10.

Sur les fonctions symétriques des racines des équations.

(Par M. *Henri Betti* à Florence.)

1.

La considération des fonctions génératrices des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique conduit à une expression remarquable du produit des carrés des différences de toutes les racines.

M. *Borchardt* a trouvé (vol. LIII, p. 193 de ce Journal) que la fonction symétrique

$$(1.)\qquad \Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

où

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \dots\quad x_n$$

sont les racines d'une équation

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots A_n = 0,$$

est le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante

$$\theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\frac{\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)} \right),$$

où $\Pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ désigne le produit des différences des variables $t_1, t_2, \dots t_n$.

J'ai remarqué que la fonction symétrique (1.) est aussi le coefficient du terme

$$t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \dots t_n^{-(a_n+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression

$$\frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f'(t_1) f'(t_2) \dots f'(t_n)\, \Pi^2(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\Pi^2(x_1, x_2, \dots, x_n) f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}.$$

Donc, on a deux expressions de la même quantité (1.), et en les comparant on obtient une équation, d'où l'on déduit, pour toutes les valeurs positives et entières de $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t_n^{-(a_n+1)}}}{\{\theta(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{-(a_1+1)} t_2^{-(a_2+1)} \ldots t^{-(a_n+1)}}},$$

si l'on désigne, avec *Jacobi*, par

$$\{F(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}_{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}}$$

le coefficient du terme $t_1^{m_1}, t_2^{m_2}, \ldots, t_n^{m_n}$ dans le développement de

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

2.

La fonction génératrice de toutes les fonctions symétriques des solutions communes à deux équations algébriques est donnée par le théorème suivant:

Si l'on désigne par

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad \ldots, \quad (x_\mu, y_\mu)$$

les systèmes des solutions communes aux deux équations

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0;$$

si

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(y) = 0$$

sont les deux équations finales résultantes, et M_1', M_2', M_1'', M_2'' les polynomes multiplicateurs qui donnent

$$M_1' f_1 + M_1'' f_2 = \varphi(x),$$
$$M_2' f_1 + M_2'' f_2 = \psi(y),$$

et que l'on pose

$$\theta(x, y) = \left(\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dx}\right)(M_1' M_2'' - M_1'' M_2');$$

la fonction symétrique

$$\Sigma x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_\mu^{a_\mu} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \ldots y_\mu^{b_\mu}$$

est le coefficient du terme

$$u_1^{-(a_1+1)} u_2^{-(a_2+1)} \ldots u_\mu^{-(a_\mu+1)} v_1^{-(b_1+1)} v_2^{-(b_2+1)} \ldots v_\mu^{-(b_\mu+1)}$$

dans le développement, suivant les puissances décroissantes, de l'expression suivante:

$$\frac{\theta(u_1, v_1)\,\theta(u_2, v_2)\ldots\theta(u_\mu, v_\mu)\,\Pi^2(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)\,\Pi^2(v_1, v_2, \ldots, v_\mu)}{\Pi^2(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,\Pi^2(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)\,\varphi(u_1)\,\varphi(u_2)\ldots\varphi(u_\mu)\,\psi(v_1)\,\psi(v_2)\ldots\psi(v_\mu)}$$

On peut étendre aisément ces résultats à un plus grand nombre d'équations.

Florence, 12 Juin 1857.