

SULLO STUDIO INTRINSECO DELLE CURVE DI CACCIA.

Nota di **Vittorio Nobile**, in Napoli.

Adunanza del 12 febbrajo 1905.

Il problema, in sostanza, è ben noto. Noi lo porremo sotto una forma alquanto più generale di quella in cui viene ordinariamente presentato nei trattati di cinematica e nelle applicazioni del calcolo infinitesimale e lo tratteremo coi metodi della Geometria intrinseca i quali ne semplificano notevolmente lo studio. Lo enuncieremo nei termini seguenti :

*Un punto M percorre una curva piana C con la velocità v ; trovare la traiettoria *) descritta da un punto M' che si muova nel piano di C , sapendo che la velocità w di M' è diretta costantemente verso M e conoscendo il rapporto $p = v:w$ in funzione della variabile indipendente che si sarà scelta e dei parametri atti ad individuare la posizione relativa di M ed M' .*

1. Prendiamo, per assi mobili, la tangente Mx e la normale My alla curva C in M contando le x positive nel senso del movimento. Indichiamo, inoltre, con θ l'angolo (contato da sinistra verso destra) di cui dovrebbe girare la direzione MM' per coincidere con la direzione Mx : allora, se noi denotiamo rispettivamente con ds_1 , δx e δy lo spostamento assoluto di M' e le proiezioni di esso sopra Mx ed My ,

*) Queste curve sono chiamate, ordinariamente, dai geometri francesi *courbes de poursuite*, dai tedeschi *Verfolgungskurven*. Per la letteratura dell'argomento si troveranno interessanti notizie, storiche e bibliografiche, nel libro del prof. GINO LORIA: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (Leipzig, 1902) (VII Abschnitt, zweites kapitel).

avremo, evidentemente,

$$\delta x = -ds_1 \cos \theta, \quad \delta y = -ds_1 \sin \theta,$$

ove si consideri ds_1 come positivo quando M' tende ad avvicinarsi ad M . Da queste formole si trae

$$\frac{\delta x}{ds_1} = -p \frac{x}{r}, \quad \frac{\delta y}{ds_1} = -p \frac{y}{r},$$

ds essendo l'elemento della curva C . Dopo di che le formole fondamentali *)

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}$$

ci conducono subito al sistema di equazioni differenziali simultanee di primo ordine

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = -p \frac{x}{r} + \frac{y}{\rho} - 1, \\ \frac{dy}{ds} = -p \frac{y}{r} - \frac{x}{\rho}. \end{cases}$$

In coordinate polari questo sistema è rimpiazzato dall'altro

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dr}{ds} = -(p + \cos \theta), \\ \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r}. \end{cases}$$

Integrato quest'ultimo sistema, ciò che permette di esprimere r e θ in funzione di s , la soluzione del problema è completata dalla eliminazione di s fra le due equazioni

$$(3) \quad s_1 = \int p ds, \quad \frac{p}{\rho_1} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho},$$

delle quali la seconda può anche scriversi

$$\frac{p}{\rho_1} = \frac{y}{r^2},$$

tenendo presente la seconda delle (2).

2. Noi faremo qualche applicazione delle formole precedenti ad alcuni casi particolari nei quali la integrazione dei sistemi (1) o (2) possa effettuarsi con mezzi semplici e per vie elementari. Cominceremo dal

*) Vedi E. CESÀRO, *Lezioni di Geometria intrinseca* (Napoli 1896), pag. 20.

supporre che la curva C si riduca ad una retta e che il rapporto p delle velocità sia esprimibile con una funzione della forma $p = r^n f(\theta)$.

Il sistema (2) diviene, in tal caso,

$$\frac{dr}{ds} = -(p + \cos \theta), \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin \theta}{r}$$

e ne segue immediatamente

$$\frac{dr}{r} = -\frac{p + \cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Se poniamo ora $x = \cos \theta$, $f(\theta) = \varphi(x)$, l'equazione precedente assume la forma

$$(5) \quad (1 - x^2) \frac{dr}{dx} = rx + r^{n+1} \varphi(x).$$

Siamo quindi condotti ad una equazione di BERNOULLI che si integra, come è noto, con due quadrature e che ci fa conoscere il movimento relativo di M' rispetto ad M . Infatti la trasformazione

$$z = -\frac{1}{nr^n}$$

cambia la (5) nella equazione lineare

$$(1 - x^2) \frac{dz}{dx} + nxz = \varphi(x),$$

il cui integrale generale è

$$(6) \quad z = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \int \frac{\varphi(x) dx}{(1 - x^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

per $n \leq 0$. È facile ora esprimere ρ_1 ed s_1 in funzione di x . La seconda delle (3) può infatti essere scritta

$$(7) \quad \frac{p}{\rho_1} = \frac{\sin \theta}{r}$$

tenendo presenti le (2). Se noi sostituiamo a p il suo valore $r^n \varphi(x)$ e rimpiazziamo $\cos \theta$ con x , abbiamo

$$\rho_1 = \frac{r^{n+1} \varphi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e quindi, poichè nel nostro caso

$$\frac{p}{\rho_1} = \frac{d\theta}{ds},$$

abbiamo, scrivendo $p ds$ invece di ds_1 ,

$$ds_1 = \rho_1 d\theta.$$

L'equazione intrinseca della curva cercata risulterà dunque dalla eliminazione di x fra le equazioni *)

$$(8) \quad \rho_1 = \frac{r^{n+1} \varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad s_1 = - \int \frac{\rho_1 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Noi abbiamo escluso il caso in cui $n=0$; in tal caso p dipende solamente dall'angolo θ , allora l'equazione (5) diventa

$$(1-x^2) \frac{dr}{dx} = x + \varphi(x).$$

La integrazione è immediata e si ottiene

$$r = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\int \frac{\varphi(x) dx}{1-x^2}}$$

e quindi

$$(9) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{\varphi(x)}{(1-x^2)} e^{\int \frac{\varphi(x) dx}{1-x^2}}, \\ s_1 = \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \varphi(x) e^{\int \frac{\varphi(x) dx}{1-x^2}} dx. \end{cases}$$

Nel caso $n=1$, $\varphi(x) = ax$, si ha

$$\chi = a(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \int \frac{x dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = a + C \sqrt{1-x^2}.$$

Introducendo la variabile r e sostituendo ad x , $\cos \theta$ abbiamo subito l'equazione della traiettoria relativa di M' rispetto ad M

$$(10) \quad r = - \frac{1}{a + C \sin \theta},$$

la quale rappresenta una conica di cui uno dei fuochi è in M ed il cui asse focale è diretto ortogonalmente alla traiettoria di questo punto. Il parametro è $-1:a$ e l'eccentricità ed i semi-assi rispettivamente:

$$e = \frac{C}{a}, \quad \alpha = \frac{a}{C^2 - a^2}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{a^2 - C^2}}.$$

*) Si vede chiaramente, dalla forma di queste equazioni e dell'equazione (6) che la classe di problemi corrispondenti alla forma considerata della funzione p deve includerne un'altra, abbastanza estesa, nella quale si è condotti a curve aventi le equazioni intrinseche algebriche; noi però non seguiremo qui il nostro studio in questa direzione.

Le equazioni (8), poi, assumono la forma

$$\rho_1 = \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}(a+C\sqrt{1-x^2})^2}, \quad s_1 = a \int \frac{x dx}{(1-x^2)(a+C\sqrt{1-x^2})^2},$$

ovvero, ponendo $t^2 = 1 - x^2$ ed integrando,

$$(11) \quad \begin{cases} s_1 = \frac{1}{a} \log \frac{(a+C)t}{a+Ct} + \frac{C(1-t)}{(a+C)(a+Ct)}, \\ \rho_1 = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{t(a+Ct)^2}, \end{cases}$$

ove si disponga della costante d'integrazione in modo che per $t=1$ si abbia $s_1=0$. Per $C=0$, il che corrisponde a supporre la distanza fra M ed M' eguale a $-1:a$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, vediamo, anzitutto, dalla (10), che r conserva invariato questo valore iniziale durante il movimento; poi, dalla (11), con breve calcolo di eliminazione e dopo aver cambiato il segno ad s_1 , otteniamo l'equazione della traiettoria di M'

$$\rho_1 = \alpha \sqrt{e^{\frac{2s_1}{\alpha}} - 1}$$

che rappresenta una trattrice; ciò che poteva del resto dedursi senza calcolo dal fatto della invariabilità di r dopo aver ricordato una proprietà caratteristica *) della detta curva.

3. La classe di curve corrispondenti ad $n=0$, $\varphi = \text{costante}$ si deduce dalle (8) ponendovi $\varphi = m$.

Esprimendo la costante di integrazione compresa in r funzione del valore r_0 corrispondente ad $x=0$ otteniamo

$$r = r_0 \frac{(1+x)^{\frac{m-1}{2}}}{(1-x)^{\frac{m+1}{2}}}, \quad \rho_1 = m r_0 \frac{(1+x)^{\frac{m}{2}-1}}{(1-x)^{\frac{m}{2}+1}}, \quad s_1 = -m r_0 \int_0^x \frac{(1+x)^{\frac{m-3}{2}}}{(1-x)^{\frac{m+3}{2}}} dx,$$

ovvero, introducendo il parametro $\lambda = \cot \frac{\theta}{2}$ con la sostituzione

$$x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},$$

le equazioni definitive

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{4} m r_0 \lambda^{m-2} (1 + \lambda^2)^2, \\ s_1 = -\frac{1}{2} m r_0 \int_1^\lambda \lambda^{m-2} (1 + \lambda^2) d\lambda. \end{cases}$$

*) CESÀRO, loc. cit., pag. 24, f).

La seconda di queste, per $m \leq 1$, porge

$$2 \frac{m^2 - 1}{m r_0} s_1 = 2m - (m + 1) \lambda^{m-1} - (m - 1) \lambda^{m+1}.$$

Se m è un numero razionale avremo, quando siano eliminati i radicali, due equazioni algebriche ordinarie fra ρ_1 e λ ed s_1 e λ rispettivamente: di qui una conseguenza interessante, cioè: *per ogni valore razionale di m (eccettuato $m = 1$) l'equazione intrinseca della curva corrispondente è algebrica* *). In questo caso, indicando con p e q due numeri interi e ponendo $m = p:q$, si vede che ρ_1 è un polinomio nella variabile $\lambda^{\frac{1}{q}}$ di grado $p + 2q$ ed s_1 un polinomio di grado $p + q$ nella stessa variabile; ad un valore dato di s_1 corrispondono dunque $p + q$ valori di $\lambda^{\frac{1}{q}}$ e, per conseguenza, di ρ_1 , mentre ad un valore di ρ_1 corrispondono analogamente $p + 2q$ valori di s_1 . L'equazione algebrica risultante è dunque di grado $p + q$ in ρ_1 e di grado $p + 2q$ in s_1 . È del pari evidente che tutte queste equazioni algebriche sono di genere zero essendo ρ_1 ed s_1 esprimibili con funzioni razionali della variabile $\lambda^{\frac{1}{q}}$.

4. Lasciando, adesso, il caso fin qui esaminato, supponiamo che si abbia durante il movimento

$$(13) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{b}{\rho},$$

essendo b una costante, oppure, ciò che vale lo stesso,

$$\frac{d\theta}{ds} = k \frac{\sin \theta}{r}.$$

Allora, indicando con θ_0 il valore di θ corrispondente ad $s = 0$, $\varphi = 0$, abbiamo, integrando,

$$(14) \quad \theta - \theta_0 = b\varphi, \quad \left(\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} \right).$$

Inoltre la seconda delle (2) dà, nel nostro caso,

$$(b + 1)r = \rho \sin(\theta_0 + b\varphi)$$

*) È qui opportuno notare che a tali curve corrispondono equazioni algebriche anche in coordinate cartesiane come può vedersi, per esempio, nel libro del BOOLE: *A treatise on differential equations* (Cambridge 1865), Chapter XI, dove si trova lo studio di questo caso particolare del nostro problema fatto col metodo ordinario. Nel caso $m = 1$, per la presenza di singolarità logaritmiche, la curva corrispondente si stacca nettamente dalle altre e non gode di nessuna delle due proprietà accennate.

e ci fa conoscere, insieme alla (14), il movimento relativo di M' rispetto ad M quando si sia espresso ρ in funzione di φ con la inversione dell'integrale φ ; operazione che supporremo si sappia eseguire. Dopo di ciò la derivazione rispetto ad s della eguaglianza

$$(h + 1)r = \rho \sin \theta$$

porge

$$(15) \quad (h + 1)r' = h \cos \theta + \rho' \sin \theta$$

tenendo presente la (13) e quindi

$$(16) \quad p = -(r' + \cos \theta) = -\frac{1}{h + 1} [(2h + 1) \cos \theta + \rho' \sin \theta].$$

Notando poi che la (7) dà, in virtù della prima delle (15),

$$p = (h + 1) \frac{\rho_1}{\rho},$$

vediamo, in primo luogo, che *il rapporto delle velocità dei punti M ed M' è proporzionale a quello fra i raggi di curvatura delle rispettive traiettorie*; quindi, ponendo

$$\frac{2h + 1}{(h + 1)^2} = a, \quad \frac{1}{(h + 1)^2} = b, \quad \rho \rho' = \mathfrak{R},$$

otteniamo

$$(17) \quad -\rho_1 = a\rho \cos \theta + b\mathfrak{R} \sin \theta,$$

il che significa che *il raggio di curvatura della curva di caccia è dato dalla somma delle proiezioni sulla normale a questa curva di due segmenti proporzionali ai raggi di curvatura di C e della sua sviluppata*.

Poichè adesso questa ultima eguaglianza ci permette di esprimere ρ_1 in funzione di φ e poichè, d'altra parte,

$$ds_1 = p ds = (h + 1)\rho_1 d\varphi,$$

otterremo l'equazione intrinseca della curva cercata eliminando φ fra le equazioni

$$(18) \quad \begin{cases} -\rho_1 = a\rho \cos(\theta_0 + h\varphi) + b\mathfrak{R} \sin(\theta_0 + h\varphi), \\ s_1 = (h + 1) \int \rho_1 d\varphi. \end{cases}$$

Supponiamo, in particolare, che sia possibile esprimere ρ ed s sotto la forma

$$(19) \quad \begin{cases} a\rho = \lambda \cos h\varphi, \\ b\mathfrak{R} = \lambda \sin h\varphi, \end{cases}$$

essendo λ una funzione da determinare e vediamo prima a quale ipotesi

sulla curva C tali eguaglianze corrispondano. Dividendo la seconda per la prima e sostituendo a ds , $\rho d\varphi$ abbiamo

$$(20) \quad \frac{b}{a} \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tg} h\varphi d\varphi;$$

poi, dopo aver posto

$$\frac{bh}{a} = \frac{h}{2h+1} = k$$

e indicando con ρ_0 il valore di ρ corrispondente a $\varphi=0$, $s=0$, la integrazione della (20) dà

$$(21) \quad \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k = \cos h\varphi.$$

Dalla prima delle (19) si ha subito

$$\lambda = \frac{a}{\rho_0^k} \rho^{k+1};$$

poi dalla (20), dopo avere eliminato φ ,

$$(22) \quad s = \frac{1}{2h+1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2h}{2h+1}} - 1}}.$$

Le curve in questione sono dunque *le spirali sinusoidi*.

È facile, anche, in questo caso la eliminazione di φ fra le (18) e notevole il risultato al quale si perviene. Difatti otteniamo subito, da queste equazioni,

$$\rho_1 = -\lambda \cos \theta_0 = -a\rho_0 \cos \theta_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k+1},$$

ovvero, introducendo la variabile φ per mezzo della (21), ponendo

$$\alpha = -a\rho_0 \cos \theta_0$$

ed esprimendo k in funzione di h ,

$$\cos h\varphi = \left(\frac{\alpha}{\rho_1} \right)^{\frac{h}{3h+1}}.$$

Da questa relazione fra ρ_1 e φ , tenendo presente la seconda delle (18), abbiamo, con facile calcolo, la equazione che rappresenta le curve di caccia corrispondenti alle (22) cioè

$$(23) \quad s_1 = \frac{h+1}{3h+1} \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\alpha} \right)^{\frac{2h}{3h+1}} - 1}}.$$

Queste curve sono dunque anche esse delle spirali sinusoidi. Detti rispettivamente n ed n_1 gl'indici delle spirali (22) e (23) si hanno le eguaglianze

$$\frac{b}{2b+1} = \frac{n}{n-1}, \quad \frac{b}{3b+1} = \frac{n_1}{n_1-1}$$

e quindi la seguente semplicissima relazione fra n ed n_1

$$n_1 = \frac{n}{1-n}.$$

5. È bene notare che la ipotesi da noi fatta, e che è espressa dalla (13), può essere surrogata dall'altra espressa dalla relazione

$$p = (b+1) \frac{\rho_1}{\rho}$$

[poichè dalla formola generale $pr = \rho_1 \sin \theta$ si passa immediatamente, introducendo questa eguaglianza, alla (13)] oppure da quella corrispondente all'altra relazione

$$(b+1)r = \rho \sin \theta.$$

Quest'ultima formola traduce, evidentemente, la proprietà seguente: la distanza fra i due punti è proporzionale alla proiezione, sulla retta MM' , del raggio di curvatura della curva C in M , e determina completamente, insieme alla condizione geometrica fondamentale, il movimento di M' rispetto ad M .

Sono comprese, in queste famiglie di curve, (22) e (23), delle linee notissime *). Per esempio, indicando in generale con C_1 la curva di caccia corrispondente a C , abbiamo, in particolare, che per $n=0$ C e C_1 sono due spirali logaritmiche, e C taglia sotto angolo costante le tangenti dell'altra ai punti corrispondenti alle posizioni di M' , poichè ad $n=0$ corrisponde

*) Per tutto quanto riguarda lo studio di queste curve e di altre, più generali, dalle quali esse derivano si potrà consultare l'opera citata del prof. CESÀRO. Un'altra generalizzazione delle dette curve, fatta in un altro senso, considerando cioè l'equazione

$$s = \lambda \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1}},$$

è stata fatta dal medesimo autore in una Nota intitolata: *Sur une classe de courbes planes remarquables* ed inserita nei «Nouvelles Annales de Mathématiques», 3^e série, t. XIX (novembre 1900).

$h = 0$ e quindi, per la (13), $\theta = \text{cost.}$ Poichè $\alpha = -\rho_0 \cos \theta_0$, nel nostro caso, se $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, C e C_1 sono identiche e C_1 è la *svilupata* di C .

Per $n = \frac{1}{2}$, $n_1 = 1$ quindi C e C_1 rappresentano, rispettivamente, una *cardioide* ed un *circolo*. Per $n = 2$, $n_1 = -2$ quindi C e C_1 rappresentano una *lemniscata* ed una *iperbole equilatera*.

Se $h = 0$ si ha $\theta = \text{costante}$, quindi la curva C taglia le tangenti di C_1 sotto un angolo costante (in particolare, per $\theta = \frac{\pi}{2}$, vediamo che C_1 è la svilupata di C). Le equazioni (18) divengono, in tal caso

$$(24) \quad \begin{cases} -\rho_1 = \rho \cos \theta_0 + \mathfrak{R} \sin \theta_0, \\ s_1 = \int \rho_1 d\varphi = - (s \cos \theta_0 + \rho \sin \theta_0), \end{cases}$$

scegliendo convenientemente sopra C_1 l'origine degli archi, e forniscono in gran numero di casi, con calcoli algebrici elementarissimi, l'equazione di C_1 .

Napoli, 23 Gennaio 1905.

VITTORIO NOBILE.