# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLIMINATION PAR LE CHEVALIER FRANÇOIS FAÀ DE BRUNO, *Paris* Librairie Centrale des Sciences LEIBER ET FARAGUET Rue de Seine—Saint—Germain N.º 13, 1859 1. vol. in 8.º pag. 224.

Il libro, che annunziamo qui, non può mancare d'essere bene accolto dai Matematici. Esso riempie una lacuna nella letteratura delle scienze esatte; perocchè dall'opera omai antiquata di Bezout in fuori, non si saprebbe citare un' altro scritto, che tratti *ex professo* le quistioni, che nell' opera del Signor Faà di Bruno vengono enucleate.

E se ottimi sono l'idea fondamentale e il proposito, è pure assai commendevole l'esecuzione. Il ch.$^{mo}$ autore raccolse accuratamente e dispose con bell'ordine, formandone un corpo di scienza, que'materiali, che si trovavano sparsi e come perduti in opere periodiche rare e difficilmente accessibili agli studiosi. Ma non si contentò, checchè protesti egli stesso nel proemio del suo libro, dell' arida fatica del compilatore; che anzi sempre ordinò, soventi rischiarò, qualche volta perfezionò il lavoro dei suoi predecessori, incorporandogli talora que' risultamenti nuovi ai quali era giunto nel corso delle sue elucubrazioni.

Indicheremo per sommi capi le materie trattate dal sig. Cav. Faà. Egli espone per le equazioni algebriche ad una e a più incognite la formazione delle funzioni simmetriche delle radici, la formola del Waring pel caso d'una sola incognita, e la formola analoga data in questi *Annali* dal prof. Betti per $n$ equazioni fra $n$ incognite; spiega i diversi metodi d'eliminazione, anche quelli del Sylvester, anche il metodo di Liouville dedotto dalla risoluzione in serie, ed il recente di Hermite che considera la risoluzione come il discriminante d'una funzione di secondo grado, e assegna il grado della equazione finale, riferendo pel caso di equazioni non canoniche il metodo del signor Minding; dimostra il teorema di Jacobi intorno alle soluzioni comuni di più equazioni, e determina il numero delle soluzioni indipendenti, onde emerge la spiegazione d'un paradosso d'Eulero; insegna il modo di trovar le soluzioni comuni, stabilisce le proprietà della risultante e varj teoremi di Brioschi, di Raabe, di Schlæffli, e amplia al caso d'un numero qualsivoglia di equazioni e di incognite il teorema di Lagrange sopra le condizioni necessarie alla esistenza d'una o più radici comuni a due equazioni. A compimento del qual teorema in cui sono comprese le condizioni indicate dal prof. Betti in questi *Annali*, 1858, pag. 7—8, mancherebbe soltanto che fosse aggiunta, come l'aggiunse il Betti, l'equazione che ha per radici le radici o soluzioni comuni delle proposte, e che pel caso di due sole equazioni date trovammo per la prima volta in una Nota del prof. Brioschi (*).

Chiudono l'opera cinque Note sopra una formola che esprime la derivata d'una funzione di funzione, sopra una formola di Borchardt per calcolare le funzioni simmetriche (**), che il Betti ha ampliata, sopra un teorema di Cayley pure appartenente alle funzioni simmetriche, sul termine generale della serie di Maclaurin applicata alla funzione d'una funzione di due o più variabili, e da ultimo sopra un teorema del prof. Betti relativo alla determinazione delle funzioni d'un solo sistema di soluzioni comuni (***).

Da questa succinta enumerazione e quasi indice si può abbastanza scorgere quante cose importanti siano contenute nel libro del signor Faà. Potrebbesi veramente desiderare, che l'esposizione delle materie, la quale nei primi capitoli è netta, perspicua e concisa a un tempo, conservasse queste doti, anzi aumentasse di chiarezza, ne'sus-

---

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1855, pag. 81. Veggasi anche la traduzione francese della *Teorica dei determinanti.*

Cercando la dimostrazione della equazione data dal prof. Betti, mi sono avveduto d'un errore che vi è corso probabilmente di copia o di stampa, e colgo questa occasione per emendarlo secondo il giudizio mio. I termini della equazione debbono essere moltissimi pei coefficienti binomiali, $1, \frac{t}{1}, \frac{t(t-1)}{1.2}$, ecc. Si dimostrerà in una maniera semplice l'equazione esatta, se chiamata $f=0$ una equazione tra $n$ incognite $x, y, z, \ldots$, chiamato $a$ il termine cognito di $f$, e $b$ il coefficiente che ha in $f$ il prodotto $\varphi = x^p\ y^q\ z^r \ldots$, si risguardi $f$ come funzione di due variabili indipendenti $a$ e $b$: poichè supposto che da altre $n$ equazioni si ricevino $\mu$ sistemi di valori per le incognite, e che i valori corrispondenti di $\varphi$ e $f$ siano $\varphi_1$ e $f_1$, $\varphi_2$ e $f_2$, ... $\varphi_\mu$ e $f_\mu$, si avrà la *risultante* delle $n+1$ equazioni $R = f_1 f_2 \ldots f_\mu$, e cambiato $a$ in $a + k\,da$, $b$ in $b + k\,db$, dove $k$ è indeterminato, $f$ diverrà $f + k(da + \varphi\, db)$, e R si cambierà in $R + k\frac{dR}{1} + k^2\frac{d^2L}{1.2} + k^3\frac{d^2R}{1.2.3} + \ldots$, ma dovrà restar identica al prodotto dei nuovi valori di $f_1, f_2, \ldots$; quindi se i valori $f_1, f_2, \ldots f_m$ corrispondano ad $m$ sistemi di soluzioni comuni e siano perciò nulle, paragonando i coefficienti delle potenze $k^0, k, k^2, \ldots k^{m-1}$ si otterranno le $m$ equazioni di condizione

$$R=0\,,\quad dR=0\,,\quad d^2R=0\,,\ \ldots\ d^{m-1}R=0\,,$$

paragonando i coefficienti della potenza $k^m$ si troverà $d^mR$ *proporzionale* al prodotto

$$(da + \varphi_1\,db)(da + \varphi_2\,db)\ldots(da + \varphi_m\,db)\,,$$

e svolgendo $d^mR$ secondo la formola simbolica $d^mR = (d_a + d_b)^m R$ e confrontando i termini simili, se ne conchiuderanno le espressioni della somma delle $m$ radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, dei loro prodotti a due a due, a tre a tre, ecc. onde infine,

$$\frac{d^mR}{da^m}\varphi^m - \frac{m}{1}\frac{d^mR}{da^{m-1}\,db}\varphi^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^mR}{da^{m-2}\,db^2}\varphi^{m-2} - \ldots \pm \frac{d^mR}{db^m} = 0.$$

(**) Un altro teorema relativo alle funzioni simmetriche fu in questi *Annali* (1858, pag. 43) attribuito al signor Borchardt, che infatti lo diede senza accennare e certo senza sapere che altri lo avesse già pubblicato: ma quel teorema era già stato dimostrato dal Cauchy nella sua Memoria del 1837 *Sur la résolution des équations d'une degré quelconque,* §. III, pag. 31.

(***) Vedi *Annali,* 1858, pag. 4, *Teorema II.*

seguenti, che trattano soggetti più complicati. Ma forse l'autore, spinto da ragioni ignote allo scrivente, è stato costretto ad affrettare la pubblicazione del suo scritto, circostanza, che può avergli impedito di stendere le ultime parti del suo lavoro con tutta quella pacatezza d'animo, che domandano i lavori d'una certa levatura.

Devesi però, a scusa del ch$^{mo}$. autore notare, che le materie trattate nella seconda metà della sua scrittura, appartenendo alle più ardue specolazioni dell'algebra, presentano gravi difficoltà per chi pretende di farne un'esposizione facile e piana, senza cadere in lungaggini. Questo può assolvere il signor Faà di Bruno dall'accennata imputazione, benchè resti sempre in un cantuccio dell'animo di chi legge un desiderio, ch'egli meno della brevità, e più della chiarezza fosse stato studioso.

Puossi ancora dubitare, che alcune parti del suo lavoro facciano quello, che i Francesi chiamano *double emploi* : nè si vede bene, perchè, dopo avere trattato di due equazioni a una variabile, poi due a due variabili, quindi tre a tre variabili, tre a due ecc. ecc. separatamente, non occorra continuare e andare Dio sà fin dove. Però quest'obbiezione è confutata in parte; per chi legge attentamente il libro, dalla osservazione, che sempre ne'singoli casi si considera il subbietto sotto un punto di veduta affatto speciale, e che i casi più semplici preparano e appianano la via ai più difficili.

Checchè sia di questi piccoli néi, che crediamo scorgere nello scritto del signor Faà di Bruno, noi crediamo debito nostro di raccomandare caldamente ai cultori delle scienze matematiche questo libro, nel quale essi troveranno molte nozioni utili e peregrine, di raccomandarlo come uno di quei trattati di cui diede un modello eccellente il prof. Brioschi con la sua *Teorica dei determinanti*, e che tanto giovano a divulgare i progressi della scienza e a preparar loro l'accesso delle pubbliche scuole dalle quali certi arroganti *conservatori* dell' ignoranza e d' ogni anticaglia vorrebbero tenerli in perpetuo lontani.

F. G.