Beweis für die Existenz von Integralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle.

Von

Oskar Perron in Tübingen.

Bekanntlich hat die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad (x, y \text{ reell}),$$

wenn die reelle Funktion $F(x, y)$ an einer Stelle x_0, y_0 und in deren Umgebung stetig ist und der Lipschitzschen Bedingung

$$\left|\frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

genügt, ein und nur ein Integral y, welches für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt. Ich behandle im folgenden den Fall, wo die Funktion $F(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 eine *Unstetigkeit* hat, welche aber durch Multiplikation mit einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ von x allein beseitigt werden kann; ich nehme also die Differentialgleichung in der Form

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

an, wo f und φ stetig sind, und $\varphi(x_0) = 0$ ist. Diese Differentialgleichung ist mehrfach behandelt worden für den Fall, daß $\varphi(x) = (x - x_0)^n$ (n = positive ganze Zahl), und $f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 holomorph ist.*) Beschränkt man aber x, y auf reelle Werte, was ja bei topologischen Untersuchungen der Integral*kurven* allein in Frage kommt, so ist es wünschenswert, das Problem unter geringeren Voraussetzungen zu behandeln. Ich werde von der Funktion $\varphi(x)$ nur verlangen, daß sie stetig ist und für $x \neq x_0$ nicht verschwindet, während $f(x, y)$ ebenfalls stetig sein soll und daneben nur noch einer Bedingung unterworfen wird, die der Lipschitzschen sehr ähnlich ist und nicht viel mehr verlangt wie diese.

---

*) Siehe z. B. J. Horn: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 119, 120. — J. Bendixson: Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 55 (1898), Acta Mathematica, 24.

§ 1.

Wir setzen $x_0 = 0$, was keine Beschränkung bedeutet, und betrachten im übrigen nur positive x, da der Fall negativer x sich darauf durch die Substitution $x = -x'$ zurückführen läßt. Die Differentialgleichung sei also

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1}$$

dabei sei $\varphi(x)$ stetig für $0 \leqq x \leqq a$; ferner

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq a.$$

Hiernach hat $\varphi(x)$ konstantes Vorzeichen, und wir dürfen, indem wir nötigenfalls die Gleichung (1) mit -1 multiplizieren,

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq a$$

voraussetzen. Die Funktion $f(x, y)$ sei zunächst in dem Gebiet

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b$$

nur reell und stetig angenommen.

Trivial ist der Fall, wo das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} \tag{2}$$

existiert, d. h. endlich ist. Man hat dann nur nötig, eine neue unabhängige Variable t vermittels der Substitution

$$\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} = t$$

einzuführen. Dann ist nämlich t eine beständig wachsende Funktion von x, also auch umgekehrt x eine beständig wachsende Funktion von t:

$$x = \psi(t),$$

und die Differentialgleichung geht über in die folgende:

$$\frac{dy}{dt} = f(\psi(t), y).$$

Daraus erkennt man beispielsweise auf Grund des in der Einleitung erwähnten Satzes, daß, wenn nur $f(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, dann ein und nur ein Integral existiert, welches für $t = 0$, d. h. $x = 0$, dem Wert $y = y_0$ zustrebt.

§ 2.

Wir wenden uns jetzt zu dem interessanteren Fall, daß das Integral (2) nicht existiert. Wenn dann $f(0, y_0) \neq 0$ ist, so sieht man leicht, daß die Differentialgleichung (1) kein Integral hat, welches für $x = 0$ dem Wert $y = y_0$ zustrebt. Denn für ein solches würde aus (1) folgen:

$$y - y_0 = \lim_{\varepsilon = +0} \int_{\varepsilon}^{x} \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} \, dx,$$

während doch dieser Grenzwert nach unseren Annahmen nicht endlich sein kann.

Die Integralkurven können also nur an solchen Stellen y_0 die Y-Achse erreichen, wo $f(0, y_0) = 0$ ist. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß etwa $y_0 = 0$ eine solche Stelle sei; also $f(0, 0) = 0$. Weiter soll von der Funktion $f(x, y)$ vorausgesetzt werden, daß es zwei positive Zahlen k, K gibt, für welche

$$k < \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

ist, so lange x, y_1, y_2 im Gebiet

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y_1| \leqq b, \quad |y_2| \leqq b$$

bleiben. Diese Voraussetzung ist z. B. stets dann erfüllt, wenn $f(x, y)$ eine *stetige von Null verschiedene* partielle Ableitung nach y besitzt.

Aus unserer Voraussetzung folgt leicht, daß der Quotient

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

konstantes Vorzeichen hat. Je nachdem dieses nun das positive oder das negative ist, wird sich die Untersuchung verschieden gestalten und auch zu verschiedenen Resultaten führen, die wir zunächst in folgender Weise formulieren wollen.

Theorem I. *Die Funktion $\varphi(x)$ sei für $0 \leqq x \leqq a$ stetig, und es sei*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \ \textit{für} \ 0 < x \leqq a,$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} \int_{\varepsilon}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)} = \infty .$$

Die Funktion $f(x, y)$ verschwinde für $x = 0$, $y = 0$ und sei für $0 \leqq x \leqq a$, $|y| \leqq b$ reell und stetig, ferner sei in diesem Gebiet

$$0 < k < \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < K \qquad (y_1 \neq y_2),$$

sodaß der Quotient $\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$ *konstantes Vorzeichen hat. Wenn dann dieses Vorzeichen das negative ist, so hat die Differentialgleichung*

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ein und nur ein Integral, welches für $\lim x = +0$ *dem Wert* $y = 0$ *zustrebt.*

Wenn das Vorzeichen aber das positive ist, so gibt es unendlich viele Integrale mit dieser Eigenschaft. Man kann dann nämlich zwei positive Zahlen a', b' *angeben derart, daß für jedes dem Gebiet* $0 < x_0 \leqq a'$, $|y_0| \leqq b'$ *angehörige Wertesystem* x_0, y_0 *ein und nur ein Integral existiert, welches für* $x = x_0$ *den Wert* $y = y_0$ *annimmt und außerdem für* $\lim x = +0$ *dem Wert* $y = 0$ *zustrebt.*

Wir haben absichtlich nicht gesagt, daß die der Differentialgleichung genügende Funktion y für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt; denn tatsächlich können wir nur behaupten, daß y für $x > 0$ der Differentialgleichung genügt. An der Stelle $x = 0$ selbst ist, nachdem wir der Funktion y daselbst ihren Grenzwert 0 als Funktionswert beigelegt haben, bei unseren allgemeinen Annahmen ein bestimmter endlicher (vorderer) Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ unter Umständen gar nicht vorhanden.*)

---

*) Man betrachte z. B. die Differentialgleichung

$$xy' = f(x) - y,$$

wo $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq a$ stetig sein und für $x = 0$ verschwinden soll. Hier sind alle Bedingungen unseres Theorems erfüllt, und zwar für das *negative* Vorzeichen. Es gibt also *nur ein* Integral der fraglichen Art, und das ist offenbar das folgende:

$$y = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Nachdem man noch dem obigen zufolge $y(0) = 0$ festgesetzt hat, können nun je nach der Beschaffenheit von $f(x)$ die folgenden drei Fälle wirklich eintreten.

1. y hat am Nullpunkt eine bestimmte endliche vordere Derivierte; Beispiel: $f(x) = x$.

2. y hat am Nullpunkt die vordere Derivierte $+\infty$ (bzw. auch $-\infty$); Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ $\left(\text{bzw. } f(x) = -\sqrt{x}\right)$.

3. y hat am Nullpunkt überhaupt keine bestimmte vordere Derivierte; Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

Bei dem letzten Beispiel achte man darauf, daß $f(x)$ am Nullpunkt wirklich stetig bleibt.

§ 3.

Wir behandeln zuerst den Fall des negativen Vorzeichens; also

$$-k > \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} > -K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq a$, $|y_1| \leqq b$, $|y_2| \leqq b$. Daraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{K+k}{2} = \alpha, \quad \frac{K-k}{K+k} = \vartheta$$

gesetzt wird,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2) + \alpha(y_1 - y_2)| \leqq \vartheta\alpha |y_1 - y_2|, \tag{3}$$

was in dieser Form offenbar auch noch für $y_1 = y_2$ gilt. Dabei ist α eine positive Zahl, ϑ ist positiv und kleiner als 1.

Aus den Voraussetzungen des Theorems I folgt weiter die Existenz einer positiven Zahl a' ($\leqq a$) derart, daß für $0 \leqq x \leqq a'$ stets

$$|f(x, 0)| \leqq b\alpha(1 - \vartheta) \tag{4}$$

ist. Wir beschränken x von jetzt an auf dieses Intervall und setzen

$$\int_x^{a'} \frac{dz}{\varphi(z)} = \psi(x), \quad \text{also} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (0 < x \leqq a'). \tag{5}$$

Nach unseren Voraussetzungen ist dann

$$\psi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a', \tag{6}$$

$$\lim_{x = +0} \psi(x) = \infty, \tag{7}$$

und die Differentialgleichung (1) ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-\alpha\psi(x)}\right) = \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) + \alpha y], \tag{8}$$

wo α die in (3) eingeführte positive Zahl sein soll. Hieraus folgt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, durch Integration von 0 bis x:

$$y = e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) + \alpha y]\, dx, \tag{9}$$

und umgekehrt folgt aus (9) auch wieder (8), also auch (1). Die für $x = 0$ verschwindenden Lösungen*) von (1) sind daher identisch mit den für $x = 0$ verschwindenden Lösungen*) von (9).

---

*) Genauer sollte es heißen: „Die für $\lim x = +0$ gegen Null strebenden Lösungen" (siehe Schluß von § 2; auch hat die rechte Seite von (9) für $x = 0$ keinen Sinn $(\infty \cdot 0)$). Indes wollen wir hier und später die kürzere Ausdrucksweise anwenden, die ja zu Fehlern doch keinen Anlaß gibt.

Zur Lösung von (9) wenden wir nun sukzessive Näherungen an, indem wir

$$(10)\qquad y_1 = 0,$$

$$(11)\qquad y_{\nu+1} = \begin{cases} e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) + \alpha y_\nu] dx & \text{für } 0 < x \leqq a', \\ 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

setzen ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$). Dann sieht man zunächst, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq a'$ wirklich existieren, stetig sind und absolut $\leqq b$ bleiben. Denn für $\nu = 1$ ist das nach (10) evident. Nimmt man aber an, für einen bestimmten Wert von ν sei die Sache erkannt, so hat wegen $|y_\nu| \leqq b$ der Ausdruck $f(x, y_\nu)$ wirklich einen Sinn und ist eine stetige Funktion von x. Das Integral (11) existiert also, und zugleich ist nach (3) und (4)

$$\begin{aligned} |f(x, y_\nu) + \alpha y_\nu| &\leqq |f(x, 0)| + \vartheta\alpha |y_\nu| \\ &\leqq b\alpha(1 - \vartheta) + \vartheta\alpha b = b\alpha. \end{aligned}$$

Daher nach (11) für $0 < x \leqq a'$:

$$|y_{\nu+1}| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} b\alpha\, dx = e^{\alpha\psi(x)} \cdot b e^{-\alpha\psi(x)} = b.$$

Die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ ist für $x > 0$ evident, braucht also nur für die Stelle $x = 0$ bewiesen zu werden. Nun ist nach Definition $y_{\nu+1}(0) = 0$; andererseits folgt aus (11) durch Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} y_{\nu+1}(x) &= e^{\alpha\psi(x)} [f(x_1, y_\nu(x_1)) + \alpha y_\nu(x_1)] \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} f(x_1, y_\nu(x_1)) + y_\nu(x_1), \end{aligned}$$

wo x_1 ein Mittelwert zwischen 0 und x ist. Mit x wandert auch x_1 gegen Null, also auch $y_\nu(x_1)$, weil für diesen Wert von ν die Stetigkeit schon als bewiesen angenommen wird; man erhält somit:

$$\lim_{x=+0} y_{\nu+1}(x) = 0,$$

womit auch die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ bewiesen ist.

Nunmehr wollen wir zeigen, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq a'$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion y konvergieren. In der Tat ist nach (11) für $\nu = 2, 3, 4, \cdots$

$$y_{\nu+1} - y_\nu = e^{\alpha\psi(x)} \int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y_{\nu-1}) + \alpha(y_\nu - y_{\nu-1})] dx,$$

also mit Rücksicht auf (3)

$$|y_{\nu+1}-y_\nu| \leqq e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\vartheta\alpha|y_\nu-y_{\nu-1}|\,dx.$$

Die stetige Funktion $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ hat im Intervall $0 \leqq x \leqq a'$ ein Maximum. Bezeichnet man dieses mit M_ν, so folgt:

$$|y_{\nu+1}-y_\nu| \leqq e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\vartheta\alpha M_\nu\,dx = \vartheta M_\nu.$$

Daher auch $M_{\nu+1} \leqq \vartheta M_\nu$, und folglich

$$|y_{\nu+1}-y_\nu| \leqq M_{\nu+1} \leqq \vartheta^{\nu-1}M_2.$$

Daraus ergibt sich die zu beweisende gleichmäßige Konvergenz. Die Grenzfunktion

$$y = \lim_{\nu=\infty} y_\nu$$

ist wegen der Gleichmäßigkeit auch stetig; ferner verschwindet sie für $x=0$, weil alle y_ν für $x=0$ verschwinden; schließlich ist auch $|y| \leqq b$, weil alle $|y_\nu| \leqq b$ waren.

Daß die so gefundene Funktion y nun wirklich die Gleichung (9) löst, erkennt man jetzt leicht. Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl n angeben derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq a'$ stets $|y_\nu - y| < \varepsilon$ ist. Wegen $|y_\nu| \leqq b$, $|y| \leqq b$ folgt dann mit Rücksicht auf (3):

$$\begin{aligned} &\left| e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x,y_\nu)-f(x,y)+\alpha(y_\nu-y)]\,dx \right| \\ &\qquad \leqq e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\vartheta\alpha\,|y_\nu-y|\,dx \\ &\qquad < e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\vartheta\alpha\varepsilon\,dx = \vartheta\varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu=\infty} e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x,y_\nu)+\alpha y_\nu]\,dx \\ &\qquad = e^{\alpha\psi(x)}\int\limits_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x,y)+\alpha y]\,dx. \end{aligned}$$

Läßt man also ν in Gleichung (11) über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich gerade die zu beweisende Formel (9).

§ 4.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Lösung y der Gleichung (9) und damit der Gleichung (1) gefunden, welche für $x = 0$ verschwindet. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Gleichung (1) keine weitere derartige Lösung hat. Wäre nämlich noch eine vorhanden — sie möge z heißen —, so wäre das auch eine Lösung von (9) und man hätte:

$$y - z = e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) + \alpha(y - z)]\, dx.$$

Ist a'' eine hinreichend kleine positive Zahl, so wird für $0 \leqq x \leqq a''$ nicht nur $|y| \leqq b$, sondern auch $|z| \leqq b$ sein. Wir können also die Ungleichung (3) anwenden und erhalten:

$$|y - z| \leqq e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha |y - z|\, dx.$$

Im Intervall $0 \leqq x \leqq a''$ muß die stetige Funktion $|y - z|$ irgendwo ihren größten Wert M annehmen; das sei etwa der Fall für $x = x_1$. Dann folgt aus der vorigen Ungleichung, wenn speziell $x = x_1$ gesetzt wird,

$$M \leqq e^{\alpha\psi(x_1)} \int_0^{x_1} \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M\, dx = \vartheta M.$$

Daher ist $M = 0$, also $z = y$. W. z. b. w.

§ 5.

Wir wenden uns jetzt zu dem in Theorem I erwähnten Fall des positiven Vorzeichens. Es ist dann

$$0 < k < \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} < K \qquad (y_1 \neq y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq a$, $|y_1| \leqq b$, $|y_2| \leqq b$. Setzt man wieder

$$\frac{K + k}{2} = \alpha, \quad \frac{K - k}{K + k} = \vartheta,$$

so folgt diesmal

$$(12) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2) - \alpha(y_1 - y_2)| \leqq \vartheta\alpha |y_1 - y_2|,$$

was auch für $y_1 = y_2$ noch gilt; dabei ist α wieder positiv, ϑ positiv und kleiner als 1.

Aus den Voraussetzungen des Theorems I resultiert nun weiter die

Existenz von zwei positiven Zahlen $a'(\leqq a)$ und $b'(<b)$ derart, daß für $0 \leqq x \leqq a'$ stets

(13) $$\alpha b' + |f(x, 0)| \leqq b\alpha(1-\vartheta)$$

ist. Alsdann setzen wir wieder

(14) $$\int_x^{a'} \frac{dz}{\varphi(z)} = \psi(x), \quad \text{also} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (0<x\leqq a'),$$

und es ist wie früher

(15) $$\psi(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a',$$

(16) $$\lim_{x=+0} \psi(x) = \infty.$$

Die Differentialgleichung (1) ist hiernach gleichbedeutend mit der folgenden:

(17) $$\frac{d}{dx}\left(y e^{\alpha\psi(x)}\right) = \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) - \alpha y].$$

Indem wir zwei beliebige Zahlen x_0, y_0 in dem Spielraum

(18) $$0 < x_0 \leqq a', \quad |y_0| \leqq b'$$

wählen, wollen wir die Gleichung (17) in der Weise integrieren, daß für $x = x_0$ der Wert $y = y_0$ herauskommt; so ergibt sich:

(19) $$y = e^{-\alpha\psi(x)}\left\{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y) - \alpha y]\, dx\right\}$$

und offenbar sind diejenigen Lösungen der Differentialgleichung (1), welche für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annehmen, identisch mit den entsprechenden Lösungen von (19). Das Theorem I wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß (19) gerade *eine* Lösung hat, die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ und zugleich für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt.

Wir suchen nun (19) wieder durch sukzessive Näherungen zu lösen, indem wir

(20) $$y_1 = \frac{y_0 x}{x_0},$$

(21) $$y_{\nu+1} = \begin{cases} e^{-\alpha\psi(x)}\left\{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \displaystyle\int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}[f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu]\, dx\right\} & \text{für } 0<x\leqq x_0, \\ 0 \quad \text{für} \quad x = 0 & \end{cases}$$

setzen $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$. Zunächst zeigen wir, daß diese Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq x_0$ wirklich existieren, stetig sind und absolut $< b$ bleiben. Nach (18) und (20) ist das wegen $b' < b$ in der Tat für $\nu = 1$ der Fall. Nimmt man aber an, es gelte für einen gewissen Wert von ν, so ist zunächst nach (12) und (13)

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| \leqq |f(x, 0)| + \vartheta\alpha|y_\nu|$$
$$< b\alpha(1-\vartheta) - \alpha b' + \vartheta\alpha b;$$

also

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| < \alpha(b - b') \qquad (\text{für } 0 \leqq x \leqq x_0). \tag{22}$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (21) für $0 < x \leqq x_0$:

$$|y_{\nu+1}| \leqq e^{-\alpha\psi(x)}\left\{|y_0|\, e^{\alpha\psi(x_0)} + \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\alpha(b-b')\,dx\right\}$$
$$\leqq e^{-\alpha\psi(x)}\{b' e^{\alpha\psi(x_0)} + (b-b')(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)})\}$$
$$< b' + (b - b') = b.$$

Die Stetigkeit von $y_{\nu+1}$ ist für $x > 0$ evident, braucht also nur für $x = 0$ bewiesen zu werden. Nun ist $y_{\nu+1}(0) = 0$; andererseits folgt aus (21):

$$y_{\nu+1} = e^{-\alpha\psi(x)}\left\{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_1} - \int_{x_1}^{x_0}\right\} \qquad (0 < x < x_1 < x_0). \tag{23}$$

Da y_ν bereits als stetig angenommen wird, so ist $\lim\limits_{x=+0} y_\nu = 0$, und man kann nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Zahl x_1 so klein wählen, daß für $0 \leqq x \leqq x_1$

$$|f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu| < \varepsilon\alpha$$

ist. Dann folgt

$$\left|\int_x^{x_1}\right| \leqq \int_x^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\varepsilon\alpha\,dx = \varepsilon(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_1)}) < \varepsilon e^{\alpha\psi(x)}.$$

Außerdem wird unter Berücksichtigung von (22)

$$\left|\int_{x_1}^{x_0}\right| \leqq \int_{x_1}^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\alpha(b-b')\,dx = (b-b')(e^{\alpha\psi(x_1)} - e^{\alpha\psi(x_0)})$$
$$< (b-b')e^{\alpha\psi(x_1)}.$$

Setzt man dies in (23) ein, so kommt:

$$|y_{\nu+1}| < e^{-\alpha\psi(x)}\{b' e^{\alpha\psi(x_0)} + \varepsilon e^{\alpha\psi(x)} + (b-b')e^{\alpha\psi(x_1)}\}$$
$$< \varepsilon + b e^{\alpha\psi(x_1) - \alpha\psi(x)}.$$

Läßt man hier x gegen Null wandern, so wird wegen (16) schließlich $b e^{\alpha\psi(x_1) - \alpha\psi(x)} < \varepsilon$, also $|y_{\nu+1}| < 2\varepsilon$, womit die Stetigkeit bewiesen ist.

Schließlich bemerken wir, daß die Funktionen y_ν für $x = x_0$ alle den Wert y_0 annehmen; das ergibt sich aus (20) und (21) unmittelbar.

Nunmehr zeigen wir, daß die Funktionen y_ν für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. In der Tat ist nach (21) für $\nu = 2, 3, 4, \cdots$

$$y_{\nu+1} - y_\nu = -e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y_{\nu-1}) - \alpha(y_\nu - y_{\nu-1})]\, dx.$$

Daher mit Rücksicht auf (12):

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |y_\nu - y_{\nu-1}|\, dx.$$

Die stetige Funktion $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ hat im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ ein Maximum M_ν; es ist dann

$$\begin{aligned} |y_{\nu+1} - y_\nu| &\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M_\nu\, dx \\ &= e^{-\alpha\psi(x)} \vartheta M_\nu \left(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}\right) < \vartheta M_\nu. \end{aligned}$$

Daher auch $M_{\nu+1} < \vartheta M_\nu$, und folglich

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq M_{\nu+1} < \vartheta^{\nu-1} M_2.$$

Daraus ergibt sich die zu beweisende gleichmäßige Konvergenz. Die Grenzfunktion

$$y = \lim_{\nu=\infty} y_\nu$$

ist wegen der Gleichmäßigkeit auch stetig; ferner nimmt sie für $x = 0$ bzw. $x = x_0$ die Werte $y = 0$ bzw. $y = y_0$ an, weil alle y_ν dies tun. Schließlich ist auch $|y| \leqq b$, weil alle $|y_\nu| < b$ waren.

Daß die so gefundene Funktion y nun wirklich die Gleichung (19) löst, sieht man jetzt leicht ein. Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz läßt sich zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl n angeben derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ stets $|y_\nu - y| < \varepsilon$ ist. Wegen $|y_\nu| < b$, $|y| \leqq b$ folgt dann mit Rücksicht auf (12):

$$\begin{aligned} &\left| e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - f(x, y) - \alpha(y_\nu - y)]\, dx \right| \\ &\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |y_\nu - y|\, dx \\ &\leqq e^{-\alpha\psi(x)} \vartheta\varepsilon \left(e^{\alpha\psi(x)} - e^{\alpha\psi(x_0)}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{\nu=\infty} e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y_\nu) - \alpha y_\nu]\, dx$$

$$= e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - \alpha y]\, dx.$$

Läßt man also ν in (21) über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich gerade die zu beweisende Formel (19).

§ 6.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Lösung der Gleichung (1) gefunden, welche für $x = 0$ verschwindet und außerdem für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Wir wollen jetzt zeigen, daß es keine weitere derartige Lösung gibt. Nehmen wir nämlich an, es sei noch eine vorhanden — sie möge z heißen —, so ist das auch eine Lösung von (17); also ist

$$(24) \qquad \frac{d}{dx}\left((y-z)\, e^{\alpha\psi(x)}\right) = \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) - \alpha(y-z)].$$

Nun sei x_1 die obere Grenze derjenigen x des Intervalles $(0, x_0)$, für welche $y \neq z$ ist. Offenbar ist $x_1 > 0$, und man hat dann

$$(25) \qquad z(x_1) = y(x_1),$$

während das Maximum M_h, das die stetige Funktion $|z - y|$ im Intervall $(x_1 - h, x_1)$ erreicht, notwendig *größer* als Null ist, wie klein auch die positive Zahl h sei; dieses Maximum werde etwa für $x = x_1 - h_1$ erreicht. Offenbar ist $0 < h_1 \leqq h$, und man hat:

$$(26) \qquad \begin{cases} |z(x) - y(x)| \leqq M_h \quad (\text{für } x_1 - h \leqq x \leqq x_1), \\ |z(x_1 - h_1) - y(x_1 - h_1)| = M_h > 0. \end{cases}$$

Nun haben wir $|y| \leqq b$ gefunden; wir werden am Schluß dieses Paragraphen zeigen, daß hierbei Gleichheit ausgeschlossen ist. Nehmen wir dies einstweilen als bewiesen an, so ist auch $|z(x_1)| = |y(x_1)| < b$. Man kann daher h so klein wählen, daß $|y|$ und $|z|$ im Intervall $(x_1 - h, x_1)$ kleiner als b bleiben. Indem man dann Gleichung (24) von $x_1 - h_1$ bis x_1 integriert, kommt unter Berücksichtigung von (25):

$$z(x_1 - h_1) - y(x_1 - h_1)$$

$$= e^{-\alpha\psi(x_1 - h_1)} \int_{x_1 - h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, y) - f(x, z) - \alpha(y - z)]\, dx.$$

Da $|y|$ und $|z|$ kleiner als b sind, kann man auf die rechte Seite die Formel (12) anwenden und erhält:

$$|z(x_1-h_1)-y(x_1-h_1)| \leqq e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\,|y-z|\,dx.$$

Also auch mit Rücksicht auf (26)

$$\begin{aligned} M_h &\leqq e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha M_h\,dx \\ &= e^{-\alpha\psi(x_1-h_1)}\,\vartheta M_h\left(e^{\alpha\psi(x_1-h_1)}-e^{\alpha\psi(x_1)}\right) < \vartheta M_h. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $M_h < \vartheta M_h$ enthält aber wegen $M_h > 0$ einen Widerspruch, es gibt also keine zweite Lösung z.

Nun ist noch der Beweis nachzutragen, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$ stets $|y| < b$ ist mit Ausschluß der Gleichheit. Aber aus der bereits bewiesenen Ungleichung $|y| \leqq b$ folgt mit Rücksicht auf (12) und (13):

$$\begin{aligned} |f(x,y)-\alpha y| &\leqq |f(x,0)| + \vartheta\alpha|y| \\ &\leqq b\alpha(1-\vartheta) - \alpha b' + \vartheta\alpha b = \alpha(b-b'). \end{aligned}$$

Daher nach (19) für $0 < x \leqq x_0$:

$$\begin{aligned} |y| &\leqq e^{-\alpha\psi(x)}\left\{|y_0|\,e^{\alpha\psi(x_0)} + \int\limits_{x}^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\,\alpha(b-b')\,dx\right\} \\ &\leqq e^{-\alpha\psi(x)}\left\{b' e^{\alpha\psi(x_0)} + (b-b')\left(e^{\alpha\psi(x)}-e^{\alpha\psi(x_0)}\right)\right\} \\ &< b' + (b-b') = b. \end{aligned}$$

Da aber auch $|y(0)| = 0 < b$, so ist allgemein $|y| < b$. W. z. b. w.

§ 7.

Wir zeigen jetzt, daß die Integralkurven in gewissen Fällen die Kurve $f(x,y)=0$ im Nullpunkt berühren. Bemerken wir zunächst, daß unter den Voraussetzungen von Theorem I die Gleichung $f(x,y)=0$ wirklich eine Kurve definiert; oder analytisch ausgedrückt: Es gibt eine und nur eine stetige Funktion y von x, welche der Gleichung $f(x,y)=0$ genügt und für $x=0$ verschwindet. In der Tat war nach unseren Voraussetzungen

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2) \pm \alpha(y_1-y_2)| \leqq \vartheta\alpha|y_1-y_2| \qquad (0<\vartheta<1),$$

wo α eine positive Zahl bedeutet und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Fall des § 3 oder § 5 vorliegt. Setzt man nun

$$y \pm \frac{1}{\alpha} f(x,y) = \chi(x,y),$$

so nimmt die Gleichung $f(x, y) = 0$ die Form an:

$$y = \chi(x, y)$$

und dabei ist

$$|\chi(x, y_1) - \chi(x, y_2)| \leqq \vartheta |y_1 - y_2|.$$

Nach einem von Herrn Goursat bewiesenen Satz*) folgt hieraus für genügend kleine x gerade die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion y. W. z. b. w.

Wir setzen nun weiter voraus, daß die Kurve $f(x, y) = 0$ im Nullpunkt eine bestimmte Tangente hat, die nicht mit der Y-Achse zusammenfällt. Das ist beispielsweise immer der Fall, wenn die partiellen Ableitungen f_x', f_y' existieren und stetig sind (f_y' kann nach den Voraussetzungen von Theorem I nicht Null sein). Wenn wir dann weiter annehmen, daß

$$\lim_{x = +0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \tag{27}$$

ist, wollen wir zeigen, daß die Integralkurven im Nullpunkt die Kurve $f(x, y) = 0$ berühren. Zu dem Zweck sei mit Y_1 die für $x = 0$ verschwindende Lösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ bezeichnet; also

$$f(x, Y_1) = 0. \tag{28}$$

Unsere Voraussetzung über die Tangentenexistenz besagt dann, daß der Grenzwert

$$\lim_{x = +0} \frac{Y_1}{x} = \lambda \tag{29}$$

existiert und endlich ist.

Indem wir jetzt zuerst den Fall des § 3 behandeln, sei Y_2 das für $x = 0$ verschwindende Integral der Differentialgleichung (1); wir haben dann nur zu zeigen, daß auch $\frac{Y_2}{x}$ für $x = +0$ dem Grenzwert λ zustrebt. Nun ist nach Formel (9)

$$Y_2 = e^{\alpha \psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha \psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_2) + \alpha Y_2] \, dx.$$

Also, wenn wir zur Abkürzung

$$e^{\alpha \psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha \psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_1) + \alpha Y_1] dx - Y_1 = x \Phi(x) \qquad (x > 0) \tag{30}$$

*) É. Goursat: „Sur la théorie des fonctions implicites". Bulletin de la Société Mathématique de France, 31 (1903).

setzen, auch

$$Y_2 - Y_1 = x\Phi(x) + e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_2) - f(x, Y_1) + \alpha(Y_2 - Y_1)]\, dx.$$

Daher für genügend kleines x mit Rücksicht auf (3) und unter Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$|Y_2(x) - Y_1(x)| \leqq x|\Phi(x)| + e^{\alpha\psi(x)} \int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |Y_2 - Y_1|\, dx$$
$$= x\,|\Phi(x)| + \vartheta\,|Y_2(x_1) - Y_1(x_1)|,$$

wo $0 < x_1 < x$ ist. Wendet man diese Formel wiederholt an, so kommt, wenn $x_1, x_2, x_3, \cdots$ eine geeignet zu wählende Serie von abnehmenden positiven Zahlen bedeutet,

$$\begin{aligned} |Y_2(x) - Y_1(x)| &\leqq x|\Phi(x)| + \vartheta x_1|\Phi(x_1)| + \cdots + \vartheta^\nu x_\nu|\Phi(x_\nu)| \\ &\qquad + \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})| \\ &\leqq x\{|\Phi(x)| + \vartheta|\Phi(x_1)| + \cdots + \vartheta^\nu|\Phi(x_\nu)|\} \\ &\qquad + \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})|. \end{aligned}$$

Da aber offenbar

$$\lim_{\nu=\infty} \vartheta^{\nu+1}|Y_2(x_{\nu+1}) - Y_1(x_{\nu+1})| = 0,$$

so folgt hieraus

$$(31) \qquad \left|\frac{Y_2(x) - Y_1(x)}{x}\right| \leqq |\Phi(x)| + \vartheta\,|\Phi(x_1)| + \vartheta^2|\Phi(x_2)| + \cdots,$$

vorausgesetzt daß diese Reihe konvergiert. Nun ist aber nach (30) und (28)

$$\Phi(x) + \frac{Y_1}{x} = \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\, \alpha\, Y_1\, dx}{x e^{-\alpha\psi(x)}}.$$

Auf der rechten Seite haben Zähler und Nenner für $\lim x = +0$ den Grenzwert 0. Man findet nach den Regeln der Differentialrechnung den Grenzwert des Quotienten, indem man Zähler und Nenner differenziert. Es kommt so mit Rücksicht auf (29) und (27):

$$\lim_{x=+0} \Phi(x) + \lambda = \lim_{x=+0} \frac{\dfrac{e^{-\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\alpha Y_1}{e^{-\alpha\psi(x)}\left(1 + \dfrac{\alpha x}{\varphi(x)}\right)} = \lim_{x=+0} \frac{\dfrac{Y_1}{x}}{\dfrac{\varphi(x)}{\alpha x} + 1} = \lambda.$$

Daher

$$(32) \qquad \lim_{x=+0} \Phi(x) = 0.$$

Infolgedessen konvergiert die fragliche Reihe für genügend kleine x, und die Ungleichung (31) ist also richtig. Aus ihr folgt dann aber im Verein mit (32) sogleich:

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2(x) - Y_1(x)}{x} = 0,$$

also auch:

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2}{x} = \lim_{x=+0} \frac{Y_1}{x} = \lambda. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Wir wenden uns jetzt dem Fall des § 5 zu. Dann sei Y_3 das für $x = 0$ verschwindende und für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmende Integral der Differentialgleichung (1). Dabei denken wir uns, was keine Beschränkung bedeutet, x_0 so klein, daß die Funktion Y_1 jedenfalls für $0 \leqq x \leqq x_0$ existiert und absolut $\leqq b$ ist. Nach Formel (19) ist dann

$$Y_3 = e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_3) - \alpha Y_3]\, dx \right\}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$(33) \quad e^{-\alpha\psi(x)} \left\{ y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} - \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_1) - \alpha Y_1]\, dx \right\} - Y_1 = x\Psi(x),$$

so ist auch

$$Y_3 - Y_1 = x\Psi(x) - e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} [f(x, Y_3) - f(x, Y_1) - \alpha(Y_3 - Y_1)]\, dx.$$

Daher mit Rücksicht auf (12) und unter Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} |Y_3(x) - Y_1(x)| &\leqq x|\Psi(x)| + e^{-\alpha\psi(x)} \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \vartheta\alpha\, |Y_3 - Y_1|\, dx \\ &\leqq x|\Psi(x)| + \vartheta\, |Y_3(x_1) - Y_1(x_1)|, \end{aligned}$$

wobei wieder $0 < x_1 < x$ ist. Hieraus folgt analog wie oben:

$$(34) \qquad \left| \frac{Y_3(x) - Y_1(x)}{x} \right| \leqq |\Psi(x)| + \vartheta\, |\Psi(x_1)| + \vartheta^2 |\Psi(x_2)| + \cdots,$$

vorausgesetzt, daß diese Reihe konvergiert. Nun ist aber nach (33) und (28)

$$\Psi(x) + \frac{Y_1}{x} = \frac{y_0 e^{\alpha\psi(x_0)} + \int_x^{x_0} \frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)} \alpha Y_1\, dx}{x e^{\alpha\psi(x)}}.$$

Hier hat der Nenner der rechten Seite für $\lim x = +0$ den Grenzwert ∞, wie man auf Grund der Voraussetzung (27) leicht erkennt. Man findet den Grenzwert des Quotienten, indem man Zähler und Nenner differenziert.*) Es kommt dann:

$$\lim_{x=+0} \Psi(x) + \lambda = \lim_{x=+0} \frac{-\frac{e^{\alpha\psi(x)}}{\varphi(x)}\alpha Y_1}{e^{\alpha\psi(x)}\left(1-\frac{\alpha x}{\varphi(x)}\right)} = \lim_{x=+0} \frac{\frac{Y_1}{x}}{1-\frac{\varphi(x)}{\alpha x}} = \lambda.$$

Daher ist

$$\lim_{x=+0} \Psi(x) = 0. \tag{35}$$

Infolgedessen konvergiert die fragliche Reihe für genügend kleine x und die Ungleichung (34) ist also richtig. Aus ihr folgt dann im Verein mit (35) sogleich

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2(x)-Y_1(x)}{x} = 0,$$

also auch

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_2}{x} = \lim_{x=+0} \frac{Y_1}{x} = \lambda. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Somit haben wir bewiesen:

Theorem II. *Zu den Voraussetzungen des Theorems* I *mögen noch die folgenden beiden hinzukommen:*

1. *Die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definierte und sicher existierende Kurve habe im Nullpunkt eine bestimmte Tangente, die nicht in die Y-Achse fallen soll.*

2. $$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

Alsdann berühren die Integralkurven des Theorems I *die Kurve $f(x, y) = 0$ im Nullpunkt.*

---

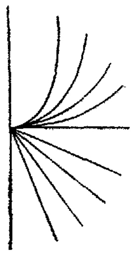
*) Hierbei wird der folgende Satz benutzt: „Wenn die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ an jeder Stelle im Innern des Intervalles (a, b) eine bestimmte endliche Ableitung haben, wenn dabei $F'(x) \neq 0$ und $\lim_{x=a} F(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

vorausgesetzt, daß der rechts stehende Grenzwert existiert." Der Satz findet sich in den Lehrbüchern meist nur für den Fall, daß auch $\lim_{x=a} f(x) = \infty$ ist. In der angegebenen und für uns notwendigen Form steht er bei O. Stolz: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1893, S. 77, wo indessen noch die Voraussetzung gemacht wird, daß $F'(x)$ konstantes Vorzeichen hat. Diese Voraussetzung ist aber unnötig; denn erstens kann sie bei dem Stolzschen Beweis leicht entbehrt werden, zweitens ist sie aber wegen $F'(x) \neq 0$ schon von selbst erfüllt, weil nach einem von Herrn Darboux bewiesenen Satz (Annales de l'École Normale, (2) 4 (1875), Seite 109 f.) eine derivierte Funktion keinen Zwischenwert ausläßt.

Wir bemerken, daß die Voraussetzung $\lim \frac{\varphi(x)}{x} = 0$ durchaus notwendig ist. Ohne sie können die Integralkurven sehr verschiedenes Verhalten zeigen. Zum Beispiel sind bei der Differentialgleichung

$$xy' = 2y + |y|$$



alle anderen Voraussetzungen unseres Theorems erfüllt. Die Kurve $f(x, y) = 0$ ist hier die X-Achse; also $Y_1 = 0$. Integralkurven gibt es dreierlei:

1. $y = Cx^3 \qquad C > 0,$
2. $y = 0,$
3. $y = -Cx, \qquad C > 0.$

Die der ersten und zweiten Art berühren die X-Achse, die der dritten Art berühren sie nicht.