LA MATHÉMATIQUE DANS SES RAPPORTS AVEC LA PHYSIQUE [1]).

Par M. ÉMILE PICARD.

J'entendais un jour soutenir à un éminent mécanicien que les mathématiciens ne sont pas à leur place dans les sections scientifiques des Sociétés savantes. Il estimait qu'ils devaient trouver asile dans quelque section de Philosophie ou de Logique d'une Académie des Sciences morales et politiques. Mon savant ami, en émettant cette boutade, ne pensait évidemment qu'à certains travaux de philosophie mathématique, assez en honneur aujourd'hui, qu'il jugeait sans bienveillance et regardait comme des débauches de logique des mathématiciens. La réponse était facile, et les raisons sont évidentes, pour lesquelles, dans les Universités et les Académies, les mathématiciens font partie des mêmes groupements que les savants adonnés à l'étude de la nature: le contact a en effet toujours été intime entre la Mathématique et la Physique. Ce sujet a été bien des fois traité. Il n'est peut-être pas sans intérêt de le reprendre, en jetant un coup d'œil sur le passé et cherchant à en tirer quelque enseignement pour l'avenir; c'est ce que je me propose de faire dans ce discours.

I.

Il n'est pas douteux que les Mathématiques eurent longtemps un caractère expérimental. La Géométrie fut d'abord une branche de la Physique, et des propositions assez cachées, comme la propriété de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, furent découvertes par l'expérience; à ces époques reculées, la Science apparaît avec un caractère surtout utilitaire. On

1) Conférence faite au IV Congrès international de Mathématiques. Rome, 10 avril 1908.

fait généralement honneur aux Grecs d'avoir créé la Science rationnelle et désintéressée; mais, au moins chez les premiers penseurs de la Grèce, la Mathématique reste intimement mêlée aux doctrines philosophiques et aux rêveries cosmogoniques. La devise des Pythagoriciens était que « les choses sont nombres », et les propriétés des nombres se trouvaient à la base de leurs explications sur l'Univers; leur Géométrie avait parfois un caractère mystique et magique, comme en témoigne par exemple le fameux pentagone étoilé, qui servait de signe de reconnaissance aux adeptes de l'École et était considéré comme un symbole de la santé. Si nous arrivons maintenant à la Géométrie classique, représentée par les livres d'Euclide et de ses successeurs, nous entrons dans le domaine de la pure logique, où la déduction travaille sur les concepts lentement élaborés dans les âges antérieurs. Il faut cependant compléter cette vue. La Géométrie fut quelque chose de plus pour les Grecs: ils y voyaient le type idéal de la Science, où tout est d'une intelligibilité parfaite. On a noté d'ailleurs que cette Science idéale de la Géométrie grecque, étudiant des objets rationnellement construits, ne perd pas contact avec l'intuition spatiale d'où elle tire toutes ses conceptions, et c'est là un point capital. L'instrument mathématique pourra alors être utilisé pour une connaissance de l'Univers, le réel étant en quelque sorte le monde sensible vu à travers les concepts de l'Arithmétique et de la Géométrie, et, quoique dans un domaine encore très restreint, nous comprenons pourquoi les sciences de la nature prennent de bonne heure une forme mathématique. Les travaux géométriques et mécaniques d'Archimède en donnent un admirable exemple, et la recherche qu'il fit de l'aire d'un segment, symbolise bien la connexion étroite entre ce que nous appellerions aujourd'hui les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Dans les derniers siècles de l'Hellénisme, alors que languissent les spéculations géométriques de l'époque antérieure, la Trigonométrie et la Géométrie sphérique se développent, sous l'influence des besoins de l'Astronomie, entre les mains d'Hipparque et plus tard de Ptolémée. Ainsi, à son déclin, la Science grecque nous offre un exemple, qui s'est présenté dans d'autres temps, de recherches mathématiques paraissant épuisées et se renouvelant sous l'influence de problèmes fournis par l'observation des phénomènes physiques.

Il n'est pas dans mon sujet de suivre à travers le moyen âge et la Renaissance les transformations de l'algèbre géométrique des anciens, qui se sépare peu à peu de la Géométrie. L'Algèbre, propriement dite, arrive ainsi à l'autonomie, avec son symbolisme et ses notations de plus en plus perfectionnées, constituant une langue d'une admirable clarté qui, suivant le mot de Fourier, n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses, et procure à la pensée une véritable économie. Les bonnes notations, tout le monde en convient, sont souvent indispensables pour arriver à la solution des problèmes posés. On peut aller plus loin, et dire qu'elles conduisent parfois à poser de nouveaux problèmes, l'esprit étant soutenu et porté en avant par les symboles qu'il a créés; la théorie des équations algébriques en offrirait plus d'un exemple. Il y a même un danger dans cette facilité de créations symboliques: c'est au temps qu'il appartient d'en montrer l'utilité et la fécondité. A cet égard, notre langue algébrique usuelle a fait ses preuves, en rendant possibles les progrès ultérieurs des Sciences mathématiques, et dans certaines parties de la Physique mathématique, des symbolismes plus récents rendent d'incontestables services.

Au XVII siècle, le développement de la Cinématique et de la Dynamique naissante fut la cause des plus grands progrès de l'Analyse. C'est de là que date l'Analyse moderne; elle est vraiment sortie de la Mécanique. L'origine de la notion de dérivée est dans le sentiment confus que nous avons de la mobilité des choses et de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplissent les phénomènes; les mots de *fluentes* et de *fluxions* marquent bien cette origine. Peu d'intégrations eurent plus de conséquences que celle de Galilée remontant de la loi des vitesses à celle des espaces dans le problème de la chute des corps, et il est impossible de séparer dans Huygens et Newton le mécanicien et le physicien du mathématicien; tels les grands artistes de la Renaissance, que nous trouvons à la fois peintres, architectes et sculpteurs.

Ce fut une époque décisive dans l'histoire de la Science mathématique que le moment où, allant bien au delà de ce qu'avaient rêvé les Pythagoriciens, on se rendit compte avec quelque précision que l'étude des phénomènes naturels était susceptible de prendre une forme mathématique, et cela surtout quand le développement de la Mécanique conduisit à postuler que les changements infiniment petits, de quelque nature qu'ils soient, survenant dans un système, dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci. On fut ainsi amené à penser que la forme, à laquelle on se trouverait ramené, serait donnée par des équations différentielles, et nous vivons encore aujourd'hui sur ce principe qui, depuis le commencement du XVIII siècle, a orienté le développement de l'Analyse. Il serait injuste d'oublier que les problèmes posés par la Géométrie ont eu quelque part aussi dans cette orientation, mais, pour garder un point de vue plus uniforme, et si je ne craignais d'être accusé de parodoxe, je pourrais, alléguer, comme je le disais plus haut, que la Géométrie fait partie de la Physique.

II.

L'histoire des Mathématiques, en ses points les plus essentiels, se confond au XVIII siècle avec celle de la Mécanique, et de savantes recherches sur la théorie des fonctions ont montré récemment que des problèmes fondamentaux dans cette théorie se sont présentés de bonne heure. Ainsi Clairaut, dans sa théorie de la figure de la Terre, considère pour la première fois des intégrales curvilignes et donne la condition pour qu'elles ne dépendent pas du chemin suivi entre deux limites déterminées. Pareillement, les deux équations fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe apparaissent tout d'abord dans un Mémoire sur la résistance des fluides sous la plume de d'Alembert, qui voit le rôle joué dans leur étude par le symbole $\sqrt{-1}$, déjà introduit par Leibniz et Jean Bernoulli ; un peu plus tard, d'Alembert écrivait pour la première fois l'équation $\Delta \Phi = 0$. On sait qu'une analyse, présentant avec les recherches précédentes une grande analogie, lui donnait aussi l'intégration de l'équation des cordes vibrantes. On retrouve encore les fonctions d'une variable complexe dans un Mémoire plus récent d'Euler sur le mouvement des fluides et dans les travaux de Lagrange sur les cartes *géographiques*. Ainsi une des théories de l'Analyse moderne, qui a eu le plus d'éclat au XIX siècle, a trouvé son origine dans des problèmes de Mécanique et de Physique.

L'étude de l'attraction n'a pas eu moins d'importance pour le développement de l'Analyse. On aurait pu souhaiter pour la simplicité des calculs laborieux de la Mécanique céleste une autre loi que celle du carré de la distance, mais, si la nature nous devait une compensation, il faut avouer qu'elle nous l'a largement donnée, en permettant de créer la théorie du potentiel newtonien, aucune autre loi d'attraction n'étant susceptible de poser à ce point de vue tant de problèmes féconds et d'un intérêt général. Dans cet ordre d'idées, l'équation dite de Laplace, à laquelle satisfait le potentiel en dehors des masses attirantes, est à signaler tout particulièrement; se rencontrant aussi en Hydrodynamique et dans la théorie de la chaleur, elle a conduit à différents types de problèmes aux limites qui, étendus à des équations plus générales, sont encore aujourd'hui l'objet des préoccupations des analystes. Lagrange déplorait qu'il n'y eut qu'un système du monde à découvrir. Nous serions presque tentés de croire à notre tour qu'on ne retrouvera plus une mine aussi féconde que cet ensemble de théories physiques liées à la considération du potentiel newtonien, si nous ne savions que, dans les sciences de la nature, nos représentations et nos concepts évoluent avec les progrès de l'observation et de l'expérience, ce qui fait que des regrets, comme celui de Lagrange, ne sont pas justifiés. Il y aura toujours quelques coins du système du monde à explorer, et sans doute, nous l'espérons du moins en tant que mathématiciens, quelques problèmes d'Analyse à nous poser à leur sujet.

La théorie analytique de la chaleur dans l'immortel Ouvrage de Fourier a ouvert aussi la voie à bien des problèmes, et nous y trouvons des méthodes d'intégration au moyen de solutions simples, inspirées par les questions physiques elles-mêmes. Quelquefois, en effet, celles-ci ne donnent pas seulement le matériel analytique, sur lequel travaillera le mathématicien, mais elles lui fornissent des indications sur la marche à suivre dans la solution. Ainsi, dans les théories moléculaires, les équations aux dérivées partielles se présentent comme des transformées limites, mais plus maniables, d'équations aux différences finies ou d'equations différentielles ordinaires; or, il peut arriver précisément que, pour deviner la forme des solutions, il soit utile de revenir à ces dernières équations. C' est ce qui arrive à Fourier, quand il étudie la communication de la chaleur entre des masses disjointes et en fait l'application au cas où le nombre des masses est infini. On a eu recours souvent à des considérations de ce genre pour établir des théorèmes d'existence, en passant ensuite à la limite, et l'on pourrait indiquer des travaux tout récents sur les équations fonctionnelles, qui utilisent au fond la même idée, dont la mise en œuvre peut présenter de grandes difficultés. Ce sont là des cas où la Physique rend à l'Analyse un double service, lui proposant des problèmes et lui suggérant des vues pour leurs solutions.

On a souvent cité la belle page du discours préliminaire de Fourier, où il développe cette pensée que l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques, mais il faut reconnaître qu' il y parle plus en physicien qu' en géomètre, quand il insiste sur la nécessité d'aller jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire, dit-il, de toute recherche, et sans laquelle on n'arrive qu'à des tranformations inutiles. Fourier réduit trop ici le rôle de l' Analyse mathématique, et, si la Physique a été l'origine première de grandes théories analitiques, le mathématicien rend au physicien d'autres services que de lui donner des possibilités de prévisions numériques. Nous avons tous rencontré des savants adonnés aux sciences expérimentales, pour qui c'est là la seule utilité des Mathématiques. C'est méconnaître l'admirable puissance de transformation du raisonnement et du calcul mathémathiques. Peut-on, par exemple, ne pas être saisi d'admiration quand on lit le célèbre Mémoire de Green, resté longtemps inaperçu, sur l'application de l'Analyse aux théories de l'Électricité et du Magnétisme, et dont

Gauss, Chasles et Thomson devaient dix ans plus tard retrouver les résultats. Le calcul devançait ici l'expérimentation, en découvrant des théorèmes fondamentaux sur l'induction électrostatique auxquels des expériences mémorables devaient ultérieurement conduire Faraday.

En entrant un peu plus dans le détail de la théorie des équations aux dérivées partielles, nous trouvons d'autres exemples, qui caractérisent bien les services que les Mathématiques, peuvent rendre à la Physique. Ainsi une vue très nette des différentes espèces d'ondes, au point de vue de la propagation, est résultée de la considération de différents types d'équations. Dans les équations du type de la théorie de la chaleur, l'étude des intégrales montre que toute variation se fait sentir instantanément à toute distance, mais très peu à très grande distance, et l'on ne peut parler alors de vitesse de propagation ; en un point, la température passe par un maximum pour décroître ensuite, et le temps au bout duquel ce maximum est atteint est proportionnel au carré de la distance. On sait que Lord Kelvin a appliqué l'équation de Fourier à la propagation des courants électriques dans les câbles, en négligeant l'effet de la self-induction ; il a ainsi montré que les signaux atteindraient pour chaque perturbation leurs maxima dans un temps proportionnel au carré de la distance, et ce résultat de la théorie a joué un rôle essentiel dans l'établissement de la télégraphie transatlantique.

Les choses se passent autrement dans le cas des équations du type de la propagation du son, qui est aussi celui de la propagation de la lumière et des ondes électriques. L'effet ici n'est pas immédiatement senti, il dure pendant un certain temps et disparaît ensuite, tout au moins dans les milieux à une et trois dimensions. Les deux types précédents se trouvent en quelque sorte condensés dans l'équation relative à la propagation du son dans un liquide visqueux, des ondes électriques dans un diélectrique légèrement conducteur ou dans une ligne télégraphique pour laquelle la self-induction n'est pas négligeable. Il y a, dans ce cas, encore propagation par ondes avec une vitesse déterminée, mais cette onde s'étale en arrière et laisse une trace qui demeure indéfiniment ; elle peut, dans les communications télégraphiques, être une source de confusion dans les signaux, et l'on s'est ainsi rendu compte des résultats contradictoires obtenus autrefois dans la recherche de la vitesse de l'électricité.

Ces questions de propagation d'ondes, si intéressantes pour la Physique, n'ont peut-être pas un moindre intérêt psychologique. C'est grâce à l'absence des résistances passives que peut en général se conserver au loin, pour la vue et pour l'ouïe, la netteté des sensations ; ce qui fait, comme on l'a dit, de ces deux sens les sens intellectuels par excellence. A cet égard, le sens de la vue est inférieur à celui de l'ouïe, en raison de la dispersion de la lumière, dispersion que ne présentent pas les sons modérés. Il faut d'ailleurs y ajouter le rôle considérable joué en Acoustique par les harmoniques, rôle bien moindre en Optique où l'œil ne perçoit pas une octave; et ceci ne nous éloigne pas des Mathématiques, s'il est vrai, comme le prétendent quelques physiologistes, que l'organe de Corti dans le labyrinthe de l'oreille doive être regardé comme l'organe du sens arithmétique et nous fournisse notre concept du nombre.

Il faut avouer cependant que les Mathématiques ont leurs ennemis, et les services considérables rendus par l'Analyse à la Physique sont quelquefois niés. On objecte que beaucoup de résultats analytiques ne font que traduire de simples intuitions, et peuvent s'exprimer sous forme d'analogies physiques, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux symboles mathématiques et aux équations différentielles ; on cite, entre autres, l'exemple de l'illustre Faraday. On peut répondre d'abord que l'on fait du calcul intégral de bien des manières, et l'on en fait en comptant des lignes de forces. Il n'est toutefois pas possible d'aller bien loin dans cette voie sans le secours de la langue analityque qui apporte sa précision à des notions menaçant de rester vagues et peu aptes à fournir des résultats quantitatifs. Faraday, s'il eût été géomètre, eût pu devancer Maxwell dans la recherche des lois de la propagation des ondes électriques. L'exemple antérieur de Fresnel est du même ordre; il eut l'intuition géniale des vibrations transversales de l'éther, mais pouvait-on se faire une idée vraiment précise de la distinction générale entre les vibrations transversales et les vibrations longitudinales, avant d'avoir écrit les équations aux dérivées partielles du mouvement d'un milieu élastique; j'en doute pour ma part. Je ne veux pas dire qu'on ne puisse adresser certaines critiques à notre vision mathématique de la nature, mais elles sont d'un autre ordre; j'aurai l'occasion d'en dire un mot tout à l'heure.

III.

Nous venons de montrer par des exemples particuliers les relations réciproques de la Mathématique et de la Physique. D'une manière générale, dans le développement des diverses parties de la Mécanique et de la Physique, à une période d'induction succède une période déductive, où l'on s'efforce de donner aux principes une forme définitive. Le développement mathématique et formel joue alors un rôle très important, et le langage analytique est indispensable à la plus grande extension des principes. Le symbolisme soutient et porte l'esprit en avant, et les généralisations se font avec le moindre effort. Par le simple jeu de ses symboles, l'Analyse peut suggérer des généralisations dépassant de beaucoup le cadre primitif, ne fût-ce quelquefois que par des raisons de symétrie. N'en-a-t-il pas été ainsi avec le principe des déplacements virtuels, dont l'idée première vint des mécanismes les plus simples; la forme analytique qui le traduisait et où apparaissaient des sommes de produits de deux facteurs, suggéra des extensions qui conduisirent de la Mécanique rationnelle à la Mécanique chimique à travers la Physique tout entière. Un autre exemple est encore fourni par les équations de Lagrange; ici des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles auxquelles certains savants ont proposé de ramener la notion d'explication mécanique. L'art du mathématicien a créé un moule témoignant de l'importance de la forme d'une relation analytique; il va de soi qu'il appartient à l'expérience de vérifier ensuite si l'instrument forgé est assez souple pour se prêter à des concordances expérimentales.

De tels exemples montrent assez ce que signifie une phrase, qu'on entend quelquefois répéter, à savoir qu'il n'y a dans une formule que ce qu'on y a mis; elle est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Des notions, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. Aux cas cités plus haut, on pourrait ajouter la Mécanique céleste, où il n'y a rien de plus que la formule de la gravitation, mais où d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres.

Nous citerons encore un cas de la puissance suggestive des transformations analytiques en rappelant l'ordre d'idées se rattachant au principe de la moindre action. De très bonne heure on eut l'intuition vague d'une certaine économie dans les phénomènes naturels; un des premiers exemples en fut fourni par le principe de Fermat, relatif à l'économie du temps dans la transmission de la lumière, et l'on arriva à reconnaître que les équations de la Mécanique classique correspondent à un problème de minimum. Les extensions se présentèrent alors d'elles-mêmes, conséquences nécessaires des transformations analytiques de la méthode des variations, qui donnent même d'utiles indications sur les conditions aux limites. Nous retrouvons toujours le même mécanisme: au sentiment vague le symbolisme mathématique donne une forme précise qui suggère des généralisations.

On sait l'importance qu'a aujourd'hui dans l'évolution de la Mécanique le principe de la moindre action. Ce vieux principe, d'allure théologique, semble être notre dernier retranchement dans la crise, exagérée peut-être, que traverse actuellement la Mécanique, et dans cet ordre de questions on a repris récemment, en leur donnant une grande extension, une idée émise jadis par Laplace d'une Mécanique du point rapportée à une action fonction quelconque de la vitesse, ce qui conduit à une masse variable avec cette dernière.

IV.

Mais revenons maintenant un peu en arrière. Le XVII et le XVIII siècle virent presque toujours les Mathématiques et leurs applications à la Physique cultivées par les mêmes savants. Il devait arriver un moment où des spécialisations s'établiraient; c'est une loi générale, qui régit malheureusement tous les ordres de recherches, et à laquelle échappent seuls quelques rares esprits assez puissants pour ne pas avoir à sacrifier l'étendue à la profondeur. On avait pu espérer un moment, après les merveilleux triomphes du Calcul infinitésimal, que les géomètres possédant un outil assez puissant pourraient, comme on l'a dit, tourner exclusivement leurs méditations vers l'étude des lois naturelles. Cet espoir devait être vite déçu ; les problèmes posés exigeaient de nouveaux perfectionnements en même temps qu'une étude critique des principes admis qui conduisaient parfois à d'inquiétants paradoxes. Une ère nouvelle commençait pour la Mathématique, rappelant, toutes proportions gardées, les temps où la Géométrie grecque, devenue autonome, s'était séparée des spéculations cosmogoniques et philosophiques auxquelles elle avait été liée à une époque antérieure. Parmi les premiers ouvriers de cette transformation, Gauss et Cauchy ont été en même temps de grands théoriciens de la Physique, mais Abel est un pur géomètre. Le XIX siècle eut d'illustres mathématiciens dont l'œuvre n'a aucun point de contact avec la Philosophie naturelle. Tels sont des travaux sur l'Algèbre pure et l'Arithmétique supérieure; telles aussi les spéculations sur les principes des Mathématiques.

Il faut toutefois apporter quelque prudence dans de telles affirmations. Des rapports cachés peuvent apparaître tardivement ; notre logique édifie des théories sur des concepts qui sont en somme le résultat d'un travail effectué sur nos sensations, et il est impossible de prononcer *a priori* que telle théorie ne pourra pas être un jour utilisée dans l'étude des sciences de la nature. Quoi qu'il en soit de certaines questions actuelles qui apparaissent à quelques-uns comme de purs exercices de logique, tout le monde reconnaît que les progrès de la théorie générale des fonctions ont été des plus importants pour la Physique mathématique. Que de paradoxes apparents se sont évanouis quand on a approfondi le degré de généralité des intégrales des équations aux dérivées partielles. Il arrive fréquemment en Mathématiques que l'examen de cas trop particuliers empêche d'apercevoir les vraies raisons des choses, et, à cet égard, la grande extension donnée de notre temps à l'idée de fonction aura été féconde, même dans des applications où elle paraît au premier abord inutile.

Les fonctions analytiques, qui forment la matière d'un des plus beaux chapitres de l'Analyse moderne, semblent tout d'abord présenter peu d'intérêt au point de vue où nous sommes ici placés; elles correspondent à un mode très particulier d'approximations, et d'autres développements, comme les séries trigonométriques, se sont trouvés mieux adaptés aux questions de Physique et de Mécanique, qui leur ont d'ailleurs donné naissance. Des études plus approfondies ont montré cependant que l'importance des fonctions analytiques est très grande en Physique mathématique. Il a été établi, pour un grand nombre d'équations aux dérivées partielles, que toutes leurs intégrales sont analytiques dans certaines régions de l'espace. Il semble que, avec de telles équations, les phénomènes correspondants soient soumis à un moindre degré d'arbitraire, idée nécessairement vague, mais qui se traduit par le fait précis que les conditions aux limites à imposer à une solution sont autres que pour une équation n'ayant pas toutes ses intégrales analytiques. Il suffit de comparer l'équation des cordes vibrantes et l'équation si voisine de l'équilibre calorifique d'une plaque.

Dans le même ordre d'idées, les difficultés dans la démonstration de l'unité d'une solution peuvent être différentes, suivant qu'il s'agit d'équations dont toutes les intégrales sont ou non analytiques. Même en se bornant au cas général, où les données du problème ne correspondent pas à des caractéristiques, il peut y avoir des contacts d'ordre infini entre des intégrales non analytiques, circonstance qui ne se rencontre pas avec des solutions analytiques; un exemple intéressant en est fourni par le célèbre théorème de Lagrange sur les potentiels de vitesse en Hydrodynamique, qui ne subsiste pas pour les fluides visqueux, quoique à un moment donné les rotations et leurs dérivées de tout ordre par rapport au temps puissent être nulles. Il y a là un ordre de questions qui ne sont résolues que dans des cas particuliers, surtout quand il s'agit d'équations non linéaires.

La question du domaine d' existence et du prolongement des intégrales a pour la Physique mathématique non moins d' intérêt que pour l'Analyse. Aucun problème nouveau ne se pose si toutes les intégrales sont analytiques ; il en est tout autrement dans le cas contraire. Le prolongement réside alors dans le fait qu'il y a des contacts jusq'à un certain ordre ; ces notions ont donné les résultats les plus importants dans la mécanique des fluides.

Des points de vue nouveaux sont venus resserrer encore les liens entre la théorie des fonctions de variables complexes et des questions de Physique mathématique. Dans plusieurs de celles-ci s'introduit un paramètre, et il a été très utile de regarder la solution, répondant à certaines conditions, comme fonction de ce paramètre. Or, dans de nombreux cas, la solution ainsi envisagée est une fonction analytique uniforme de ce paramètre. Ainsi, pour la vibration des membranes, les harmoniques successifs correspondent aux pôles d'une fonction méromorphe dans tout le plan. On a montré aussi que, dans la théorie de l'élasticité, les déplacements ou les efforts à la surface étant donnés, les solutions se présentent sous la forme de fonctions uniformes du paramètre d'élasticité, fonctions ayant, outre des pôles, un point singulier essentiel à distance finie. Ces résultats, qui sont d'hier, ont montré la véritable origine des difficultés qui avaient longtemps arrêté les efforts des analystes.

Il arrive aussi que la solution dépende d'un ou plusieurs paramètres géométriques entrant dans la définition de la frontière ; certaines valeurs particulières de ce paramètres correspondent à des cas spécialement intéressants, comme cela a lieu pour les corps ayant une dimension évanouissante. Ailleurs encore les singularités seront partout denses sur une ligne, et les dènominations mêmes de la Physique s' introduisent dans des mémoires d'Analyse, où l'on peut lire que les singularités forment un spectre continu. Quand on entend parler aujourd'hui de spectres de lignes et de spectres de bandes, il ne faut pas croire qu'il s'agisse nécessairement de Physique. Il peut aussi bien être question d'Analyse pure, à moins qu'il ne s'agisse à la fois de l'une et de l'autre, comme il arrive dans les efforts tentés pour expliquer la condensation des raies des spectres par les propriétés de certaines équations fonctionnelles.

Dans tous les exemples auxquels je viens de faire allusion, les équations différentielles ou éles quations fonctionnelles étaient linéaires; dans quelques cas intéressants se sont rencontrées des équations non linéaires, mais il est alors bien difficile de chercher à caractériser les solutions comme fonctions d'un paramètre figurant dans l'équation, ces fonctions pouvant être multiformes et leurs singularités dépendant des conditions initiales. Il y a là un important et difficile sujet de recherches.

Les questions de connexion jouent un rôle important dans l'Analyse moderne. Sans remonter jusqu'à Alexandre le Grand qui usa d'un moyen un peu brutal, pour tracer des coupures, elles se sont présentées d'abord à propos de l'étude géométrique des nœuds et de l'action des courants sur les courants ou les pôles magnétiques; c'est là aussi qu'apparaissait pour la première fois la notion de périodicité des intégrales. En même temps, la théorie de l'Électricité et du Magnétisme introduisait les potentiels non uniformes; peu après l'étude des fonctions algébriques et des surfaces de Riemann prenait son brillant essor, les deux domaines ayant entre eux les liens les plus étroits au point que de nombreuses questions relatives aux intégrales abéliennes peuvent être transposées dans le langage de l'Électricité.

L'équation de Laplace n'est pas la seule équation différentielle dont les solutions ont été étudiées sur une surface de Riemann ou dans des espaces multiplement connexes. Une étude analogue peut être faite pour l'équation de l'équilibre calorifique avec rayonnement, et les solutions non uniformes de l'équation des membranes se sont présentées à propos des perturbations produites par un écran sur les ondes optiques ou électro-magnétiques, c'est-à-dire dans les phénomènes de diffraction. J'ai plaisir à rappeler ici que l'étude des équations de l'élasticité a été renouvelée dans ces derniers temps par la considération de l'équilibre des corps multiplement connexes, les déplacements étant alors des fonctions non uniformes, tandis que les éléments caractéristiques de la déformation restent uniformes. On peut dire que les solutions polydromes des équations de la Physique mathématique nous réservent encore bien des surprises et seront une mine féconde de découvertes.

Il est encore une catégorie de problèmes d'Analyse peu étudiés jusqu'ici, mais auxquels doivent conduire plusieurs questions de Physique mathématique, je veux parler de la recherche de fonctions satisfaisant dans deux régions de l'espace à deux équations de types différents, et devant se raccorder ainsi que certaines de leurs dérivées le long de la surface séparant ces regions; c'est ce qui arrive, par exemple, dans l'étude des courants de convection calorifique se produisant entre deux murs.

Il serait fastidieux de prolonger cette énumération, où nous voyons la Physique poser à l'Analyse de nouveaux proplèmes. Comment cependant ne pas rappeler que c'est à la théorie de l'Électricité que nous devons la considération des fonctions de lignes, qui ont donné naissance à de brillants développements analytiques, et étendent largement la notion même de fonction.

V

Nous venons de voir, en parcourant l'histoire des rapports entre la Physique et la Mathématique, les services que l'une et l'autre se sont rendus. C'est sous l'influence de l'étude des phénomènes physiques que se sont organisées les principales disciplines des sciences mathématiques; bien souvent cette étude a, indirectement au moins, posé les problèmes et même donné des indications pour leurs solutions. En retour, sans parler des faits nouveaux que la puissance de transformation de l'Analyse a su mettre en évidence avant l'expérience, et sans insister sur les prévisions numériques auxquelles elle est apte, rappelons seulement que la netteté de son langage a donné une forme précise et maniable à des notions condamnées autrement à rester vagues, et aussi quelle force de généralisation possèdent ses symboles. Quoique nous n'ayons plus la foi ardente de Fourier et de l'admirable école des physiciens géomètres de la première moitié du siècle dernier, l'Analyse mathématique reste toujours un instrument indispensable à la Physique et quelquefois un guide précieux.

En parlant des connexions entre la Mathématique et la Physique, nous n'avons fait que constater un fait résultant du développement même de la Science. Si maintenant nous voulons voir les choses de plus haut, il faut nous demander à quoi tient cette alliance qui nous paraît nécessaire; nous devons chercher aussi si elle n'a pas des points faibles et si elle n'est pas susceptible de prendre d'autres formes.

La science physique se présente à nous comme une vue du monde extérieur à travers des concepts tirés par abstraction de l'expérience. Un système de concepts, associé à des faits particuliers et à certaines hypothèses, est susceptible d'être transformé par des déductions convenables. Si ces concepts sont d'ordre mathématique, nous avons une vision mathématique du monde extérieur, sur laquelle peut opérer notre logique. Comme l'a dit Helmholtz, nous exerçons, par la forme logique de la loi, notre domination spirituelle sur la nature qui nous était d'abord étrangère. Mais tout cela ne va pas sans sacrifices et sans dangers. Le réel, qu'envisage le physicien mathématicien, est bien pâle à côté de celui que saisit l'intuition vulgaire. Pour pouvoir faire œuvre scientifique avec cette réalité confuse, on a dû la simplifier, et il a fallu enfermer dans des cadres plus rigides les contours flottants des choses. C'est seulement alors que nous pouvons raisonner sur cette nature réduite. S'il y a là une force, il y a aussi une cause de dangers. Ceux-ci sont toutefois atténués par l'arbitraire que présentent dans une certaine mesure la formation des concepts et le choix des hypothèses intervenant dans les théories. Nous touchons ici à un point qui intéresse extrêmement les mathématiciens, car il s'agit des matériaux mêmes sur lesquels nous avons à travailler.

En adoptant, avec la notion du point matériel, les idées qui sont à la base de la Mécanique classique, nous serions conduits tout d'abord à regarder un phénomène comme correspondant à un nombre immense d'équations différentielles, où les accélérations de tous les points sont des fonctions de l'ensemble de leurs coordonnées. Mais une telle représentation n'est féconde que dans des cas très particuliers. On est obligé, dans chaque ordre de questions, de mettre en évidence certaines propriétés moyennes d'un groupe de points, température, pression, etc., qu'on regarde comme fonctions des coordonnées d'un point général et du temps. Admettant que chaque point est surtout influencé par les points voisins, on forme alors des équations aux dérivées partielles, où, conformément à l'ypothèse fondamentale de la Mécanique classique, certaines dérivées partielles par rapport au temps s'expriment à l'aide de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées.

C'est là le moule ordinaire des équations de la Physique mathématique, élargi parfois par l'introduction de termes de même nature relatifs aux résistances passives. Il représente la forme analytique sous laquelle se condense notre vision mathématique des choses. Ces représentations se sont montrées extrêmement fécondes, et de nombreux exemples en ont été rappelés tout le long de cette conférence. Mais bien des hypothèses simplificatrices ont été faites, et il est permis de prévoir que l'on ne pourra pas toujours s'y tenir. Les conséquences en seront très importantes pour nous, et de nouveaux sujets d'étude en résulteront sans doute pour l'analyste.

Il arrivera peut-être un jour où, si j'ose le dire, la dilution de la matière nécessaire à son traitement mathématique, au lieu de se faire dans un ensemble continu, se fera dans quelque autre ensemble partout dense, mais cette perspective est sans doute assez lointaine, et ne satisferait probablement guère le savant mécanicien dont je parlais en commençant. D'autres possibilités sont plus prochaines. Parfois, dans certaines questions, l'influence sur une partie du système des parties éloignées de ce système ne peut être négligée, et le problème pris dans sa généralité ne se présente plus sous forme d'équations différentielles, mais sous forme d'équations fonctionnelles où entrent d'ailleurs des dérivées des fonctions inconnues, les intégrales qui figurent dans ces équations étant étendues au volume occupé par le système considéré. On sait avec quel succès un type particulier d'équations fonctionnelles a été étudié dans ces derniers temps, et comment un ensemble de questions, qui avaient fait l'objet des recherches les plus délicates, s'est trouvé ramené à des principes extrêmement simples; mémorable exemple, après tant d'autres, de la facilité que peut apporter à la solution d'un problème particulier un point de vue plus général. Pour certaines conditions aux limites, il y a même grand intérêt à substituer des équations fonctionnelles à des équations différentielles, et l'on remplirait des volumes avec les travaux publiés dans cet ordre d'idées depuis sept ou huit ans.

Une étude systématique d'équations fonctionnelles de plus en plus compliquées devra donc dans un prochain avenir solliciter l'effort des chercheurs. Un domaine plus vaste que celui des équations différentielles, et les comprenant comme cas particuliers, s'ouvre devant nous. Nous n'y marcherons pas au hasard, guidés dans le choix des formes à traiter par la Mécanique ou la Physique.

Pour un avenir plus lointain, on peut prévoir des problèmes plus complexes encore. La Mécanique, nous l'avons rappelé, a longtemps postulé plus ou moins explicitement un principe de non-hérédité. Nous nous accomodons encore de ce principe, au moins en première approximation, dans les sciences de la nature inanimée, quoique de nombreux phénomènes indiquent que l'état actuel garde la trace des états antérieurs; tels ces corps, comme le soufre, qui ont une vitesse de transformation d'une forme en une autre, différente suivant leur histoire antérieure. Mais l'hérédité joue surtout un rôle capital dans les sciences de la vie, et nous ne savons pas si nous pourrons utiliser jamais l'instrument mathématique pour l'étude du mécanisme intime des phénomènes biologiques, et si nous ne devrons pas toujours nous contenter de moyennes grossières et de courbes de fréquences. Il ne faut pas cependant réduire à l'avance notre conception mathématique du monde, et nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les précédentes parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, intégrales qui apporteront la part de l'hérédité. Ces équations fonctionnelles réuniront, dans des conditions infiniment complexes, les caractères des deux types simples étudiés avec tant de succès dans ces dernières années, pour lesquels les limites des intégrales sont constantes pour l'un et variables pour l'autre.

Ces espérances sont peut-être chimériques. Sur le terrain mouvant de la vie où figurent un nombre énorme de variables, il se peut qu'il soit impossible de former des équations fonctionnelles, relatives à certains états moyens, devant jouer le même rôle que les équations différentielles de la Physique mathématique actuelle. Mais, si le philosophe peut faire des réserves, il n'y a pour le mathématicien aucun danger à s'abandonner à ces vues audacieuses, qui le poussent à travailler dans une direction certainement féconde.

Et, encore une fois, le monde extérieur nous aura guidés dans nos recherches analytiques, nous orientant vers les voies utiles à parcourir. Nous avons vu qu'il en a toujours été ainsi, et nous ne craignons pas d'affirmer qu'il en sera de même dans l'avenir. Pour en revenir au commencement de ce discours, notre vraie place est à côté de ceux qui s'occupent des sciences de la nature. Qu'elle soit justifiée ou non, nous avons la prétention de leur offrir des moules simples sous lesquels ils puissent contempler logiquement le monde extérieur. En échange, ils nous rendent un service d'un haut prix, en nous guidant dans l'infinie variété des formes que conçoit notre esprit. Sous ce point de vue, la Mathématique n'est pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens; elle est une piece essentielle dans l'édification de la Philosophie naturelle.