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$ (16), ungeändert bleibt ferner jedenfalls ∇, also auch die rationale Function $\sigma = \frac{\delta_\infty^2}{\nabla}$. Ueberdies hat letztere die Eigenschaft, jeden vorgegebenen Werth nur in 21 Punkten von $f=0$ anzunehmen, denn der Büschel von Curven sechster Ordnung $\delta_\infty^2 - \sigma\nabla = 0$ hat drei feste Grundpunkte, die Coordinateneckpunkte, einfach zählend mit $f=0$ gemein. Wenn wir also, wie nun geschehen soll, σ als Unbekannte einführen, *so wird J eine rationale Function achten Grades von σ*:

$$J = \frac{\varphi(\sigma)}{\psi(\sigma)}. \tag{27}$$

Bestimmen wir jetzt — wie ich es bei analogen Aufgaben wiederholt that — welche Multiplicität den einzelnen Factoren in φ, ψ, $\varphi - \psi$ zukommt.

J wird unendlich in den 24 Wendepunkten, und zwar siebenfach. In dreien dieser Punkte wird σ siebenfach gleich Null, nämlich in den Coordinateneckpunkten; denn δ_∞ verschwindet in ihnen vierfach, ∇ nur einfach. In den übrigen 21 Wendepunkten wird σ des Nenners ∇ wegen unendlich, aber nur einfach. Daher besteht $\psi(\sigma)$ aus einem einfachen und einem siebenfachen Factor, von denen der erstere für $\sigma = 0$, der andere für $\sigma = \infty$ verschwindet. *Es ist also, von einem constanten Factor abgesehen, $\psi(\sigma)$ gleich σ.*

J wird Null in den 56 Berührungspunkten der Doppeltangenten, und zwar dreifach. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich die Doppeltangenten in $7 + 21$*), ihre Berührungspunkte also in $2 \,.\, 7 + 2 \,.\, 21$. In den ersteren nimmt σ den ihm zukommenden Werth dreifach, in den anderen nur einfach an. Das heisst: *φ enthält zwei einfache und zwei dreifache lineare Factoren.*

J wird endlich gleich Eins und zwar doppelt, in den 84 sextaktischen Punkten. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich diese Punkte in $4 \,.\, 21$, σ nimmt an jeder dieser Stellen seinen Werth nur einfach an. Daher: *$(\varphi - \psi)$ ist das volle Quadrat eines Ausdrucks vierten Grades (von nicht verschwindender Discriminante).*

Dies sind nun hinsichtlich φ, ψ, $\varphi - \psi$ eben dieselben Angaben, welche mich früher (pag. 141, 142) zur Aufstellung der Modulargleichung achten Grades führten:

$$(28) \qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ & : (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 \\ & : 1728\tau. \end{aligned}$$

Zu eben dieser Gleichung gelangen wir also auch jetzt, wenn wir ein geeignetes Multiplum von σ mit τ bezeichnen.

Um dieses Multiplum zu bestimmen, gehe ich zu dem Coordinatensystem der y zurück (Formel (12a)). Es ist dann $7^2\lambda^2\mu^2\nu^2$ vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ gleich $\frac{(5-3\alpha)\cdot 7^2}{3^3}$, und vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ gleich $\frac{(5-3\alpha^2)\cdot 7^2}{3^3}$. Für ∇ hat man in beiden Fällen (Formel (23b)) $\frac{7^2}{3^3}$, daher für σ bezüglich die Werthe $(5 - 3\alpha)$ und $(5 - 3\alpha^2)$. Aber die beiden Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = \left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.$, $y_3 = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ sind die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$, d. h. einer von den sieben durch die G'_{21} zusammengeordneten Doppeltangenten. Demnach ist für ihn $J = 0$ und es verschwindet in (28) insbesondere der einfache Factor $\tau^2 + 13\tau + 49$. Dessen Wurzeln lauten $3\alpha - 5$ und $3\alpha^2 - 5$. *Daher ist einfach:*

$$\tau = -\sigma$$

oder anders ausgesprochen:

*) Derartige Angaben verificirt man sofort durch die früher mitgetheilten Formeln.

Eine Wurzel τ der Gleichung (28) *hat den Werth:*

$$(29)\qquad \tau_\infty = -\frac{\delta_\infty^2}{\nabla} = \frac{-7^2\lambda^2\mu^2\nu^2}{\nabla}.$$

Dann folgt aus (17), *dass die übrigen Wurzeln τ_x folgende Werthe aufweisen:*

$$(30)\quad \tau_x = \frac{-\delta_x^2}{\nabla} = -\frac{\left\{\begin{array}{c}\lambda\mu\nu-(\gamma^{3x}\lambda^3+\gamma^{5x}\mu^3+\gamma^{6x}\nu^3)+(\gamma^{6x}\lambda^2\mu+\gamma^{3x}\mu^2\nu+\gamma^{5x}\nu^2\lambda)\\ +2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu+\gamma^{x}\nu^2\mu+\gamma^{2x}\mu^2\lambda)\end{array}\right\}^2}{\nabla}$$

und somit haben wir, wie es in der Einleitung verlangt wurde, die Wurzeln der Modulargleichung achten Grades als rationale Functionen eines Punktes der Curve $f=0$ dargestellt.

Die Gleichung (28) lässt sich, wie ich bereits pag. 148 erwähnte, in der Weise umgestalten, dass man statt τ schreibt z^2, statt $J-1$ $\frac{27g_3^2}{\Delta}$ und nun beiderseits die Quadratwurzel zieht. So kommt:

$$(31)\qquad z^8+14z^6+63z^4+70z^2-\frac{216\,g_3}{\sqrt{\Delta}}\cdot z-7=0,$$

wo wir nach Formel (26)

$$\frac{216\,g_3}{\sqrt{\Delta}} = \frac{K}{\sqrt{-\nabla^7}}$$

setzen können. Tragen wir hier für z nach (29), (30) seinen Werth $\frac{\delta}{\sqrt{-\nabla}}$ ein, so erhalten wir folgende Relation:

$$(32)\qquad \delta^8-14\delta^6\nabla+63\delta^4\nabla^2-70\delta^2\nabla^3-\delta K-7\nabla^4=0.$$

Das Zeichen des vorletzten Gliedes bestimmt sich so, wie es angegeben ist, wenn man etwa für λ, μ, ν die Werthe 1, 0, 0 und für δ irgend einen der Werthe δ_x einträgt.

Eben auf diese Gleichung (32) *wird man nun geführt, wenn man sich des formentheoretischen Ansatzes bedient.* Die einfachste *ganze* Function von λ, μ, ν nämlich, welche bei der G'_{21} ungeändert bleibt, ist $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$. Bei den 168 Collineationen nimmt δ acht verschiedene Werthe an, deren symmetrische Functionen ganze Functionen von ∇, C, K sein müssen (da $f=0$ genommen ist). Somit genügt δ einer Gleichung achten Grades, die wegen der Dimension von ∇, C, K nothwendig folgende Gestalt hat:

$$\delta^8+a\nabla\cdot\delta^6+b\nabla^2\cdot\delta^4+c\nabla^3\cdot\delta^2+dK\cdot\delta+e\nabla^4=0,$$

und bestimmt man hier die Coefficienten a, b, ... e, indem man für δ, ∇, K ihre Werthe in λ, μ, ν einträgt und übrigens $f=0$ berücksichtigt, so gelangt man eben zur Gleichung (32). Diese Ableitung hat den Vorzug, dass sie a priori übersehen lässt, wesshalb in (32) nur gewisse Potenzen von δ vorkommen.

§ 9.

Berührungscurven dritter Ordnung. — Auflösung der Gleichung 168ten Grades.

Die acht Wurzeln der Gleichung (32) drücken sich nach (16), (17) folgendermassen aus:

$$(33)\quad \begin{cases} \delta_\infty = -7\lambda\mu\nu, \\ \delta_x = \lambda\mu\nu - \gamma^{-x}(\nu^3 - \lambda^2\mu) - \gamma^{-4x}(\lambda^3 - \mu^2\nu) - \gamma^{-2x}(\mu^3 - \nu^2\lambda) \\ \qquad + 2\gamma^x \cdot \nu^2\mu \qquad + 2\gamma^{4x} \cdot \lambda^2\nu \qquad + 2\gamma^{2x} \cdot \mu^2\lambda. \end{cases}$$

Nun gab ich bereits in meiner vorigen Arbeit an (pag. 148), dass die Gleichung (31) und also auch die Gleichung (32) *eine Jacobi'sche Gleichung achten Grades ist*, das heisst, dass sich die aus ihren Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln mit Hülfe von vier Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 folgendermassen zusammensetzen lassen*):

$$(34)\quad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7} \cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_x} = \qquad A_0 + \gamma^{\varrho x} A_1 + \gamma^{4\varrho x} A_2 + \gamma^{2\varrho x} A_3. \end{cases}$$

(ϱ bedeutet hier irgend eine durch 7 nicht theilbare ganze Zahl). Es fragt sich, wie sich diese Angabe, die ich der l. c. mitgetheilten transcendenten Auflösung von (31) entnommen hatte, algebraisch bestätigt. Dies erledigt sich durch die Betrachtung gewisser *Berührungscurven dritter Ordnung***), welche unsere Curve $f = 0$ besitzt, oder, anders ausgesprochen, durch die Betrachtung gewisser *auf* $f = 0$ *existirender Wurzelfunctionen dritter Ordnung.*

Eine Curve vierter Ordnung hat bekanntlich 64 dreifach unendliche Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung, 36 von *gerader*, 28 von *ungerader* Charakteristik. *Es ist nun hier ein System von gerader Charakteristik dadurch ausgezeichnet, dass es die acht Wendedreiecke als Berührungscurven in sich schliesst.*

Jedenfalls kann ein Wendedreieck unmittelbar als Berührungscurve dritter Ordnung betrachtet werden, indem seine 12 Durchschnittspunkte

---

*) Wegen der Jacobi'schen Gleichungen achten Grades vergl. eine Notiz von Brioschi in den Rendiconti del Istituto Lombardo von 1868 (erläutert von Jung und Armenante im 7ten Bande des Giornale di Matematiche, pag. 98 ff.), sowie eine im Texte noch nicht verwerthete Bemerkung am Schlusse meiner wiederholt citirten Erlanger Note. Ich hoffe bald ausführlicher auf den Gegenstand zurückkommen zu können. (Vergl. auch die neuerdings erschienene Arbeit Brioschi's: Sopra una classe di equazioni modulari, Annali di Matematica, t. IX. [Dec. 1878]).

**) D. h. Curven dritter Ordnung, welche $f = 0$ sechsmal einfach berühren.

mit der Curve vierter Ordnung sogar in nur *drei* Schnittpunkte (zu je vier) zusammenfallen. Betrachten wir nun etwa das Dreieck δ_∞. Durch seine Schnittpunkte mit der C_4 legen wir die dreifach unendliche Zahl von Curven dritter Ordnung, welche in ihnen die C_4 berühren; ihre Gleichung ist:

$$(35) \qquad k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda = 0.$$

Sie schneiden jede die C_4 in noch sechs weiteren Punkten, und in diesen Punkten berührt dann, wie bekannt, eine neue Curve dritter Ordnung desselben Systems, zu welchem δ_∞ gehört; zugleich erzielt man auf diese Weise *alle* Curven des fraglichen Systems. Nun findet man die Identität:

$$(36) \quad \begin{aligned}&(k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda)^2 - (a^2\lambda\mu + b^2\mu\nu + c^2\nu\lambda)\cdot f \\ &= \lambda\mu\nu\cdot\{k^2\lambda\mu\nu - (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &\qquad + [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^2)\nu^2\lambda]\}.\end{aligned}$$

Die Gesammtheit der in Betracht kommenden Berührungscurven dritter Ordnung ist daher durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(37) \quad \begin{aligned}0 = {}& k^2\lambda\mu\nu - (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &+ [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^2)\nu^2\lambda].\end{aligned}$$

Setzt man nun hier

$$k = 1, \quad a = \gamma^{-x}, \quad b = \gamma^{-4x}, \quad c = \gamma^{-2x},$$

so entsteht rechter Hand der Ausdruck δ_x, und es gehören also, wie behauptet wurde, die acht Wendedreiecke demselben Systeme von Berührungscurven an.*)

Nun kommen die Formeln (34) einfach auf den Satz zurück, *dass sich die Wurzelfunctionen eines Systems gerader Charakteristik linear aus vier unabhängigen zusammensetzen lassen.* Man wähle nämlich solche vier Wurzelfunctionen, welche Berührungscurven (37) entsprechen, für die der Reihe nach

$$k = 1, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$
$$k = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0 \text{ etc.}$$

genommen ist, und setze dementsprechend:

$$(38) \quad \begin{cases} A_0 = \sqrt{\lambda\mu\nu}, \\ A_1 = \sqrt{-\mu^3 - \nu^2\lambda}, \quad A_2 = \sqrt{-\nu^3 - \lambda^2\mu}, \quad A_3 = \sqrt{-\lambda^3 - \mu^2\nu}. \end{cases}$$

*) Dass dies System von *gerader* Charakteristik ist, folgt aus der sogleich anzugebenden irrationalen Gleichungsform.

Dann hat man bei richtiger Wahl der Vorzeichen vermöge $f=0$ folgende Relationen:

$$(39)\qquad \begin{cases} A_0 A_1 = \lambda^2\mu, & A_0 A_2 = \mu^2\nu, \quad A_0 A_3 = \nu^2\lambda, \\ A_1 A_2 = \lambda\mu^2, & A_2 A_3 = \mu\nu^2, \quad A_3 A_1 = \nu\lambda^2, \text{*)} \end{cases}$$

und es lässt sich die Gleichung (37) in folgender irrationaler Form schreiben:

$$(40)\qquad k A_0 + a A_1 + b A_2 + c A_3 = 0.$$

Insbesondere wird mit Rücksicht auf (33):

$$(41)\qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_x} = \qquad A_0 + \gamma^{-x}\cdot A_1 + \gamma^{-4x}\cdot A_2 + \gamma^{-2x} A_3. \end{cases}$$

Dies sind nun in der That die Formeln (34), *indem nur statt der damals unbestimmt gelassenen Zahl* ϱ *jetzt* (-1) *gesetzt ist.*

Man kann diese Formeln benutzen, um unsere Gleichung 168^ten Grades explicite durch elliptische Functionen zu lösen**). Die Wurzeln δ von (32) sind den Wurzeln z von (31) proportional, und für letztere gab ich pag. 145, 148 meiner vorigen Arbeit den Ausdruck in $q = e^{i\pi\omega}$ an. Dementsprechend haben wir hier:

$$(42)\qquad \delta_\infty : \delta_x = -7\sqrt[6]{q^7}\cdot\Pi(1-q^{14n})^2 : \sqrt[6]{\gamma^x\cdot q^{1/7}}\,\Pi\left(1-\gamma^{2nx}\cdot q^{\frac{2n}{7}}\right)^2.$$

Die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke liefern vermöge der Reihenentwickelung

$$q^{\frac{1}{12}}\cdot\Pi(1-q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\cdot q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}$$

die A_0, A_1, A_2, A_3 ihrem Verhältnisse nach, und benutzt man nun, dass nach Formel (39):

$$(43)\qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{A_0}{A_2},\quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{A_0}{A_3},\quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{A_0}{A_1}$$

ist, so findet man folgende Lösungen der Gleichung 168^ten *Grades:*

---

*) In Folge dessen hat man zwischen den A_0, A_1, A_2, A_3 eine Reihe identischer Relationen, welche alle durch Nullsetzen folgender Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & -A_2 & 0 \\ A_2 & 0 & A_0 & -A_3 \\ A_3 & -A_1 & 0 & A_0 \end{vmatrix}$$

erhalten werden.

**) Sie muss sich auch durch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung lösen lassen; wie hat man dieselbe aufzustellen?

$$(44)\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\mu}=q^{\frac{4}{7}}\cdot\dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+h}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+13h+2}},\\[2ex] \dfrac{\mu}{\nu}=q^{\frac{2}{7}}\cdot\dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+19h+4}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+37h+16}},\\[2ex] \dfrac{\nu}{\lambda}=q^{\frac{1}{7}}\cdot\dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h}\cdot q^{21h^2+25h+7}+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+31h+11}}.\end{cases}$$

Es genügt, dieses eine Lösungssystem zu berechnen, denn die 167 anderen ergeben sich aus diesem einen durch die Collineationen des § 5.

Ich habe dabei nur die *Verhältnisse* $\lambda:\mu:\nu$ berechnet; will man von der Formulirung ausgehen, wie sie Gleichung (26) vertritt, so erhält man natürlich entsprechende Formeln für die *absoluten Werthe* von λ, μ, ν.

§ 10.

Die Resolvente siebenten Grades.

Bei den Substitutionen einer G_{24}'' blieb jedesmal ein Kegelschnitt c_x ungeändert, welcher die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten ausschnitt; nach Gleichung (18) können wir setzen:

$$(45)\quad c_x=(\gamma^{2x}\cdot\lambda^2+\gamma^{x}\cdot\mu^2+\gamma^{4x}\cdot\nu^2)+\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu+\gamma^{3x}\cdot\nu\lambda+\gamma^{5x}\cdot\lambda\mu).$$

Bilden wir jetzt die rationale Function:

$$(46)\qquad x=\frac{c_x^3}{\nabla}\cdot$$

Da Zähler und Nenner bei den 24 Substitutionen der G_{24}'' ungeändert bleiben, da ferner der Büschel von Curven sechster Ordnung $\nabla-x\cdot c_x{}^3=0$ keine festen Grundpunkte mit der C_4 gemein hat, so schliessen wir, dass x jeden Werth einmal in solchen 24 Punkten annimmt, welche durch die 24 Substitutionen der G_{24}'' zusammengeordnet werden. Daher:

J ist eine rationale Function siebenten Grades von x:

$$(47)\qquad J=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot$$

Wir betrachten nun wieder die Werthe $J=\infty,0,1$.

Die 24 Wendepunkte, in denen J siebenfach unendlich wird, bilden den Substitutionen der G_{24}'' gegenüber nur eine, einfach zählende Gruppe. $\psi(x)$ ist also die siebente Potenz eines linearen Factors.

Aber x wird, nach Formel (46) in den Wendepunkten selbst unendlich. *Daher ist* $\psi(x)$ *eine Constante.*

Von den 56 Berührungspunkten der 28 Doppeltangenten liegen acht auf $c_x = 0$, in ihnen also wird x dreifach Null. Die anderen 48 vertheilen sich auf 2 . 24 (welche je 12 Doppeltangenten angehören). Desshalb: φ *enthält neben dem einfachen Factor* x *noch die dritte Potenz eines quadratischen Factors von nicht verschwindender Discriminante.*

Die 84 sextaktischen Punkte endlich vertheilen sich den 24 Substitutionen der G_{24}'' gegenüber auf 3 . 12 + 2 . 24. Also: $\varphi - \psi$ *enthält einen cubischen Factor einfach und einen quadratischen doppelt.*

Nun sind es eben wieder diese an φ, ψ gestellten Forderungen gewesen, welche ich früher benutzte, um die einfachste Gleichung 7[ten] Grades aufzustellen (pag. 427), welche folgendermassen lautete:

$$(48)\qquad J:J-1:1=y\left(y^2-2^2\cdot7^2(7\mp\sqrt{-7})y+2^5\cdot7^4(5\mp\sqrt{-7})\right)^3$$
$$:\left(y^3-2^2\cdot7\cdot13(7\mp\sqrt{-7})y^2+2^6\cdot7^3(88\mp23\sqrt{-7})y\right.$$
$$\left.-2^6\cdot3^3\cdot7^4(35\mp9\sqrt{-7})\right)$$
$$\cdot\left(y^2-2^4\cdot7(7\mp\sqrt{-7})y+2^5\cdot7^3(5\mp\sqrt{-7})\right)^2$$
$$:\mp2^{27}\cdot3^3\cdot7^{10}\cdot\sqrt{-7}.$$

Wir schliessen, dass die Unbekannte y *bis auf einen constanten Factor mit unserem jetzigen* x *übereinstimmt, wobei es aber noch fraglich ist, ob das obere Vorzeichen von* $\sqrt{-7}$ *in* (45) *dem oberen oder dem unteren Vorzeichen in* (48) *entspricht.*

Um dies zu entscheiden, gestalte ich (48) zunächst in der Weise um, dass ich $y = z^3$, $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ setze und dann beiderseits die Cubikwurzel ziehe.

$$(49)\quad z^7-2^2\cdot7^2(7\mp\sqrt{-7})z^4+2^5\cdot7^4(5\mp\sqrt{-7})z\mp2^9\cdot3\cdot7^3\sqrt{-7}\cdot\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}=0.$$

Schreibt man hier nach Gleichung (26) statt $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ $\frac{C}{12\sqrt[3]{-\nabla^7}}$, trägt andererseits für z, unter k eine unbekannte Constante verstanden, ein $\frac{kc}{\sqrt[3]{\nabla}}$, so folgt:

$$(50)\qquad k^7c^7-2^2\cdot7^2(7\mp\sqrt{-7})k^4\cdot\nabla c^4+2^5\cdot7^4(5\mp\sqrt{-7})k\nabla^2c$$
$$\pm2^7\cdot7^3\sqrt{-7}\cdot C=0.$$

Dies giebt:

$$k^3\Sigma c_x{}^3=3\cdot2^2\cdot7^2(7\mp\sqrt{-7})\cdot(5\lambda^2\mu^2\nu^2-(\lambda^5\nu+\nu^5\mu+\mu^5\lambda)),$$
$$k^7\cdot\Pi c_x=\mp2^7\cdot7^3\cdot\sqrt{-7}(\lambda^{14}+\mu^{14}+\nu^{14}+\cdots),$$

(selbstverständlich vermöge $f = 0$). — *Die beiden Gleichungen werden nun in der That befriedigt, wenn man*

$$k = \pm 2\sqrt{-7}$$

wählt und dem oberen Vorzeichen in k das obere in (49) *und das untere in* (45) *entsprechen lässt.*

Mit anderen Worten: *Die Wurzeln z der Gleichung* (49), *resp. y der Gleichung* (48) *haben in λ, μ, ν folgende Werthe:*

$$(51)\quad z = y^{1/3} = \frac{\pm 2\sqrt{-7}\left\{(\gamma^{2x}\cdot\lambda^2 + \gamma^{x}\cdot\mu^2 + \gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1\mp\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu + \gamma^{3x}\cdot\nu\lambda + \gamma^{6x}\cdot\lambda\mu)\right\}}{\sqrt[3]{\nabla}}$$

und finden sich die y somit, wie es in der Einleitung verlangt wurde, als rationale Functionen eines Punktes unserer C_4 explicite angegeben.

Die Gleichung (50) aber geht in folgende über:

$$(52)\qquad c^7 + \frac{7}{2}(-1\mp\sqrt{-7})\nabla c^4 - 7\left(\frac{5\mp\sqrt{-7}}{2}\right)\nabla^2 c - C = 0.$$

Auf eben diese Gleichung würde der formentheoretische Ansatz selbstverständlich von vorneherein geführt haben. Denn die niedrigste ganze Function von λ, μ, ν, welche bei den 24 Substitutionen einer G_{24}'' ungeändert bleibt, ist eben das zugehörige c_x, und dieses c_x muss einer Gleichung siebenten Grades genügen, deren Coefficienten ganze Functionen von ∇, C, K sind, die also, wegen der Dimension dieser Formen in λ, μ, ν, jedenfalls folgende Gestalt hat:

$$c^7 + \alpha\nabla c^4 + \beta\nabla^2 c + \gamma C = 0,$$

wo nun α, β, γ durch Eintragung der Werthe in λ, μ, ν zu bestimmen sind. Dieser Ansatz hat wieder den Vorzug, a priori zu zeigen, dass in (52) resp. (49) eine grosse Anzahl von Gliedern fehlen müssen.

§ 11.

Ersetzung der Riemann'schen Fläche des § 2. durch eine regulär eingetheilte Oberfläche.

Ich wünsche nun noch die Beziehung der Irrationalität $\lambda : \mu : \nu$ zu der absoluten Invariante J, resp. zu den Wurzeln τ und y der Gleichungen achten und siebenten Grades so anschaulich, wie möglich, durch die Hülfsmittel der Analysis situs zu erläutern. Dabei erinnere ich zunächst an die Figuren, welche ich pag. 136, 137 für die Gleichung achten Grades und auf den beiden der vorangehenden Arbeit beigefügten Tafeln für die Gleichungen siebenten Grades gegeben habe, und beginne übrigens mit einer allgemeinen Erläuterung betreffend solche *Riemann'sche Flächen, die zu Galois'schen Resolventen mit einem rational vorkommenden Parameter gehören* (vergl. p. 148 ff.). Es sei $F(\eta, z) = 0$ eine derartige Gleichung vom Grade N, die dann die charakteristische Eigenschaft hat, dass jede Wurzel η_i in Bezug auf den Parameter z ebenso verzweigt ist, wie jede andere η_k, und die dementsprechend durch N eindeutige Transformationen in sich übergeht (siehe § 2. dieser Arbeit). Die complexen Werthe von z mögen in eine Ebene ausgebreitet werden, und $z_1, z_2, \ldots z_n$ sollen diejenigen Stellen sein, an denen Verzweigungen stattfinden. Diese Verzweigungen sind für alle Blätter gleichmässig; ich will annehmen, dass in z_1 je ν_1 Blätter, in z_2 je ν_2 Blätter etc. zusammenhängen. Man lege dann in der z-Ebene durch $z_1, z_2, \ldots z_n$ irgend eine in sich zurückkehrende Curve (einen Absonderungsabschnitt), welche die Ebene z und gleichzeitig jedes der N über ihr hinerstreckten Blätter der η versinnlichenden Riemann'schen Fläche in zwei Gebiete zerlegt. Das eine Gebiet denke ich mir schraffirt, das andere freigelassen, — und verwandele nun die über der z-Ebene mehrblättrig verlaufende Fläche unter Beibehaltung der Schraffirung in eine im Raume gelegene stetig gekrümmte Fläche von gleichem Zusammenhange. Dieselbe ist dann in $2N$ abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte n-Ecke zerlegt, welche in den verschiedenen Ecken bezüglich zu $2\nu_1, 2\nu_2, \ldots 2\nu_n$ zusammenstossen, und die, im Sinne der Analysis situs, abwechselnd congruent und symmetrisch sind; die Kanten dieser Polygone sind das Bild des in der *z-Ebene* gezogenen Absonderungsschnittes. Die N eindeutigen Transformationen der Gleichung $F(\eta, z) = 0$ in sich sprechen sich darin aus, dass man die so erhaltene Fläche auf N Weisen eindeutig auf sich selbst beziehen kann. Man ordne nämlich einem beliebigen schraffirten oder nicht schraffirten n-Ecke der Fläche ein beliebiges anderes zu, das ebenfalls schraffirt oder nicht schraffirt ist: setzt man dann fest, dass nebeneinanderliegenden n-Ecken ebensolche entsprechen sollen, so wird vermöge der ersten Zuordnung *jedem* n-Eck unserer Fläche ein und nur ein bestimmtes anderes *n-Eck* entsprechen. Ich will Oberflächen, welche in diesem Sinne in alternirende Gebiete getheilt sind, *als regulär eingetheilte Oberflächen* bezeichnen; sie umfassen als besonderen Fall, bei $p = 0$, diejenigen Eintheilungen der Kugelfläche in 24, 48, 120 Dreiecke, welche man beim Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder kennt. — Wir können dann den allgemeinen Satz aussprechen:

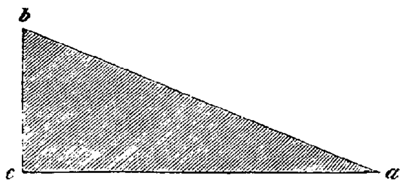
Jede Galois'sche Resolvente $F(\eta, z) = 0$ wird durch eine regulär eingetheilte Oberfläche versinnlicht.

Und auch umgekehrt: *Jede regulär eingetheilte Oberfläche definirt eine besondere Classe Galois'scher Resolventen mit einem Parameter.* Denn sie definirt eine Verzweigung von η in Bezug auf z von der

Eigenschaft, dass jede Wurzel η_i sich durch jede andere η_k und den Parameter z rational ausdrückt*).

In dem besonderen Falle nun, der hier vorliegt, haben wir 168 Blätter und drei Verzweigungspunkte. Indem ich statt z wieder J schreibe, entsprechen die letzteren $J = 0, 1, \infty$. Bei $J = 0$ hängen die Blätter zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei, bei $J = \infty$ zu je sieben zusammen. Dementsprechend erhalten wir zur Versinnlichung unserer Irrationalität eine regulär eingetheilte Oberfläche, *welche von* $2 \,.\, 168$ *Dreiecken überdeckt ist, die* 24-*mal zu vierzehn*, 56-*mal zu sechs*, 84-*mal zu vier zusammenstossen.* Die Ecken dieser Dreiecke sind keine anderen als die früher (§ 2.) so genannten Punkte a, b, c, eine Bezeichnung, an der ich auch jetzt festhalten will. — Der Absonderungsschnitt in der Ebene J mag fortan so gewählt sein, dass er mit der reellen Axe zusammenfällt. Dann entsprechen die zweierlei Dreiecke, welche unsere Fläche überdecken, den beiden Halbebenen J, *die Kanten der Dreiecke also den reellen Werthen von* J. Ich will (wie ich es immer that) diejenigen Gebiete schraffiren, welche der positiven Halbebene J entsprechen. So hat man bei den schraffirten Dreiecken folgende Aufeinanderfolge der Ecken:

Fig. 1.



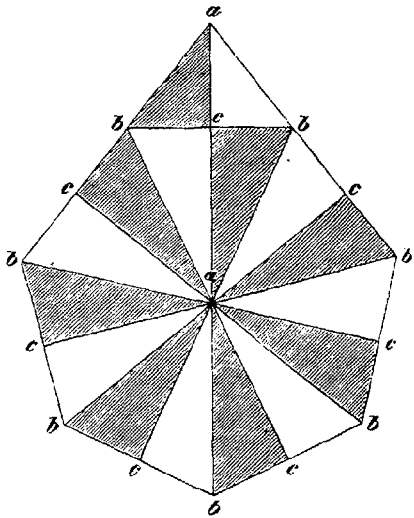
Vergleichen wir die so definirte Fläche mit der in unendlich viele Dreiecke eingetheilten ω-Ebene (p. 115), so ist vor allen Dingen deutlich, dass sich unsere Irrationalität über *ein* schraffirtes resp. nicht schraffirtes Dreieck bewegt, wenn ω ein schraffirtes oder nicht schraffirtes Dreieck durchläuft. Nun erläuterte die Zeichnung auf pag. 136 die Beziehung zwischen ω und der Wurzel τ der Modulargleichung achten Grades, die Figuren 4, 5 auf der ersten der vorangehenden Arbeit beigegebenen Tafel die Beziehung zwischen ω und der Wurzel y der Gleichung siebenten Grades. Uebertragen wir diese Figuren auf unsere regulär eingetheilte Fläche, und beachten, dass τ und y *rationale* Functionen von $\lambda : \mu : \nu$ sind, dass also jedem Punkte unserer Fläche nur ein Werth von τ und ein Werth von y entspricht so erhalten wir folgende Sätze:

---

*) Es scheint eine sehr nützliche Aufgabe zu sein, für die niedrigsten p alle regulär eingetheilten Oberflächen aufzuzählen und die zugehörigen Gleichungen $F(\eta, z) = 0$ zu untersuchen.

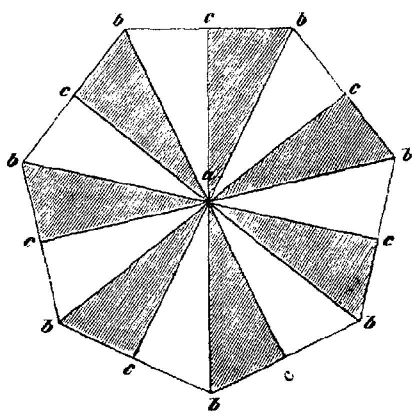
Unsere regulär eingetheilte Fläche kann in 21 Gebiete der folgenden Gestalt zerlegt werden:

Fig. 2.



sie kann ferner in 24 Siebenecke zerlegt werden, wie sie beistehende Figur versinnlicht.

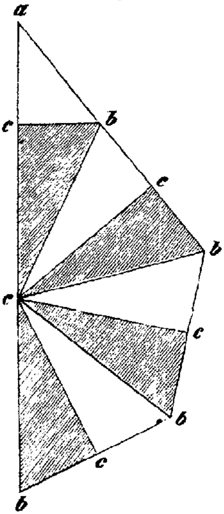
Fig. 3.



*Die Gebiete der ersten Art entsprechen der richtig zerschnittenen Ebene τ, die anderen der zweckmässig zerschnittenen Ebene y**).

*) Die Zusammenfassung in 24 Siebenecke ist also dem analog, dass man die 120 beim Ikosaeder auftretenden Dreiecke zu je 10 in die 12 Fünfecke des Pentagondodekaeders vereinigt.

Fig. 4.



Die Figur (2) wird durch ihre Mittellinie in zwei symmetrische Hälften zerlegt, von denen ich die eine hier besonders abzeichne.

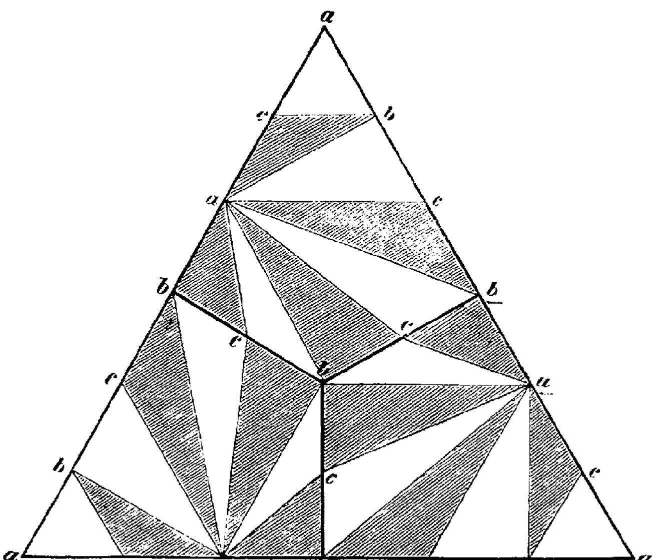
Wir können dann sagen: *Unsere Fläche wird von § 12. abwechselnd congruenten und symmetrischen Gebieten der durch diese Figur definirten Art überdeckt*).* An diese Zerlegung unserer Fläche will ich anknüpfen, um ein völlig deutliches Bild derselben zu entwickeln.

§ 12.

Erklärung der beigegebenen Tafel.

Die in Rede stehenden Gebiete legen sich auf unserer regulär eingetheilten Oberfläche jedenfalls folgendermassen zu je dreien an einander:

Fig. 5.

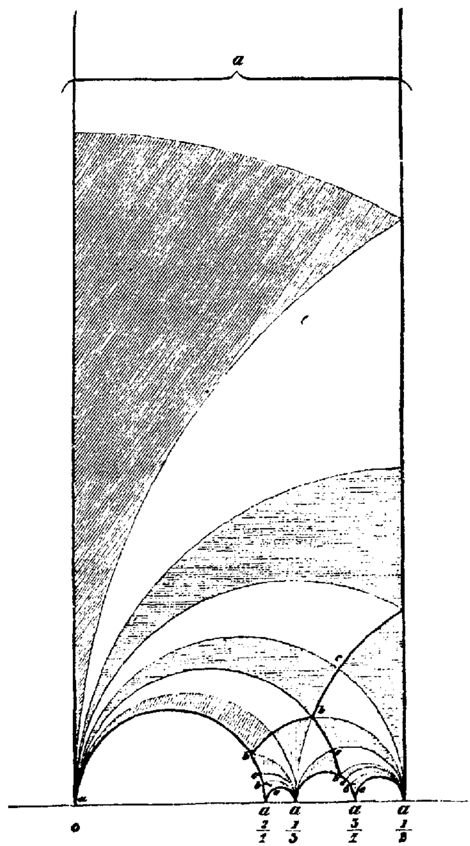


*) Jedes derartige Gebiet entspricht der richtig zerschnittenen Halbebene τ; siehe die Figur auf pag. 137

Die Figur nun, welche die beigegebene Tafel enthält, ist dadurch entstanden, dass ich 14 solcher grosser Dreiecke in abwechselnd symmetrischer Aufeinanderfolge um einen Mittelpunkt gruppirte. Dabei wählte ich, um eine möglichst übersichtliche Gestalt zu bekommen, die kleinen Dreiecke (welche den Halbebenen J entsprechen) als Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Ich behaupte: *Diese Figur ist das Bild unserer regulär eingetheilten Oberfläche, sofern wir die* 14 *Begränzungslinien derselben uns noch in geeigneter Weise paarweise verbunden denken.*

In der That enthält unsere Figur $2 \cdot 168$ kleine Kreisbogendreiecke, welche überall da, wo sie zusammenstossen, das von uns angegebene Verhalten zeigen. Von dieser Bemerkung ausgehend, kann man eine geeignete Verbindung der Begränzungslinien suchen, und dann den Beweis führen, dass eine andere Gruppirung der $2 \cdot 168$ Dreiecke, als die so erhaltene, nicht möglich ist.

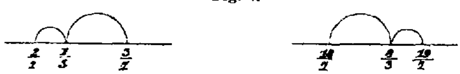
Fig. 6.



Um jedoch diese Betrachtung nicht zu abstract zu gestalten, greife ich zurück auf die ω-Ebene und zeichne in ihr zunächst dasjenige Aggregat von Elementardreiecken, welches Figur (5) entspricht. So erhalte ich das nebenstehende Bild.

Reiht man 14 derartige Figuren in abwechselnd symmetrischer Lage in der ω-Ebene an einander, so hat man, was der auf der Tafel enthaltenen Figur entspricht. Es handelt sich dann vor allen Dingen um den Nachweis, der sich sofort ergiebt, dass der so in der ω-Ebene abgegränzte Raum als *Fundamentalpolygon* für unsere Irrationalität dienen kann, das heisst, dass sowohl die 168 schraffirten als auch die 168 nicht schraffirten Dreiecke, welche unsere Figur umfasst, aus einem schraffirten resp. nicht schraffirten Dreiecke durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ hervorgehen, welche modulo 7 alle verschieden sind. Es handelt sich ferner darum, die Zusammengehörigkeit der Kanten zu bestimmen, die auf der Tafel mit 1, 2, ... 14 bezeichnet sind. Jeder solchen Kante entspricht in der ω-Ebene ein *Paar* von Halbkreisen, die auf der reellen Axe senkrecht stehen; der Kante 1 z. B. das Paar der Kreise, von denen der eine durch $\omega=\frac{2}{7}$ und $\omega=\frac{1}{3}$, der andere durch $\omega=\frac{1}{3}$ und $\omega=\frac{3}{7}$ hindurchgeht. Wenn ich jetzt z. B. behaupte, dass die Kanten 1 und 6 mit einander zu vereinigen sind, so habe ich zu zeigen, dass die entsprechenden Halbkreise in der ω-Ebene, welche folgende gegenseitige Lage haben:

Fig. 7.



durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ aus einander hervorgehen, welche modulo 7 zur Identität congruent sind. Dies ist in der That der Fall. Denn die Substitution

$$\omega'=\frac{113\omega-35}{42\omega-13}$$

lässt aus $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$ bez. $\frac{19}{7}$, $\frac{8}{3}$ hervorgehen und verwandelt also den Halbkreis, der in den erstgenannten Punkten die reelle Axe trifft, in denjenigen, der in den beiden anderen schneidet.

Entsprechend lässt die Substitution

$$\omega'=\frac{55\omega-21}{21\omega-8}$$

aus $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ bez. $\frac{8}{3}$ und $\frac{18}{7}$ hervorgehen, was hinsichtlich des anderen Paares von Halbkreisen den nämlichen Schluss begründet. Ich habe auf der Tafel die Zahlen $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{18}{7}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{19}{7}$ an den entsprechenden Stellen beigesetzt. *Die Kanten* 1 *und* 6 *sind nach dem Vorhergehenden so zu vereinigen, dass* $\frac{2}{7}$ *mit* $\frac{19}{7}$, $\frac{3}{7}$ *mit* $\frac{18}{7}$ *zusammenkommt.*

Auf solche Weise findet man, *dass überhaupt folgende Kanten zu vereinigen sind:*

$$1-6,\ 3-8,\ 5-10,\ 7-12,\ 9-14,\ 11-2,\ 13-4,$$

und dass jedesmal gleichartige Ecken zusammenkommen. Was dabei unter „gleichartig" zu verstehen sei, zeigt die Figur; die kleinen Nebenfiguren (auf der Tafel) erläutern, wie sich dementsprechend die 7 Ecken der einen Art und die 7 Ecken der anderen Art je zu einem Punkte a zusammenschliessen.

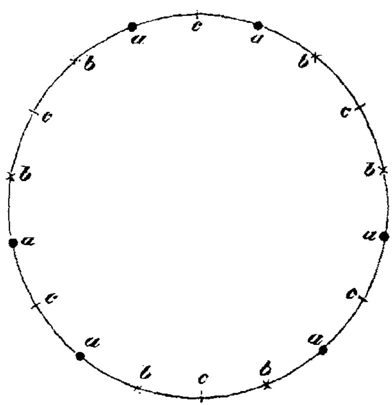
Wollte man, diesen Angaben entsprechend, die betr. Kanten durch Zusammenbiegen wirklich vereinigen, so erhielte man zunächst eine sehr unübersichtliche Figur. Es ist daher besser, für's Erste bei der auf der Tafel gegebenen Figur zu bleiben und sie durch die Tabelle, welche sich auf die Zusammengehörigkeit der Kanten bezieht, und die beiden Nebenfiguren zu ergänzen. Auf solche Weise gewinnt man die Sätze, welche ich im folgenden Paragraphen zusammenstelle.

§ 13.

Die 28 Symmetrielinien.

Als eine *Symmetrielinie* unserer Oberfläche will ich eine solche Linie bezeichnen, welche, aus lauter Dreiecksseiten bestehend, nirgendwo eine Knickung erfährt, die also durch die Punkte a, b, c sozusagen *geradlinig* hindurchlaufen. Als Symmetrielinien kann man diese Curven bezeichnen, weil die Fläche in Bezug auf sie in der That symmetrisch ist. Denn eine solche Symmetrielinie wird z. B. von der verticalen Mittellinie unserer Figur gebildet, sofern man sie noch durch Kante 5, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Kante 10 zu einer geschlossenen Curve ergänzt; — und diese beiden Kanten liegen in Bezug auf die Mittellinie symmetrisch und übrigens ist auch die Verbindungsweise der übrigen Kanten in Bezug auf die Mittellinie symmetrisch.

Fig. 8.



Das Beispiel zeigt zugleich, dass eine solche Symmetrielinie je sechs Punkte a, b, c in der auf nebenstehender Figur angegebenen Aufeinanderfolge enthält.

Hiernach hat man vor allen Dingen:

Es giebt 28 Symmetrielinien. Dieselben erschöpfen, da sie alle Dreiecksseiten enthalten, zugleich die Gesammtheit derjenigen Punkte unserer Fläche, welche *reellen* Werthen von J entsprechen.

Diese Symmetrielinien sind für viele Zwecke das einfachste Orientirungsmittel auf unserer Fläche; ich will sie hier dazu benutzen, um die zusammengehörigen Punkte a, b, c zu definiren. Es ist dann leicht, sich eine Vorstellung von den zugehörigen eindeutigen Transformationen unserer Fläche in sich zu bilden.

Man findet:

Die 7 Symmetrielinien, welche sich in einem Punkte a schneiden, schneiden sich auch in den beiden zugehörigen Punkten a. Ein Beispiel giebt der Mittelpunkt unserer Figur zusammen mit den 7 Ecken der einen und den 7 Ecken der anderen Art. — Hiernach lässt sich der Process, vermöge dessen man von der geschlossenen regulär eingetheilten Fläche zu unserer Figur kommt, folgendermassen beschreiben: Man wählt auf der Fläche ein Tripel zusammengehöriger Punkte a und zerschneidet sie längs derjenigen 7 Stücke von Symmetrielinien, die von einem dieser Punkte a zu einem anderen hinreichen. Dann ist sie, da für sie $p = 3$ war, einfach zusammenhängend mit einer Randcurve geworden, — und breitet man sie nun in eine Ebene aus, so hat man die auf der Tafel gegebene Figur. — Durch je *zwei* Tripel zusammengehöriger Punkte a verläuft offenbar *eine* Symmetrielinie; die Punkte der beiden Tripel folgen auf ihr alternirend.

Man findet ferner:

Die 3 Symmetrielinien, welche durch einen Punkt b laufen, schneiden sich wieder in dem zugehörigen Punkte b. — Beispiele für solche Punktepaare b geben in der Figur die Punkte A, A'; B, B'; C, C'; D, D', die ich noch weiterhin betrachten werde. — Jedem solchen Tripel von Symmetrielinien, und also jedem Punktepaare b, ist eine bestimmte Symmetrielinie dadurch zugeordnet, dass sie die Linien des Tripels in 2 Punkten c schneidet. In diesem Sinne gehören die 28 Punktepaare b und die 28 Symmetrielinien eindeutig zusammen.

Man findet endlich:

Die zwei Symmetrielinien, welche durch einen Punkt c laufen, schneiden sich in einem zweiten Punkte c. Es giebt dann jedesmal noch zwei weitere Symmetrielinien, welche den beiden ersten nirgends begegnen und die sich gegenseitig ebenfalls in zwei Punkten c schneiden. Auf solche Weise erhält man ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.

§ 14.

Definitive Gestalt unserer Fläche.

Eine Figur pflegt in demselben Maasse anschaulicher zu sein, als sie regelmässiger ist. Ich wünsche also der hier vorliegenden regulär eingetheilten Oberfläche eine solche Gestalt zu ertheilen, dass möglichst viele der 168 eindeutigen Transformationen der Fläche durch gewöhnliche *Drehungen* vermittelt werden. Man kennt alle endlichen Gruppen, welche sich aus Drehungen zusammensetzen lassen; sie entsprechen den regulären Körpern. Eine Gruppe von 168 Drehungen, wie sie hier in Betracht kommen könnte, giebt es nicht. Dagegen wurde bereits bemerkt (§ 1.), dass die 24 Substitutionen einer G_{24}'' sich ebenso zusammensetzen, wie die Drehungen, die ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Es scheint daher von vorneherein nicht unmöglich, *unserer Fläche eine solche Gestalt zu geben, dass sie durch die Oktaederdrehungen in sich übergeht.*

Zu dem Zwecke sind zuvörderst auf unserer Figur solche vier Punktepaare b zu bezeichnen, welche bei den Substitutionen der G_{24}'' permutirt werden. Diess kann in sehr einfacher Weise geschehen, wenn man je 14 Dreiecke, die in einem Punkte a zusammenlaufen, zu einem Siebeneck zusammenfasst und also die ganze Fläche, wie schon oben besprochen, in 24 Siebenecke zerlegt. *Man kann dann nämlich auf $2 \cdot 7$ Weisen vier Punktepaare b so aussuchen, dass durch die an sie anstossenden Siebenecke sämmtliche 24 Siebenecke erschöpft werden**). Eben solche vier Punktepaare sind die schon ebengenannten A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. Sechs weitere Quadrupel bekommt man, wenn man unsere Figur um ihren Mittelpunkt wiederholt durch den siebenten Theil des Kreisumfangs dreht; die übrigen sieben ergeben sich, wenn man die so erhaltenen 7 an einer Symmetrielinie, also etwa an der verticalen Mittellinie, spiegelt.

Jetzt zerschneide man unsere Figur (nachdem man die zusammengehörigen Kanten vereinigt hat) längs der durch stärkeres Ausziehen gekennzeichneten drei Zickzacklinien (welche von den punktirten Linien durchsetzt werden). Sie ist dann in eine sechsfach zusammenhängende Fläche mit sechs Randcurven verwandelt, *und diese Fläche kann man nun, wie man findet, in der Art auf eine Kugel regulär ausbreiten, dass die acht Punkte A, A' etc. in die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen Würfels fallen, dass die Ecken des zugehörigen Oktaeders unbedeckt bleiben, und dass die 12 den Halbirungspunkten der Oktaederkanten entsprechenden Punkte mit Punkten c coincidiren.* Der grösseren Deutlichkeit wegen füge ich eine Zeichnung bei, welche den einzelnen Oktanten der Kugelfläche vorstellt. (Siehe Fig. 9 auf p. 468.)

Die drei Siebenecke, welche im Mittelpunkte des Oktanten zusammenstossen, greifen zum Theil über ihn hinaus. Da aber das Nämliche von den Siebenecken geschieht, welche die Seiten-Oktanten über-

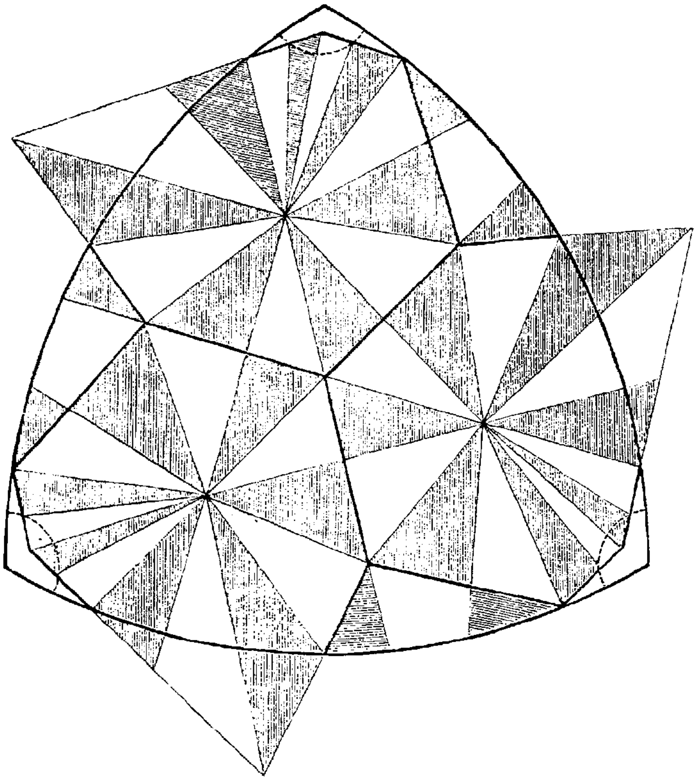
---

*) Auch die Existenz der Resolventen achten Grades ist mit Hülfe dieser Siebenecke kurz zu beweisen: *Man kann auf acht Weisen drei Siebenecke so aussuchen, dass die angrenzenden Siebenecke die Gesammtheit der noch übrigen 21 erschöpfen.*

decken, so bleiben von der Fläche des Oktanten nur die drei Ecken unbedeckt.

Fragen wir jetzt, wie die Randcurven, welche sich um die Oktaederecken herumlegen, zu vereinigen sind, damit wir ein Bild der

Fig. 9.



gesuchten Fläche bekommen, so ergiebt der Vergleich mit der früheren Figur dies einfache Gesetz: *dass immer die diametral gegenüberstehenden Punkte zu vereinigen sind.*

Nun lässt sich diese Vereinigung in der That realisiren, ohne dass unsere Fläche die gewollte Regularität verliert: *man hat nämlich die Begrenzungscurven in der Art durch das Unendliche zusammenzubringen, dass der Schnitt mit dem Unendlich-Weiten aus denjenigen Linien besteht, welche auf der beigegebenen Tafel, wie auch auf Figur 9, durch Punktirung kenntlich gemacht sind.* Die Siebenecke, welche von der Mitte des Oktanten ausgehen, erstrecken sich also zum Theil durch das Unendliche hindurch, so dass im Ganzen 12 Punkte c unendlich weit liegen. — Die Fläche selbst aber läuft etwa so ins Unendliche, wie das Aggregat dreier unter sich congruenter Rotationshyperboloide mit rechtwinkelig gekreuzten Axen. *Dies ist die einfachste Gestalt, deren unsere regulär eingetheilte Fläche fähig erscheint**).

Will man sich jetzt überzeugen, dass bei den 24 Transformationen, welche durch die Oktaederdrehungen versinnlicht sind, wirklich jedesmal die früher angegebene Zahl von Punkten festbleibt, so berücksichtige man, *dass bei Drehungen von der Periode Zwei nicht nur die Punkte der Rotationsaxe, sondern auch sämmtliche Punkte der zur Rotationsaxe senkrechten unendlich fernen Geraden festbleiben.* Nun wird unsere Fläche von den Oktaederdiagonalen gar nicht geschnitten, von den zu ihnen senkrechten unendlich weiten Linien viermal. Diejenigen Diametrallinien, welche die Kantenhalbirungspunkte des Oktaeders verbinden, schneiden zweimal, desgleichen die zu ihnen gehörigen unendlich fernen Linien. Die Würfeldiagonalen haben ebenfalls zwei und nur zwei Schnittpunkte. Hiernach bleibt bei einer Drehung von der Periode Vier *kein* Punkt fest, bei jeder Drehung von der Periode Zwei ein *Punktquadrupel,* bei jeder Drehung von der Periode Drei ein *Punktepaar*, wie es sein sollte.

§ 15.

Die reellen Punkte der Curve vierter Ordnung.

Ich wünsche nun noch zum Schlusse zu zeigen, wie weit diese Lagenverhältnisse hervortreten, wenn man *die reellen Punkte der Curve vierter Ordnung*

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

ins Auge fasst. Das Coordinatendreieck mag gleichseitig genommen sein, die Coordinaten selbst proportional mit den Abständen von den Dreiecksseiten. Dann stellt die Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$ die unendlich ferne Gerade dar; ihre Berührungspunkte $1 : \alpha : \alpha^2$ und $1 : \alpha^2 : \alpha$ sind die beiden Kreispunkte. Die unendlich ferne Gerade ist also *isolirte* Doppeltangente. Die sechs Collineationen der zugehörigen G_6' sind die einzigen unter den 168, welche reell sind; sie bestehen aus den drei Drehungen durch 120 Grad um den Mittelpunkt des Coordinatendreiecks und aus den Umklappungen um gewisse drei durch den Mittelpunkt hindurchlaufende gerade Linien. Diese Linien sind die einzigen unter den 21 Axen der Perspectivität, welche reell sind; die zugehörigen Centra liegen senkrecht zu ihnen unendlich weit.

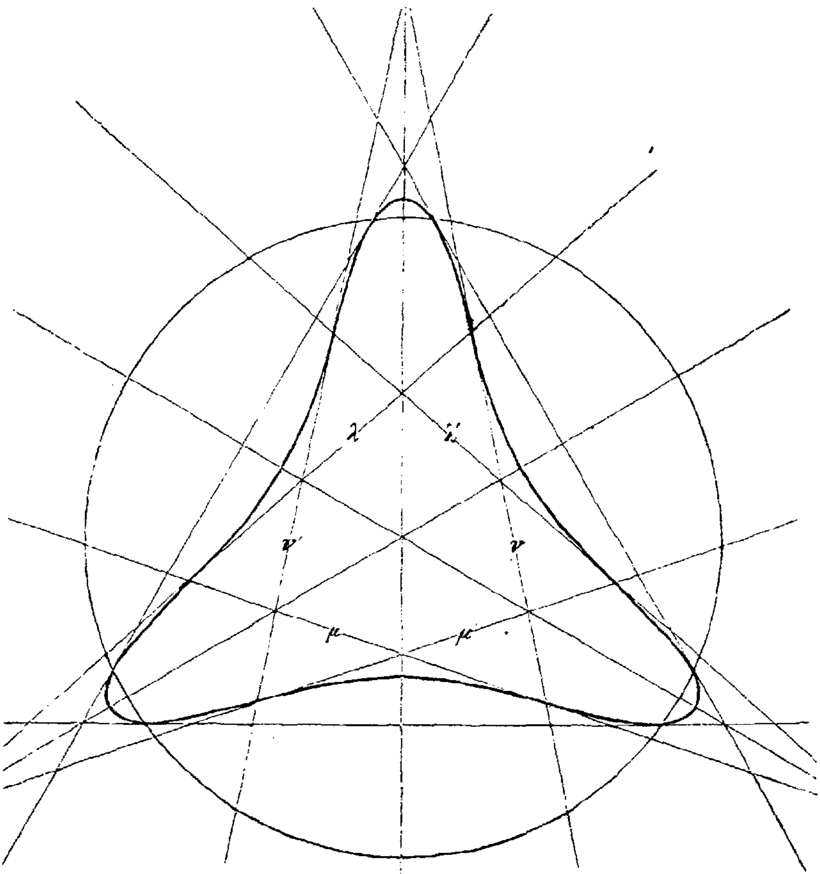
*) Ich habe für das mathematische Institut der technischen Hochschule dahier ein Modell der so gestalteten Fläche anfertigen lassen.

Die betreffenden Umklappungen lassen aus dem Wendedreiecke $\lambda\mu\nu=0$ noch ein zweites reelles Wendedreieck $\lambda'\mu'\nu'=0$ entstehen.

Man beachte nun vor Allem die Gleichungsform (9):

$$49y_1(y_1+y_2+y_3)(y_1+\alpha y_2+\alpha^2 y_3)(y_1+\alpha^2 y_2+\alpha y_3)-3(4y_1^2-7y_2y_3)^2=0.$$

Fig. 10.



Hier setze man für y_1, als unendlich ferne Gerade, 1, für y_2 und y_3, insofern die betr. Linien durch die Kreispunkte laufen, $x+iy$ und $x-iy$. So kommt:

$$49(2x+1)(-x+\sqrt{3}\cdot y+1)(-x-\sqrt{3}\cdot y+1)-3(4-7(x^2+y^2))^2=0.$$

Die Doppeltangenten

$$2x+1=0,\quad -x+\sqrt{3}\cdot y+1=0,\quad -x-\sqrt{3}\cdot y+1=0$$

bilden wieder ein gleichseitiges Dreieck; seine Höhe ist $\frac{3}{2}$, seine Kantenlänge $\sqrt{3}$. Aus ihnen schneidet der um den Mittelpunkt des Dreiecks herumgelegte Kreis vom Radius $\frac{2}{\sqrt{7}}$ reelle Berührungspunkte aus, *so dass wir drei nicht isolirte Doppeltangenten haben.* Alle anderen Doppeltangenten werden, wie man findet, imaginär. *Unsere Curve ist also eine eintheilige Curve**), *welche in das Dreieck der nicht isolirten Doppeltangenten eingeschrieben ist.* In der beistehenden, übrigens nur schematischen Figur sind neben den drei in Rede stehenden Doppeltangenten der Kreis durch die Berührungspunkte, die drei reellen Axen der Perspectivität und die beiden reellen Wendedreiecke kenntlich gemacht.

Der so gewonnene reelle Curvenzug hat für die zugehörige Riemann'sche Fläche eine sehr einfache Bedeutung: *er stellt eine der* 28 *Symmetrielinien vor.* Denn reellen Werthen von λ, μ, ν entsprechen reelle Werthe von J, und durch reelle Werthe von J sind die Symmetrielinien charakterisirt. — Diese Symmetrielinie ist der unendlich fernen isolirten Doppeltangente eindeutig zugeordnet und geht daher, wie diese, durch die reellen Substitutionen einer G_6' in sich über. Sie enthält von den Punkten a, b, c je sechs, und, wie die Figur zeigt, in der That in derselben Reihenfolge, welche, nach Figur 8, bei Symmetrielinien überhaupt Statt hat.

München, im Anfang November 1878.

---

*) Siehe Zeuthen, sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre, diese Annalen Bd. VII.