

Hilbert und *Klein* an der Entwicklung der Theorie lebhaften Anteil nahmen. Ja, die Ideen *Einsteins* erschienen ihnen so natürlich, daß sie den Widerstand gar nicht begreifen konnten, den die Relativitätstheorie nicht nur bei Laien, sondern auch innerhalb der Physik fand. Die Gegenargumente, die vorgebracht wurden, erhoben sich ja auch niemals über das niedrigste Niveau und mußten den an den Werken eines *Gauß*, *Riemann*, *Helmholtz* Geschulten nur lächerlich erscheinen.

Die schon oben erwähnte zweite Note *Hilberts* enthält außer einigen mathematischen Folgerungen aus den Feldgleichungen vor allem eine ausführliche Diskussion der Stellung des Kausalgesetzes zur allgemeinen Relativität. Nach der gewöhnlichen Fassung verlangt dieses, daß durch den Zustand der Welt in Gegenwart und Vergangenheit vermöge der Naturgesetze der Zustand der Welt in der Zukunft eindeutig und notwendig bestimmt sei. In der allgemeinen Relativitätstheorie muß man nun genau definieren, was unter „Zustand der Welt“ eigentlich dabei zu verstehen sei; denn die Werte irgendwelcher physikalischen Parameter lassen sich durch Wechsel des Bezugssystems in andere Werte transformieren, können also nicht in jenem Satze als Bestimmungsstücke des physikalischen Zustandes gemeint sein. *Hilbert* gibt nun genau an, wie man den Zustand definieren muß, damit er einen „physikalischen Sinn“ habe, und zeigt, daß dann das Kausalitätsprinzip in vollem Umfange gültig bleibt. Auch

diese Frage hat dann *Klein* von seinem allgemeinen, gruppentheoretischen Standpunkte beleuchtet.

Hilbert hat seine Auffassung der Relativitätstheorie in mehreren Vorlesungen bekanntgemacht, wobei er zu immer größerer Eindringlichkeit und Klarheit der Darstellung gelangte. Im letzten Sommersemester hat er sogar ein populäres Kolleg vor einem riesigen Zuhörerkreis gehalten und dabei bewiesen, daß nur der, dem die logische Struktur eines schwierigen Gebietes vollständig durchsichtig ist, dieses vor einem Laienpublikum anschaulich, lebendig und gleichzeitig klar und streng vortragen kann.

Seit *Gauß* und *Weber* ist es eine Göttinger Tradition, daß Mathematik und Physik nicht nebeneinander, sondern miteinander fortschreiten. *Klein* hat diese Tradition besonders energisch gehütet und durch Einbeziehung der technischen Wissenschaften ausgebaut; sein Streben war, die hohe mathematische Forschung aus ihrer Isolierung zu befreien und sie durch Pflege der Anwendungen mit der Praxis, der Technik, zu verbinden, diese befruchtend und gleichzeitig von dieser befruchtet und sozial gestützt. *Hilbert* hat in nicht geringerem Maße im Sinne der Göttinger Überlieferung gewirkt, nur war sein Interesse weniger auf die Praxis, als auf die Prinzipien der Naturerkenntnis gerichtet; darum hat er seine mathematischen Kräfte in den Dienst der modernen Physik gestellt. Was diese ihm zu danken hat, davon sollen diese Zeilen berichten.

Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik.

Von Paul Bernays, Göttingen.

Wenn wir die geistigen Beziehungen der mathematischen Wissenschaften zur Philosophie betrachten, wie sie sich seit den Zeiten der Aufklärung entwickelt haben, so bemerken wir mit Befriedigung, daß gegenwärtig das mathematische Denken im Begriff ist, wieder jenen mächtigen Einfluß auf die philosophische Spekulation zu gewinnen, welchen sie bis zur Zeit *Kants* besaß, den sie dann aber auf einmal völlig einbüßte. Jene plötzliche Abwendung von dem mathematischen Denken geschah im Zeichen der allgemeinen Abkehr von dem Geiste der Aufklärungszeit, wie sie sich zu Anfang des 19. Jahrhunderts einstellte.

Jedoch war diese Ablösung der Philosophie von der exakten Wissenschaft nur eine einseitige. Während nämlich die herrschende Philosophie sich ganz der Mathematik entfremdete¹⁾, ent-

wickelte sich bei den Mathematikern immer mehr eine philosophische Richtung.

Der wesentlichste Grund hierfür war, daß die Mathematik weit über den Rahmen hinaus wuchs, in dem sie sich zu den Zeiten *Kants* noch bewegte. Nicht nur, daß der Bereich der erforschten Tatsachen sich erheblich vergrößerte, sondern die ganze Anlage der Untersuchungen wurde großzügiger und die ganze Methode umfassender. Die Begriffsbildungen erhoben sich zu einer höheren Stufe der Allgemeinheit; die Bedeutung der Formel trat zurück gegenüber begrifflichen Abstraktionen und systematischen Leitgedanken. Ferner auch die Stellung zu den Grundlagen und dem Objekt der mathematischen Wissenschaften änderte sich.

Die Aufgabe der Geometrie wurde weiter gefaßt. Die geometrischen Begriffsbildungen wurden allgemeiner und machten sich immer mehr von der Bindung an die räumliche Vorstellung frei. Und in den neu entstandenen geometrischen Theorien hatte die Raumanschauung nicht mehr die Bedeutung der Erkenntnis-Grundlage, sondern

¹⁾ Unter den Philosophen, welche in dieser Hinsicht eine rühmliche Ausnahme machten, ist besonders *Bolzano* zu erwähnen, der als erster die strenge Begründung für die Theorie der reellen Zahlen gegeben hat.

sie wurde hier nur noch im Sinne einer anschaulichen Analogie angewendet.

Auch in der Arithmetik gelangte die Forschung zu einer wesentlichen Erweiterung ihrer Problemstellung. Einerseits wurden durch die Erfindung der Mengenlehre die Begriffe der Anzahl und der Ordnung in einer ganz neuen Weise verallgemeinert und auf unendliche Gesamtheiten übertragen. Andererseits führte die Entwicklung der Algebra dazu, daß man nicht mehr ausschließlich die Zahlen und Größen als Objekte der Untersuchung ansah, vielmehr den rechnerischen Formalismus selbst zum Gegenstande nahm und sich ganz allgemein die Betrachtung der Formalismen zur Aufgabe machte. Die Zahlen sowie die Größen erschienen jetzt nur noch als etwas Spezielles, und je mehr man ihre Gesetzmäßigkeit unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachtete, um so mehr entwöhnte man sich, diese Gesetzmäßigkeit als selbstverständlich hinzunehmen.

So ging denn die ganze Entwicklung der Mathematik dahin, alles das, was vordem als einziger Gegenstand der Forschung galt und wovon die Grundeigenschaften als etwas für die Mathematik hinzunehmendes und keiner mathematischen Untersuchung fähiges noch bedürftiges erachtet wurden, dieses seines Ansehens der Ausschließlichkeit und Endgültigkeit zu berauben. Der Rahmen, den die frühere philosophische Ansicht, und auch noch die Kantische Philosophie, für die Mathematik abgesteckt hatte, wurde gesprengt. Die Mathematik ließ sich nicht mehr die Methode und die Grenzen ihrer Forschung von der Philosophie vorschreiben, sondern nahm die Erörterung ihrer methodischen Probleme selbst in die Hand. So wurden die Axiome der mathematischen Theorien des näheren auf ihre logischen Beziehungen hin untersucht, sowie auch die Schlußweisen einer genaueren Kritik unterzogen. Und je weiter man diese Probleme verfolgt hat, um so mehr hat das mathematische Denken an ihnen seine Fruchtbarkeit gezeigt und sich als unentbehrliches Hilfsmittel für die theoretische Philosophie erwiesen.

Zu dieser Entwicklung nun, welche bis in die Gegenwart reicht, hat in bedeutsamer Weise *David Hilbert* beigetragen. Was er auf diesem Gebiete geleistet hat, soll im folgenden geschildert werden.

Als *Hilbert* sich den Problemen zuwandte, welche es betreffs der Grundlagen des mathematischen Denkens zu lösen galt, hatte er nicht nur das Rüstzeug seiner umfassenden Beherrschung der mathematischen Methoden zur Verfügung, sondern er war auch vor allem durch seine menschliche Veranlagung gleichsam vorbestimmt für diese Aufgaben. Denn für ihn hatte die Mathematik die Bedeutung einer Weltanschauung, und er ging an jene grundsätzlichen Probleme mit der Gesinnung eines Eroberers, der bestrebt ist, dem mathematischen Denken einen

möglichst umfassenden Machtbereich zu erkämpfen.

Bei der Verfolgung dieses Zieles kam es darauf an, den Fehler jener extremen rationalistischen Denker zu vermeiden, welche glaubten, daß durch reines Denken eine vollkommene Erkenntnis alles Wirklichen zu erlangen sei. Es konnte sich also nicht etwa darum handeln, alle Erkenntnis des Tatsächlichen in die Mathematik einzubeziehen, vielmehr war es zum Zwecke einer möglichst weiten Ausdehnung des Herrschaftsgebietes der Mathematik erforderlich, eine scharfe Grenzsecheidung zwischen Mathematischem und Nichtmathematischem vorzunehmen, welche es erlaubte, alle mathematischen Bestandteile im Erkennen auch wirklich für die Mathematik in Anspruch zu nehmen.

In diesem Sinne hat auch tatsächlich *Hilbert* das Problem angefaßt. Sein erstes und größtes Werk auf dem Gebiet der Methodenfragen sind die im Jahre 1899 erschienenen „*Grundlagen der Geometrie*“. In dieser Schrift stellte *Hilbert* ein neues System von Axiomen für die Geometrie auf, welche er nach den Gesichtspunkten der Einfachheit und der logischen Vollständigkeit, unter möglichst enger Anknüpfung an die Begriffsbildungen *Euklids* wählte. Das Gesamtsystem der Axiome gliederte er in fünf Axiomgruppen und untersuchte nun genauer den Anteil, den die verschiedenen Axiomgruppen (sowie auch einzelne der Axiome) an dem logischen Aufbau der Geometrie haben.

Diese Untersuchung hat durch die Fülle an neuen, fruchtbaren Methoden und Gesichtspunkten, welche sie darbot, einen mächtigen Einfluß auf die Entwicklung der mathematischen Forschung ausgeübt. Jedoch liegt die Bedeutung von *Hilberts* Grundlagen der Geometrie keineswegs nur in dem rein mathematischen Gehalte. Was vielmehr diesem Werk seine Popularität verlieh und den Namen *Hilberts* weit über den Kreis seiner Fachgenossen hinaus berühmt machte, das war die neue methodische Wendung, welche hier dem Gedanken der Axiomatik gegeben wurde.

Das Wesen der axiomatischen Methode, d. h. der Methodé, eine Wissenschaft aus Axiomen und Definitionen logisch zu entwickeln, besteht ja nach der geläufigen Auffassung darin, daß man von einigen wenigen Grundsätzen ausgeht, von deren Wahrheit man überzeugt ist diese als Axiome an die Spitze stellt und aus ihnen mit Hilfe des logischen Schließens Lehrsätze ableitet, deren Wahrheit dann ebenso sicher ist, wie die der Axiome, eben weil sie aus diesen logisch folgen. Bei dieser Ansicht wird das Augenmerk vor allem auf den Erkenntnischarakter der Axiome gerichtet. Ja, ursprünglich ließ man als Axiome überhaupt nur solche Sätze gelten, deren Wahrheit a priori einleuchtete. Und noch *Kant* war der Ansicht, daß der Erfolg und die Fruchtbarkeit der axiomatischen Methode in der Geometrie und in der Mechanik wesentlich darauf beruhe,

daß man in diesen Wissenschaften von Erkenntnissen a priori (den Axiomen der reinen Anschauung und den Grundsätzen des reinen Verstandes) ausgehen könne.

Allerdings hat man diese Forderung, daß ein jedes Axiom eine a priori erkennbare Wahrheit ausdrücken müsse, bald preisgegeben. Denn bei den mannigfachen Anlässen, welche sich besonders in der Weiterentwicklung der Physik zur Anwendung der axiomatischen Methode boten, ergab es sich sozusagen von selbst, daß man teils Erfahrungssätze, teils auch bloße Hypothesen als Axiome physikalischer Theorien wählte. Dabei erwies sich das axiomatische Verfahren besonders in den Fällen als fruchtbar, wo es gelang, durch die Aufstellung eines Axioms die Ergebnisse vielfältiger Erfahrungen in einer Aussage von allgemeinem Charakter zusammenzufassen. Ein berühmtes Beispiel hierfür bilden die beiden Sätze von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile erster und zweiter Art, welche *Clausius* in der Theorie der Wärme als Axiome an die Spitze stellte.

Dazu kam noch, daß der Glaube an die apriorische Erkenntnis der geometrischen Axiome bei den Forschern der exakten Wissenschaften — hauptsächlich infolge der nicht-euklidischen Geometrie und unter dem Eindruck der Argumente von *Helmholtz* — immer mehr verloren ging und so die empiristische Ansicht, nach welcher die Geometrie nichts anderes ist als eine Erfahrungswissenschaft, immer mehr Anhänger fand. Jedoch änderte dieses Abgehen vom Apriorismus nicht wesentlich den Gesichtspunkt, unter dem man die axiomatische Methode betrachtete.

Eine stärkere Wandlung wurde aber durch die systematische Entfaltung der Geometrie bewirkt. Die mathematische Abstraktion hatte sich, von der elementaren Geometrie ausgehend, weit über den Bereich der räumlichen Anschauung erhoben und zur Bildung von umfassenden Lehrgebäuden geführt, in welche die gewöhnliche Euklidische Geometrie sich einordnen ließ und innerhalb deren ihre Gesetzlichkeit nur als eine ganz spezielle neben anderen mathematisch gleichberechtigten erschien. Hiermit eröffnete sich eine neue Art von mathematischer Spekulation, mit Hilfe deren man die geometrischen Axiome von einem höheren Standpunkt betrachten konnte. Es zeigte sich aber sogleich, daß diese Betrachtungsweise mit der Frage nach dem Erkenntnischarakter der Axiome — welche man doch vordem für das einzig Bedeutsame an der axiomatischen Methode hielt — gar nichts zu schaffen hatte. Und somit ergab sich die Notwendigkeit einer reinlichen Scheidung zwischen den mathematischen und den erkenntnistheoretischen Problemen der Axiomatik. Die Forderung einer solchen Sonderung der Probleme hat *Klein* in seinem Erlanger Programm²⁾ bereits in aller

Klarheit ausgesprochen.

Nun war es das wesentliche an *Hilberts* Grundlegung der Geometrie, daß hier zum erstenmal in der Aufstellung des Axiomensystems von vornherein die Sonderung des Mathematischen und Logischen von dem Räumlich-Anschaulichen — und damit von der erkenntnistheoretischen Grundlage der Geometrie — restlos durchgeführt und mit voller Schärfe zum Ausdruck gebracht wurde.

Wohl spricht *Hilbert* in der Einleitung seines Buches den Gedanken aus, daß die Aufstellung der Axiome für die Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges eine Aufgabe sei, die „auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung“ hinausläuft, und ebenso bemerkt er im ersten Paragraphen, daß jede einzelne der Axiomgruppen „gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung“ ausdrückt. Aber diese Äußerungen stehen ganz außerhalb des axiomatischen Aufbaues; dieser selbst vollzieht sich ohne jegliche Bezugnahme auf die räumliche Anschauung.

Nun ist es freilich schon von jeher eine Anforderung an eine strenge axiomatische Begründung der Geometrie gewesen, daß die Beweise sich ausschließlich an dasjenige halten sollen, was in den Axiomen formuliert wird, dagegen nicht auf sonstige Art die räumliche Anschauung heranziehen dürfen. Und in neuerer Zeit hat besonders *Pasch* bei seiner Grundlegung der Geometrie³⁾ auf die Durchführung dieser Forderung Gewicht gelegt und ihr auch vollkommen entsprochen.

Die Hilbertsche Axiomatik geht aber in der Ausschaltung der räumlichen Anschauung noch einen Schritt weiter. Hier wird die Heranziehung der räumlichen Vorstellung nicht nur bei den Beweisen, sondern auch in den Axiomen und den Begriffsbildungen gänzlich vermieden. Die Worte „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ dienen nur als Namen für drei verschiedene Arten von Gegenständen, über welche unmittelbar nichts anderes vorausgesetzt wird, als daß die Gegenstände einer jeden Art ein fest bestimmtes System bilden. Alle weitere Charakterisierung erfolgt erst durch die Axiome. Desgleichen werden mit Ausdrücken wie „der Punkt *A* liegt auf der Geraden *a*“ oder „der Punkt *A* liegt zwischen *B* und *C*“ nicht die gewöhnlichen, anschaulichen Bedeutungen verbunden, vielmehr bezeichnen sie nur gewisse, zunächst unbestimmte Beziehungen, die dann erst durch die Axiome, in denen diese Ausdrücke vorkommen, *implicite charakterisiert werden*.⁴⁾

Zufolge dieser Auffassung sind die Axiome überhaupt keine Urteile, von denen man sagen kann, daß sie wahr oder falsch sind; nur in dem

metrische Forschungen“, 1872. (Mathematische Annalen, Bd. 43.)

³⁾ „Vorlesungen über neuere Geometrie“, 1882.

⁴⁾ Man spricht in diesem Sinne von „impliziter Definition“.

²⁾ „Vergleichende Betrachtungen über neue geo-

Zusammenhänge des ganzen Axiomensystems haben sie überhaupt einen Sinn. Und auch das Axiomensystem als Ganzes bildet nicht den Ausdruck einer Wahrheit, vielmehr ist die logische Struktur der axiomatischen Geometrie im Sinne *Hilberts* — ganz entsprechend derjenigen der abstrakten Gruppentheorie — eine rein hypothetische: Wenn irgendwo in Wirklichkeit drei Systeme von Gegenständen vorliegen sowie bestimmte Beziehungen zwischen diesen Gegenständen, derart, daß für diese die Axiome der Geometrie zutreffen (d. h. daß bei geeigneter Zuordnung der Namen zu den Gegenständen und Beziehungen die Axiome in wahre Behauptungen übergehen), dann treffen für diese Gegenstände und Beziehungen auch alle Lehrsätze der Geometrie zu. Das Axiomensystem selbst bringt also nicht eine Tatsächlichkeit zum Ausdruck, sondern es stellt nur eine mögliche Form eines Systems von Verknüpfungen dar, welches mathematisch nach seinen *inneren* Eigenschaften zu untersuchen ist.

Hiernach kommt die axiomatische Behandlung der Geometrie darauf hinaus, daß man von der Geometrie, so wie sie als Wissenschaft von den räumlichen Figuren vorliegt, den rein mathematischen Bestandteil der Erkenntnis ablöst und für sich abgesondert untersucht. Die räumlichen Verhältnisse werden gleichsam in die Sphäre des Mathematisch-Abstrakten projiziert, in welcher die Struktur ihres Zusammenhanges sich als ein Objekt des rein mathematischen Denkens darstellt und einer Forschungsweise unterzogen wird, die nur auf die logischen Beziehungen gerichtet ist, unbekümmert um die Frage nach der *sachlichen* Wahrheit, d. h. um die Frage, ob die durch die Axiome festgelegten geometrischen Verknüpfungen sich in der Wirklichkeit (oder auch nur in unserer räumlichen Anschauung) vorfinden.

Diese Art der Deutung, welche die axiomatische Methode in *Hilberts* Grundlagen der Geometrie erfuhr, bot nun insbesondere den Vorteil, daß sie nicht auf die Geometrie beschränkt war, sondern sich ohne weiteres auf andere Disziplinen übertragen ließ. Den Gesichtspunkt der Gleichartigkeit der axiomatischen Methode in ihrer Anwendung auf die verschiedensten Gebiete hat *Hilbert* auch von vornherein ins Auge gefaßt, und von ihm geleitet suchte er diese Methode in möglichst weitem Umfange zur Geltung zu bringen. So gelang es ihm insbesondere, die kinetische Gastheorie sowie die elementare Strahlungstheorie in strenger Weise axiomatisch zu begründen.

Auch schlossen sich der axiomatischen Forschungsweise *Hilberts* viele Mathematiker an und wirkten im Sinne seiner Bestrebungen. Insbesondere war es ein Erfolg der Axiomatik, als *Zermelo* im Gebiete der Mengenlehre die bis dahin bestehende Unsicherheit des Schließens durch eine geeignete axiomatische Abgrenzung der

Schlußweisen überwand und zugleich auch mit seinem Axiomensystem eine gemeinsame Grundlage für Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre schuf⁵⁾.

Eine Zusammenfassung der methodischen Leitgedanken und eine Übersicht über die Ergebnisse der axiomatischen Forschung hat *Hilbert* in seinem Züricher Vortrag über „Axiomatisches Denken“ (1917)⁶⁾ gegeben. Hier kennzeichnet er die axiomatische Methode als ein allgemeines Verfahren des wissenschaftlichen Denkens. Dieses Verfahren setzt auf allen den Wissensgebieten ein, wo man bereits zur Aufstellung einer Theorie — oder, wie *Hilbert* es ausdrückt, zu einer Ordnung der Tatsachen mit Hilfe eines Fachwerkes von Begriffen — gelangt ist. Es zeigt sich dann jedesmal, daß zum logischen Aufbau der Theorie einige wenige Sätze ausreichen, und man gewinnt damit die Möglichkeit einer axiomatischen Grundlegung der Theorie. Diese wird zunächst im Sinne der alten Axiomatik erfolgen; man kann dann aber stets — so wie in der Geometrie — zu dem Hilbertschen axiomatischen Standpunkt übergehen, indem man von dem Erkenntnis-Charakter der Axiome absieht und das ganze Fachwerk der Begriffe nur (als eine *mögliche* Form eines Verknüpfungszusammenhanges) auf seine innere Struktur hin betrachtet.

Somit wird die Theorie zum Objekt einer rein mathematischen Untersuchung, welche eben die *axiomatische* heißt. Und zwar sind es bei allen Theorien dieselben Hauptfragen, welche man zu erörtern hat: Zunächst einmal muß das Axiomensystem, damit es einen möglichen Verknüpfungszusammenhang darstellt, der Bedingung der *Widerspruchsfreiheit* genügen, d. h. die in den Axiomen ausgedrückten Beziehungen müssen miteinander logisch vereinbar sein. Somit entsteht die Aufgabe eines Nachweises für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems — ein Problem, welches die alte Auffassung der Axiomatik nicht kennt, weil hier ja jedes Axiom als Ausdruck einer Wahrheit gilt. Sodann kommt es darauf an, einen Überblick über die logischen *Abhängigkeiten* zwischen den verschiedenen Sätzen der Theorie zu gewinnen, insbesondere hat man zu untersuchen, ob die Axiome voneinander logisch unabhängig sind, oder ob etwa eines oder mehrere von ihnen aus den übrigen Axiomen bewiesen werden können und somit in ihrer Rolle als Axiome überflüssig sind. Außerdem aber besteht noch die Aufgabe, nach den Möglichkeiten einer „Tieferlegung der Fundamente“ der Theorie zu forschen, d. h. zu prüfen, ob nicht die vorliegenden Axiome der Theorie sich auf Sätze von fundamentalerem Charakter zurückführen lassen, welche dann „eine tiefere Schicht von Axiomen“ für das betrachtete Fachwerk von Begriffen bilden würden.

⁵⁾ „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“, 1907. (Mathematische Annalen, Bd. 65.)

⁶⁾ Mathematische Annalen, Bd. 78.

Diese Art der Untersuchung, welche durchaus mathematischen Charakter besitzt, läßt sich nun auf jedes Wissensgebiet anwenden, das überhaupt einer theoretischen Behandlung fähig ist, und ihre Ausführung ist für die Klarheit der Erkenntnis und für die systematische Übersicht von höchstem Wert. Somit gewinnt durch die Idee der Axiomatik das mathematische Denken eine universale Bedeutung für das wissenschaftliche Erkennen. In der Tat kann *Hilbert* behaupten: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit der Mathematik.“

Mit dieser umfassenden Ausgestaltung des axiomatischen Gedankens war nun zwar ein hinlänglich weiter Rahmen für die mathematische Problemstellung gewonnen und die erkenntnistheoretische Fruchtbarkeit der Mathematik klargelegt. Aber in Betreff der *Sicherheit* des mathematischen Verfahrens blieb noch eine grundsätzliche Frage offen.

Nämlich als das Erste und Wichtigste bei der axiomatischen Untersuchung einer Theorie war ja die Aufgabe erkannt, die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems zu beweisen. In der Tat bildet die Widerspruchsfreiheit der Axiome die Lebensfrage für eine jede axiomatische Theorie; denn von ihr hängt es ab, ob das Fachwerk der Begriffe überhaupt einen Verknüpfungszusammenhang oder nur den Schein eines solchen darstellt.

Wenn wir nun zusehen, wie es bei den verschiedenen geometrischen und physikalischen Theorien, die eine axiomatische Begründung erfahren haben, mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit bestellt ist, so finden wir, daß dieser überall nur in einem relativen Sinn erbracht ist: die Widerspruchsfreiheit des zu untersuchenden Axiomensystems wird bewiesen, indem man ein System von Gegenständen und von Beziehungen *innerhalb der mathematischen Analysis* aufweist, für welches die Axiome erfüllt sind. Diese „Methode der Zurückführung“ auf die Analysis (d. h. auf die Arithmetik im weiteren Sinne) hat zur Voraussetzung, daß die Analysis selbst ein widerspruchsfreies System bildet. — sei es nun, daß sie als ein Inbegriff von Erkenntnissen oder nur als ein axiomatisches Gebäude (d. h. als ein bloß mögliches System von Verknüpfungen) anzusehen ist.

Nun ist aber die Widerspruchsfreiheit der Analysis nicht so ohne weiteres selbstverständlich, wie man zunächst denken möchte. Die Schlußweisen, welche man in der Theorie der reellen Zahlen und der reellen Funktionen anwendet, haben nicht jenen Charakter des unmittelbar Handgreiflichen, wie er etwa den Schlüssen der elementaren Zahlentheorie eigen ist. Und wenn man die Beweismethoden von allem irgendwie Problematischen befreien will, so ist man genötigt, die Analysis axiomatisch aufzubauen. Es erweist sich somit die Notwendigkeit, auch für

die Analysis einen Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit zu liefern.

Das Erfordernis eines solchen Nachweises zur Sicherheit der axiomatischen Methode und der Mathematik überhaupt hat *Hilbert* von Anfang an erkannt und betont. Und wenngleich seine Bemühungen um dieses Problem noch nicht zu dem Endziel geführt haben, so ist es ihm doch geglückt, den methodischen Ansatz zu finden, durch welchen die Aufgabe mathematisch angreifbar wird.

Die Grundgedanken dieses Ansatzes wurden von *Hilbert* schon 1904 in seinem Heidelberger Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“⁷⁾ dargelegt. Jedoch boten diese Ausführungen dem Verständnis große Schwierigkeiten und waren auch manchen Anfechtungen ausgesetzt. Seitdem hat *Hilbert* seinen Plan weiter verfolgt und seinen Ideen eine faßliche Form gegeben, die er kürzlich in einem Vortragszyklus in Hamburg zur Darstellung brachte.

Der Gedankengang, auf welchem der Hilbertsche Ansatz für die Grundlegung der Arithmetik und Analysis beruht, ist folgender: Die methodischen Schwierigkeiten der Analysis, auf Grund deren man in dieser Wissenschaft genötigt ist, über den Rahmen des konkret Vorstellbaren hinauszugehen, rühren davon her, daß die Stetigkeit und das Unendliche hier eine wesentliche Rolle spielen. Dieser Umstand würde auch für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Analysis ein unüberwindliches Hindernis bilden, wenn dieser Nachweis in dem Sinne geführt werden müßte, daß man zeigt: ein System von Dingen wie es die Analysis annimmt — etwa das System aller endlichen oder unendlichen Mengen von ganzen Zahlen — ist logisch möglich.

Nun braucht aber die Behauptung der Widerspruchsfreiheit gar nicht in diesem Sinne bewiesen zu werden, vielmehr kann man ihr auch folgende ganz andere Wendung geben: die Schlußweisen der Analysis können niemals zu einem Widerspruch führen — oder, was auf dasselbe hinauskommt: es ist unmöglich, aus den Axiomen der Analysis und mit Hilfe ihrer Methoden des Schließens die Beziehung $1 \neq 1$ („1 ist ungleich 1“) abzuleiten. Hier handelt es sich nicht um die Möglichkeit einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit von gewissen Eigenschaften, sondern um die Unmöglichkeit eines mathematischen Beweises mit bestimmten Eigenschaften. Ein mathematischer Beweis ist aber, im Unterschied von einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit, ein konkretes, in allen Teilen überblickbares Objekt; er muß sich, wenigstens grundsätzlich, von Anfang bis Ende vollständig mitteilen lassen. Und auch die verlangte Beschaffenheit des Beweises (daß er gemäß den Prinzipien der Analysis verläuft und zu dem Endergebnis $1 \neq 1$ führt) ist eine konkret fest-

⁷⁾ Anhang VII zu den „Grundlagen der Geometrie“.

stellbare Eigenschaft. Es besteht daher auch grundsätzlich durchaus die Möglichkeit, den Nachweis für die Widerspruchslösigkeit der Analysis durch elementare, handgreiflich sichere Überlegungen zu erbringen; wir müssen nur den Standpunkt einnehmen, daß nicht diejenigen Gegenstände, auf welche sich die Beweise der Analysis beziehen, sondern vielmehr diese Beweise selbst das Objekt der Untersuchung bilden.

Auf Grund dieser Erwägung ergibt sich nun für *Hilbert* die Aufgabe einer genaueren Betrachtung der Formen mathematischer Beweise. Wir müssen — so sagt er in seinem Vortrag über axiomatisches Denken — „den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert.“ Für die Struktur der mathematischen Beweise sind aber in erster Linie die allgemeinen Formen des logischen Schließens maßgebend. Daher muß die geforderte Untersuchung der mathematischen Beweise jedenfalls die logischen Schlußformen mitbetreffen. Und so erklärte auch *Hilbert* schon in dem Heidelberger Vortrag, daß „eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich“ sei.

Mit diesem Gedanken knüpfte *Hilbert* an die *mathematische Logik* an. Diese Wissenschaft, deren Idee auf *Leibniz* zurückgeht und die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, von primitiven Anfängen anhebend, zu einem fruchtbaren Felde des mathematischen Denkens entwickelte, hat die Methoden ausgebildet, wie man durch eine symbolische Bezeichnung der einfachsten logischen Verknüpfungen (wie „und“, „oder“, „nicht“, „alle“) einer mathematischen Beherrschung der Formen des logischen Schließens gelangt. Es zeigte sich, daß man durch diesen „Logikkalkül“ erst den vollen Überblick über das System der logischen Schlußformen gewinnt, von welchem die Schlußfiguren, die man in der traditionellen Logik behandelt, nur ein verhältnismäßig kleines Teilgebiet bilden. Insbesondere gelang es *Peano*, *Frege* und *Russell*, den Logikkalkül so auszugestalten, daß man damit die gedanklichen Schlüsse der mathematischen Beweise durch symbolische Operationen vollkommen nachbilden kann.

Dieses Verfahren des Logikkalküls bildet eine sinngemäße Ergänzung der Methode der axiomatischen Begründung einer Wissenschaft, insofern dadurch neben der genauen Festlegung der *Voraussetzungen*, wie sie die axiomatische Methode bewirkt, auch eine genaue Verfolgung der *Schlußweisen* ermöglicht wird, mit Hilfe deren man von den Grundsätzen einer Wissenschaft zu ihren Folgerungen gelangt.

Indem nun *Hilbert* das Verfahren der mathematischen Logik sich zu eigen machte, nahm er

an dieser Methode eine ganz entsprechende Umdeutung vor, wie er es mit der axiomatischen Methode getan hatte. So wie er ehemals die Grundbeziehungen und die Axiome der Geometrie ihres anschaulichen Inhalts entkleidete, so schaltete er nun aus den Beweisen der Arithmetik und Analysis, die er zum Gegenstand seiner Untersuchung macht, den gedanklichen Inhalt der Schlüsse aus, indem er die Formelsysteme, durch welche sich jene Beweise in dem Logikkalkül darstellen, losgelöst von ihrer inhaltlich-logischen Interpretation als das unmittelbare Objekt der Betrachtung nimmt und somit die Beweisführungen der Analysis durch ein rein formales Handeln ersetzt, welches mit bestimmten Zeichen nach festen Regeln stattfindet.

Durch diese Betrachtungsweise, in welcher die Absonderung des Spezifisch-Mathematischen von allem Inhaltlichen ihren Gipfelpunkt erreicht, gewinnt die Hilbertsche Ansicht von dem Wesen der Mathematik und der axiomatischen Methode erst ihren wirklichen Abschluß. Denn wir erkennen nunmehr, daß jene Sphäre des Mathematisch-Abstrakten, in welche die Denkmethode der Mathematik alles theoretisch Faßbare übersetzt, nicht diejenige des inhaltlich Logischen, sondern vielmehr das Gebiet des reinen Formalismus ist. Die Mathematik erweist sich als die allgemeine Lehre von den Formalismen, und indem wir sie als solche erfassen, wird auch ihre universale Bedeutung ohne weiteres klar.

Diese Bedeutung der Mathematik als allgemeine Formenlehre ist in der neueren Physik aufs glänzendste zutage getreten, insbesondere in der Einsteinschen Gravitationstheorie, wo der mathematische Formalismus für *Einstein* die Richtlinie abgab zur Aufstellung seines Gravitationsgesetzes, dessen genauere Form ohne Heranziehung der mathematischen Hilfsmittel niemals hätte gefunden werden können. Und hier war es wiederum *Hilbert*, der dieses Gravitationsgesetz zuerst auf seine einfachste mathematische Form brachte und, indem er die Möglichkeit einer harmonischen Zusammenfügung der Gravitationstheorie mit der Elektrodynamik aufzeigte, die weiteren an die Einsteinsche Theorie anknüpfenden mathematischen Spekulationen eröffnet hat, die dann von *Weyl* durch seine geometrische Idee zur systematischen Vollendung geführt wurden. Falls diese Spekulationen sich in der Physik bewähren sollten, so würde damit der Triumph der Mathematik in der modernen Wissenschaft ein vollkommener sein.

Betrachten wir nun im ganzen den Gedanken-ertrag von *Hilberts* philosophischen Untersuchungen sowie die Wirkung, die sie ausgeübt haben, und halten wir uns andererseits die anfangs geschilderte Entfaltung der Mathematik in der neueren Zeit vor Augen, so zeigt sich uns das wesentliche an *Hilberts* philosophischer Leistung darin, daß er den Anspruch auf einen uni-

versalen geistigen Einfluß in der Wissenschaft, den sich die Mathematik durch ihre innerliche Vertiefung und ihre großzügige Ausgestaltung erworben hatte, mit Nachdruck und Erfolg zur Geltung gebracht hat, indem er eine weitherzige

philosophische Auffassung von der Mathematik entwickelte, welche es ermöglicht, der Bedeutung und Tragweite ihrer Methode gerecht zu werden. Die Freunde der mathematischen Wissenschaft werden ihm dafür dauernden Dank wissen.

Verzeichnis der bisherigen Publikationen von David Hilbert

(nebst kurzen Inhaltsangaben).

Von Karl Siegel, Göttingen.

1. *Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*; Inaugural-Dissertation (Königsberg i. Pr. 1885, R. Leupold).
Ein Verfahren zur Darstellung von Invarianten und Covarianten eines Systems binärer Formen wird allgemein begründet und auf spezielle binäre Formen angewendet.
2. *Über eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe, Bd. 37 (1885), S. 427—438.
Zur Erforschung der analytischen Natur und Bedeutung der invarianten Bildungen werden irrationale Invarianten eines Systems von Grundformen untersucht.
3. *Über die notwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz*. Mathematische Annalen Bd. 27 (1886), S. 158—161.
Die notwendige und hinreichende Bedingung wird durch das identische Verschwinden einer gewissen Covariante geliefert.
4. *Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiet* (Königsberger Habilitationsschrift). Mathematische Annalen Bd. 28 (1887), S. 381—446.
Weiterführung der vorläufigen Mitteilung 2.
5. *Über eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiet*. Mathematische Annalen Bd. 30 (1887), S. 15—29.
Verkürzte Wiedergabe der Dissertation 1.
6. *Über die Singularitäten der Discriminantenfläche*. Mathematische Annalen Bd. 30 (1887), S. 437—441.
Bestimmung der Gesamtordnung der singulären Gebilde der Discriminantenfläche.
7. *Über binäre Formenbüschel mit besonderer Combinanteneigenschaft*. Mathematische Annalen Bd. 30 (1887), S. 561—570.
Ableitung einiger Sätze über das identische Verschwinden von Überschiebungen zweier Formen.
8. *Über die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Functional-determinante*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe, Bd. 39 (1887), S. 112 bis 122.
Aufstellung aller Formenbüschel von gegebener Functional-determinante. Vgl. auch 15.
9. *Über binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante*. Mathematische Annalen Bd. 31 (1888), S. 482—492.
Alle Formenbüschel $\alpha\varphi + \mu\psi$ werden bestimmt, deren Discriminante eine gegebene binäre Form 2ter, 4ter, 6ter Ordnung der Variablen α, μ ist.
10. *Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe*. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 103 (1888), S. 337—345.
Neue Ableitung des von Stieltjes gegebenen Ausdrucks der Discriminante.
11. *Lettre adressée à M. Hermite*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4. Reihe, Bd. 4 (1888), S. 249—256.
Anwendung eines allgemeinen Prinzips auf die Untersuchung biquadratischer binärer und kubischer ternärer Formen.
12. *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*. Mathematische Annalen Bd. 32 (1888), S. 342—350.
Beweis der Vermutung von Minkowski über die Existenz definiter Formen gerader Ordnung, welche nicht als Summe von Quadraten endlich vieler reeller Formen darstellbar sind.
13. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde*. Nachrichten von der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1888, S. 450—457.
Vgl. 18.
14. *Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen*. Mathematische Annalen Bd. 33 (1889), S. 223—226.
Neuer Beweis des Satzes von Gordan über die Endlichkeit des Invariantensystems.
15. *Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functional-determinante*. Mathematische Annalen Bd. 33 (1889), S. 227—236.
Vgl. 8.
16. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde II*. Nachrichten von der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1889, S. 25—34.
Vgl. 18.
17. *Zur Theorie der algebraischen Gebilde III*. Nachrichten von der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1889, S. 423—430.
Vgl. 18.
18. *Über die Theorie der algebraischen Formen*. Mathematische Annalen Bd. 36 (1890), S. 473—534.
Beweis der Sätze: 1. Zu jeder Folge von Formen F_1, F_2, \dots in n Variablen gibt es eine Zahl m derart, daß jede Form F der Folge in der Gestalt

$$F = A_1 F_1 + \dots + A_m F_m$$
darstellbar ist, wo A_1, \dots, A_m gewisse Formen derselben Variablen bedeuten; haben dabei $F_1,$