ÜBER DIE DARSTELLUNG EINER GANZEN ZAHL ALS SUMME VON BIQUADRATEN.

Von **Edmund Landau** (Berlin).

Adunanza del 9 dicembre 1906.

LIOUVILLE *) hat zuerst bewiesen, dass jede (ganze positive) Zahl als Summe einer festen Anzahl von Biquadraten darstellbar ist, nämlich als Summe von 53 Biquadraten (wobei 0 zu den Biquadraten gerechnet wird) oder, was dasselbe bedeutet, als Summe von höchstens 53 positiven Biquadraten.

REALIS **) hat die Schranke 53 auf 47 reduziert.

LUCAS ***) hat die Zerlegbarkeit in 45 Biquadrate bewiesen und diese Anzahl später †) auf 41 verkleinert.

Herr FLECK ††) hat nachgewiesen, dass jede Zahl in 39 Biquadrate zerlegbar ist.

Ich werde im § 1 des folgenden die Darstellbarkeit jeder Zahl durch 38 Biquadrate nachweisen und im § 2 einige daran anknüpfende Untersuchungen anstellen.

§ 1.

Es besteht die (auch von allen genannten Autoren zu Grunde gelegte) Identität:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (a+b)^4+(a-b)^4+(a+c)^4+(a-c)^4 \\ +(a+d)^4+(a-d)^4+(b+c)^4+(b-c)^4+(b+d)^4+(b-d)^4+(c+d)^4+(c-d)^4. \end{aligned}\right.$$

Sie lehrt auf Grund des LAGRANGE'schen Satzes von der Darstellbarkeit jeder positiven Zahl in der Form $a^2+b^2+c^2+d^2$, dass das Sechsfache jeder Quadratzahl in 12 Biquadrate zerlegbar ist, desgleichen a fortiori das 24-fache jeder Quadratzahl.

Für $d=c$ ist die rechte Seite der Gleichung (1) eine Summe von 11 Biquadra-

*) LIOUVILLE hat jenen Beweis am Collège de France vorgetragen; er ist in LE BESGUE's *Exercices d'Analyse numérique,* Paris 1859, auf S. 113-115 abgedruckt.

**) *Note sur un théorème d'Arithmétique* [Nouvelle Correspondance mathématique, Bd. IV (1878), S. 209-210].

***) *Sur la décomposition des nombres en bicarrés*, ebenda, S. 323-325.

†) *Sur un théorème de* M. LIOUVILLE, *concernant la décomposition des nombres en bicarrés* [Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 2, Bd. XVII (1878), S. 536-537].

††) *Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen* [Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, 5ter Jahrgang (1906), S. 2-9].

ten, da das letzte Glied verschwindet. Also ist das sechsfache Quadrat jeder durch die Form $a^2+b^2+2c^2$ darstellbaren Zahl in 11 Biquadrate zerlegbar. Bekanntlich ist jede positive ungerade Zahl in der Form $a^2+b^2+2c^2$ darstellbar, ebenso das Sechzehnfache jeder positiven ungeraden Zahl. Folglich ist für ungerades u:

$$6u^2 = B_{11}$$

und

$$24\cdot 4u^2 = B_{11},$$

wo unter B_ν eine Zahl verstanden wird, die als Summe von ν Biquadraten (d. h. von höchstens ν positiven Biquadraten) darstellbar ist.

Nun ist bekanntlich jede positive Zahl, welche $\equiv 1, 2, 3, 5$ oder 6 modulo 8 ist, in 3 Quadrate zerlegbar, unter denen sich mindestens ein ungerades befindet. Also ist das Sechsfache jeder solchen Zahl in $11+12+12=35$ Biquadrate zerlegbar; d. h. es ist:

$$\begin{aligned}
6(8n+1) &= 48n+6 = B_{35},\\
6(8n+2) &= 48n+12 = B_{35},\\
6(8n+3) &= 48n+18 = B_{35},\\
6(8n+5) &= 48n+30 = B_{35},\\
6(8n+6) &= 48n+36 = B_{35}.
\end{aligned}$$

Jede Zahl > 145, welche modulo 48 einen von 10, 11, 26, 27, 42, 43 verschiedenen Rest lässt, ist *) gleich der Summe von 3 Biquadraten plus einer positiven Zahl, welche $\equiv 6, 12, 18, 30$ oder 36 (mod. 48) ist. In der Tat ist nach diesem Modul:

$$\begin{array}{lll}
0 \equiv 30+3^4+3^4, & 1 \equiv 30+1^4+3^4+3^4, & 2 \equiv 18+2^4+2^4,\\
3 \equiv 18+3^4, & 4 \equiv 36+2^4, & 5 \equiv 36+1^4+2^4,\\
6 \equiv 6, & 7 \equiv 6+1^4, & 8 \equiv 6+1^4+1^4,\\
9 \equiv 6+1^4+1^4+1^4, & 12 \equiv 12, & 13 \equiv 12+1^4,\\
14 \equiv 12+1^4+1^4, & 15 \equiv 30+3^4, & 16 \equiv 30+1^4+3^4,\\
17 \equiv 30+1^4+1^4+3^4, & 18 \equiv 18, & 19 \equiv 18+1^4,\\
20 \equiv 18+1^4+1^4, & 21 \equiv 36+3^4, & 22 \equiv 6+2^4,\\
23 \equiv 6+1^4+2^4, & 24 \equiv 6+3^4+3^4, & 25 \equiv 6+1^4+3^4+3^4,\\
28 \equiv 12+2^4, & 29 \equiv 12+1^4+2^4, & 30 \equiv 30,\\
31 \equiv 30+1^4, & 32 \equiv 30+1^4+1^4, & 33 \equiv 30+1^4+1^4+1^4,\\
34 \equiv 18+2^4, & 35 \equiv 18+1^4+2^4, & 36 \equiv 36,\\
37 \equiv 36+1^4, & 38 \equiv 36+1^4+1^4, & 39 \equiv 6+3^4,\\
40 \equiv 6+1^4+3^4, & 41 \equiv 6+1^4+1^4+3^4, & 44 \equiv 12+2^4+2^4,\\
45 \equiv 12+3^4, & 46 \equiv 30+2^4, & 47 \equiv 30+1^4+2^4.
\end{array}$$

Folglich ist jede Zahl > 145, deren Rest modulo 48 von 10, 11, 26, 27, 42, 43 verschieden ist, $= B_{38}$. Die Zahlen $\leqq 145$ sind in 19, also gewiss in 38 Biquadrate zerlegbar.

---

*) Wie schon LUCAS in der auf S. 91, Anm. †) zitierten Arbeit hervorgehoben hat.

Um auch jene sechs Ausnahmeklassen zu erledigen, beweise ich zunächst den Hilfssatz, dass

$$48n + 25 = B_{36}$$

ist.

Wird

$$48n + 25 = u$$

gesetzt und $u > 13^4$ angenommen *), so ist

$$\begin{aligned} u - 1^4 &= 48n + 24 = 24(2n+1), \\ u - 5^4 &= 48n - 600 = 24(2n-25), \\ u - 7^4 &= 48n - 2376 = 24(2n-99), \\ u - 13^4 &= 48n - 28536 = 24(2n-1189). \end{aligned}$$

Von den vier positiven Zahlen $2n+1$, $2n-25$, $2n-99$, $2n-1189$ ist eine $\equiv 5 \pmod{8}$, also $= x^2 + y^2 + z^2$, wo x das Doppelte einer ungeraden Zahl ist. Ihr 24-faches ist daher nach Seite 92 in $11 + 12 + 12 = 35$ Biquadrate zerlegbar. Also ist, wie behauptet,

$$48n + 25 = B_{36}.$$

Da nun modulo 48

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 25 + 3^4, & 11 &\equiv 25 + 1^4 + 3^4, & 26 &\equiv 25 + 1^4, \\ 27 &\equiv 25 + 1^4 + 1^4, & 42 &\equiv 25 + 1^4 + 2^4, & 43 &\equiv 25 + 3^4 + 3^4 \end{aligned}$$

ist, so ist vollständig bewiesen, dass jede Zahl als Summe von 38 Biquadraten darstellbar ist.

§ 2.

Die bekannten Kunstgriffe und die in § 1 neu hinzugefügten will ich jetzt ausnutzen, um für jede der 48 Restklassen modulo 48 die erforderliche Anzahl der Biquadrate möglichst zu reduzieren. Bei dreien dieser Restklassen wird allerdings die Schranke 38 bestehen bleiben.

Ich mache zunächst darauf aufmerksam, dass bei der Zerlegung der Zahlen $8n+2$ und $8n+6$ in 3 Quadrate zwei derselben ungerade sind; für die Zahlen $8n+3$ sind sogar alle drei Quadrate ungerade. Daher ist

$$48n + 6 = B_{35}, \quad 48n + 12 = B_{34}, \quad 48n + 18 = B_{33},$$
$$48n + 30 = B_{35}, \quad 48n + 36 = B_{34}.$$

Ich beweise ferner den

HILFSSATZ:

$$48n + 1 = B_{36}.$$

BEWEIS: Es werde

$$48n + 1 = u > 13^4$$

*) Dass alle Zahlen $\leqq 13^4$ in 38 Biquadrate zerlegbar sind, ist durch eine ganz kurze Rechnung verifizierbar; siehe S. 94, Anm. *).

angenommen; dann ist

$$\begin{aligned} u - 1^4 &= 48n &&= 24 \cdot 2n, \\ u - 5^4 &= 48n - 624 &&= 24(2n - 26), \\ u - 7^4 &= 48n - 2400 &&= 24(2n - 100), \\ u - 13^4 &= 48n - 28560 &&= 24(2n - 1190). \end{aligned}$$

Von den vier positiven Zahlen $2n$, $2n - 26$, $2n - 100$, $2n - 1190$ ist eine $\equiv 6 \pmod{8}$, also $= x^2 + y^2 + z^2$, wo x das Doppelte einer ungeraden Zahl ist; ihr 24-faches ist daher ein B_{35}. Also ist

$$u = B_{36}.$$

Analog ergiebt sich der

HILFSSATZ:

$$48n + 9 = B_{36}, \qquad 48n + 33 = B_{36},$$

zusammenfassend

$$24m + 9 = B_{36}.$$

BEWEIS: Es werde

$$24m + 9 = u > 21^4$$

angenommen *); dann ist

$$\begin{aligned} u - 3^4 &= 24m - 72 &&= 24(m - 3), \\ u - 9^4 &= 24m - 6552 &&= 24(m - 273), \\ u - 15^4 &= 24m - 50616 &&= 24(m - 2109), \\ u - 21^4 &= 24m - 194472 &&= 24(m - 8103). \end{aligned}$$

Es ist modulo 8 einer der vier (positiven) Klammerausdrücke rechts $\equiv 5$ (für gerades m) oder $\equiv 6$ (für ungerades m), also $= x^2 + y^2 + z^2$, wo x das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, sodass u jedenfalls in $1 + 35 = 36$ Biquadrate zerlegbar ist. Auf Grund der neun direkt bewiesenen Relationen

$$\begin{aligned} &48n + 1 = B_{36}, && 48n + 6 = B_{35}, && 48n + 9 = B_{36}, \\ &48n + 12 = B_{34}, && 48n + 18 = B_{33}, && 48n + 25 = B_{36}, \\ &48n + 30 = B_{35}, && 48n + 33 = B_{36}, && 48n + 36 = B_{34} \end{aligned}$$

---

*) Dass jede Zahl $x \leqq 21^4$ ein B_{36} ist, verifiziert man ganz kurz folgendermassen. Ihr Überschuss über das grösste sie nicht übertreffende Biquadrat ist $< 21^4 - 20^4 = 34481$; der Überschuss jener Differenz über das grösste sie nicht übertreffende Biquadrat ist $< 13^4 - 12^4 = 7825$ u. s. f. So ergiebt sich, wenn $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ Grössen zwischen 0 (inkl.) und 1 (exkl.) bezeichnen,

$$\begin{aligned} x &= x_1^4 + \mathfrak{z}_1 \cdot 34481 = x_1^4 + x_2^4 + \mathfrak{z}_2 \cdot 7825 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \mathfrak{z}_3 \cdot 2465 \\ &= x_1^4 + \cdots + x_4^4 + \mathfrak{z}_4 \cdot 1105 = x_1^4 + \cdots + x_5^4 + \mathfrak{z}_5 \cdot 480 = x_1^4 + \cdots + x_6^4 + \mathfrak{z}_6 \cdot 224 \\ &= x_1^4 + \cdots + x_7^4 + \mathfrak{z}_7 \cdot 143 = x_1^4 + \cdots + x_8^4 + \mathfrak{z}_8 \cdot 65 = x_1^4 + \cdots + x_9^4 + \mathfrak{z}_9 \cdot 49 \\ &= x_1^4 + \cdots + x_{10}^4 + \mathfrak{z}_{10} \cdot 33 = x_1^4 + \cdots + x_{11}^4 + \mathfrak{z}_{11} \cdot 17 = x_1^4 + \cdots + x_{12}^4 + \mathfrak{z}_{12} \cdot 15 \\ &= x_1^4 + \cdots + x_{26}^4 = x_1^4 + \cdots + x_{36}^4. \end{aligned}$$

erhalte ich zum Schluss folgende Tabelle:

$$
\begin{aligned}
48n + 0 &= 48(n-4) + 30 + 3^4 + 3^4 = B_{37},\\
48n + 1 &= B_{36},\\
48n + 2 &= 48(n-1) + 18 + 2^4 + 2^4 = B_{35},\\
48n + 3 &= 48(n-2) + 18 + 3^4 = B_{34},\\
48n + 4 &= 48(n-1) + 36 + 2^4 = B_{35},\\
48n + 5 &= 48(n-1) + 36 + 1^4 + 2^4 = B_{36},\\
48n + 6 &= B_{35},\\
48n + 7 &= 48n + 6 + 1^4 = B_{36},\\
48n + 8 &= 48n + 6 + 1^4 + 1^4 = B_{37},\\
48n + 9 &= B_{36},\\
48n + 10 &= 48n + 9 + 1^4 = B_{37},\\
48n + 11 &= 48n + 9 + 1^4 + 1^4 = B_{38},\\
48n + 12 &= B_{34},\\
48n + 13 &= 48n + 12 + 1^4 = B_{35},\\
48n + 14 &= 48n + 12 + 1^4 + 1^4 = B_{36},\\
48n + 15 &= 48(n-2) + 30 + 3^4 = B_{36},\\
48n + 16 &= 48(n-2) + 30 + 1^4 + 3^4 = B_{37},\\
48n + 17 &= 48n + 1 + 2^4 = B_{37},\\
48n + 18 &= B_{33},\\
48n + 19 &= 48n + 18 + 1^4 = B_{34},\\
48n + 20 &= 48n + 18 + 1^4 + 1^4 = B_{35},\\
48n + 21 &= 48(n-2) + 36 + 3^4 = B_{35},\\
48n + 22 &= 48n + 6 + 2^4 = B_{36},\\
48n + 23 &= 48n + 6 + 1^4 + 2^4 = B_{37},\\
48n + 24 &= 48(n-3) + 6 + 3^4 + 3^4 = B_{37},\\
48n + 25 &= B_{36},\\
48n + 26 &= 48n + 25 + 1^4 = B_{37},\\
48n + 27 &= 48n + 25 + 1^4 + 1^4 = B_{38},\\
48n + 28 &= 48n + 12 + 2^4 = B_{35},\\
48n + 29 &= 48n + 12 + 1^4 + 2^4 = B_{36},\\
48n + 30 &= B_{35},\\
48n + 31 &= 48n + 30 + 1^4 = B_{36},\\
48n + 32 &= 48n + 30 + 1^4 + 1^4 = B_{37},\\
48n + 33 &= B_{36},\\
48n + 34 &= 48n + 18 + 2^4 = B_{34},\\
48n + 35 &= 48n + 18 + 1^4 + 2^4 = B_{35},\\
48n + 36 &= B_{34},\\
48n + 37 &= 48n + 36 + 1^4 = B_{35},\\
48n + 38 &= 48n + 36 + 1^4 + 1^4 = B_{36},\\
48n + 39 &= 48(n-1) + 6 + 3^4 = B_{36},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
48n + 40 &= 48(n-1) + 6 + 1^4 + 3^4 = B_{37},\\
48n + 41 &= 48n + 25 + 2^4 = B_{37},\\
48n + 42 &= 48(n-1) + 9 + 3^4 = B_{37},\\
48n + 43 &= 48(n-1) + 9 + 1^4 + 3^4 = B_{38},\\
48n + 44 &= 48n + 12 + 2^4 + 2^4 = B_{36},\\
48n + 45 &= 48(n-1) + 12 + 3^4 = B_{35},\\
48n + 46 &= 48n + 30 + 2^4 = B_{36},\\
48n + 47 &= 48n + 30 + 1^4 + 2^4 = B_{37}.
\end{aligned}$$

Berlin, den 2[ten] Dezember 1906.

EDMUND LANDAU.