SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION DE $|x|$ PAR DES POLYNOMES DE DEGRÉS DONNÉS.

Par

SERGE BERNSTEIN

à Kharkow.

Dans la seconde partie du Mémoire[1] »Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné» j'ai exposé une méthode générale pour la recherche des polynomes d'approximation d'une fonction continue quelconque. Cette méthode consiste essentiellement à introduire un paramètre variable et à développer les polynomes d'approximation en séries de Taylor par rapport à ce paramètre. J'ai appliqué, en particulier, cette méthode à la meilleure approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$; et quoique c'est ainsi — il est peut-être utile de le rappeller à ceux qui voudront aborder des questions analogues — que je fus mis sur la voie de la solution complète de ce problème, je me suis bientôt aperçu que, pour arriver plus rapidement au but, il est avantageux d'abandonner la marche générale en se laissant guider par les particularités de la question.

En exposant à présent l'ensemble des résultats relatifs à la meilleure approximation de $|x|$ que j'ai obtenus jusqu'ici, et qui dépassent considérablement ceux qui se trouvent dans le memoire mentionné, je pourrai donc ne faire aucun appel à la théorie générale, ce qui évitera au lecteur la nécessité de s'adresser à ce Mémoire.

Mon étude actuelle se divise en deux parties: partie élémentaire et partie transcendante. Dans la première partie, par des procédés entièrement algébriques, on démontre que *la meilleure approximation E_{2n} de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $2n$ satisfait, quel que soit $n > 0$, aux inégalités*

[1] Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique. 1912.

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot$$

Dans la seconde partie on cherche la valeur asymptotique de E_{2n}. Le résultat essentiel de cette recherche est que *le produit* $2n \, . \, E_{2n}$ *tend vers une limite fixe* λ, *lorsque* n *croît indéfiniment.* La démonstration de ce théorème, et le calcul approché de λ, qui, avec une erreur moindre que $0{,}004$ se trouve être égale à $0{,}282$ sortent naturellement du domaine de l'algèbre.

Première Partie.

Etude algébrique de la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degré donné.

1. *Définition.* Nous dirons que le polynome

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} \tag{1}$$

est un *polynome oscillateur,* dans l'intervalle 0 1, relatif à la suite d'exposants non négatifs $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, s'il atteint son module maximum en $(n+1)$ points de l'intervalle. Le nombre n est *l'ordre* du polynome oscillateur. Nous pouvons admettre ici, pour simplifier un peu, que les nombres α_i sont des entiers.

2. *Examen de deux cas particuliers.* Considérons deux cas, où les polynomes oscillateurs se déterminent sans difficultés.

1^er^ cas. $\alpha_i = 2i + 1$. Le polynome trigonométrique

$$P_{2n+1}(x) = L \cos(2n+1)\arccos x = \frac{L}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^{2n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{2n+1}] \tag{2}$$

est manifestement un polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants: $1, 3, \cdots 2n+1$, car il atteint son module maximum L en $(n+1)$ points de l'intervalle 0 1: $1, \cos\frac{\pi}{2n+1}, \cdots \cos\frac{n\pi}{2n+1}$. Le calcul explicite des coefficients de ces polynomes ne présente pas de difficulté: il suffit de former l'équation différentielle

$$(1-x^2)P''_m(x) - xP'_m(x) + m^2 P_m(x) = 0, \tag{3}$$

à laquelle satisfait

$$P_m(x) = L \cos m \arccos x;$$

l'expression (2) donne directement le coefficient $2^{m-1}L$ de x^m, et ensuite les coefficients se déterminent de proche en proche par la condition d'identifier l'équation (3). On a ainsi

$$P_m(x) = L\cos m \arccos x = \frac{L}{2}\Big[2^m x^m - m\,.\,2^{m-2}x^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2!}\cdot 2^{m-4}x^{m-4} + \tag{4}$$
$$+ \cdots + (-1)^l\cdot\frac{m(m-l-1)\cdots(m-2l+1)}{l!}\cdot 2^{m-2l}x^{m-2l} + \cdots\Big]$$

2^{me} cas.[1] $\alpha_i = i$.

Le polynome

$$P_{2n}(\sqrt{x}) = L\cos 2n\arccos\sqrt{x} = \frac{L}{2}[\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^{2n} + (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^{2n}] =$$
$$= \frac{L}{2}\Big[2^{2n}x^n - 2n\,.\,2^{2n-2}x^{n-1} + \cdots +$$
$$+ (-1)^l\cdot\frac{2n\,(2n-l-1)(2n-l-2)\cdots(2n-2l+1)}{l!}2^{2n-2l}\,.\,x^{n-l} + \cdots\Big]$$

sera également un polynome oscillateur pour la suite d'exposants: $0, 1, 2, \cdots n$, puisqu'il atteint son module maximum L aux $n+1$ points; $\cos^2\dfrac{i\pi}{2n}$ ou $\dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n}}{2}$.

3. *Théorème de Descartes.* Le nombre de racines positives de l'équation

$$P(x) = A_0x^{\alpha_0} + A_1x^{\alpha_1} + \cdots + A_nx^{\alpha_n} = 0$$

ne peut dépasser le nombre de variations de signe des coefficients. En particulier, l'équation $P(x)=0$ n'aura jamais plus de n racines positives; d'ailleurs l'équation $P(x)=0$ ne pourra avoir n racines positives que, lorsque ses coefficients seront de signes alternés.

4. *Lemme. Les coefficients d'un polynome oscillateur sont de signes alternés; les extrema successifs d'un polynome oscillateur sont de signes contraires.*

En effet, soit d'abord $\alpha_0 = 0$. Alors l'équation dérivée

$$P'(x) = \alpha_1A_1x^{\alpha_1-1} + \cdots + \alpha_nA_nx^{\alpha_n-1} = 0$$

devra avoir au moins $n-1$ racines positives qui sont les valeurs de x à l'intérieur du segment $0\ 1$, où $|P(x)|$ atteint son maximum absolu. De plus, $P'(x)=0$ ne pouvant avoir d'autres racines positives, $|P(x)|$ atteindra, en outre, son maximum absolu aux deux bords: 0 et 1, et il ne pourra exister d'extrema relatifs entre deux extrema absolus; tous les $(n+1)$ extrema seront donc nécessairement de signes contraires. Par conséquent, l'équation $P(x)=0$ aura n racines positives; ses coefficients seront donc de signes alternés.

[1] Je ne connais pas d'autres polynomes oscillateurs que ceux dont les exposants forment une progression arithmétique. Il serait important de construire explicitement des polynomes oscillateurs, pour lesquels la loi des exposants soit différente.

Si $\alpha_0 > 0$, le polynome $P(x)$ s'annule pour $x = 0$. Par conséquent, son module maximum est atteint, cette fois, au moins en n points intérieurs au segment $0\ 1$ qui sont les racines de l'équation

$$P'(x) = \alpha_0 A_0 x^{\alpha_0 - 1} + \alpha_1 A_1 x^{\alpha_1 - 1} + \cdots + \alpha_n A_n x^{\alpha_n - 1} = 0.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont donc de signes alternés; de plus, l'équation $P'(x) = 0$ n'ayant d'autres racines positifs, les extrema successifs de $P(x)$ sont également de signes alternés. *c.q.f.d.*

5. Théorème. *Si* $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *est un polynome oscillateur et* $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{\alpha_i}$ *est un autre polynome contenant les mêmes puissances de x dans lequel un des coefficients* $B_{i_0} = A_{i_0}$ (en supposant $\alpha_{i_0} > 0$), *le maximum de* $|Q(x)|$ *est supérieur au maximum de* $|P(x)|$ *dans l'intervalle* $0\ 1$.

En effet, si le module de $Q(x)$ ne devenait pas supérieur au module maximum de $P(x)$, on aurait, aux $(n+1)$ points successifs $x_k (k = 0, 1, \cdots n)$, où le maximum de $|P(x)|$ est atteint,

$$(-1)^k . [P(x_k) - Q(x_k)] \geqq 0$$

(ou bien une inégalité inverse en *tous* les $(n+1)$ points).

Par conséquent, l'équation

$$P(x) - Q(x) = 0$$

aurait au moins n racines positives; mais, puisqu'elle ne contient que n termes (à cause de $B_{i_0} = A_{i_0}$), ceci est imposible. Le théorème est donc démontré.

Réciproque. *Si le module maximum de* $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *est inférieur au module maximum d'un polynome quelconque* $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{\alpha_i}$ *contenant les mêmes puissances de x et tel que* $B_{i_0} = A_{i_0}$, *le polynome* $P(x)$ *est un polynome oscillateur.*

En effet, admettons que $P(x)$ n'est pas un polynome oscillateur; de sorte que le nombre h de points x_k, où son module maximum L est atteint, est inférieur à $n+1$. Dans ces conditions, on pourra construire un polynome $R(x) = C_0 x^{\alpha_0} + \cdots + C_{i_0-1} x^{\alpha_{i_0}-1} + C_{i_0+1} x^{\alpha_{i_0}+1} + \cdots + C_n x^{\alpha_n}$ tel que $R(x_k) = P(x_k)$, car, aucun des x_k ne pouvant être nul, si $\alpha_0 > 0$, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_1^{\alpha_h} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ x_h^{\alpha_0}\ x_h^{\alpha_1} \dots x_h^{\alpha_h} \end{vmatrix} = D_0 x_1^{\alpha_0} + \cdots + D_{i_0-1} x_1^{\alpha_{i_0}-1} + D_{i_0+1} x_1^{\alpha_{i_0}+1} + \cdots + D_h x_1^{\alpha_h}$$

est différent de zéro, en vertu du théorème de DESCARTES. Entourons ensuite les points x_k de petits intervalles, où $R(x)$ et $P(x)$ conservent leurs signes, et remarquons qu'en dehors de ces intervalles $|P(x)| < L - \varepsilon$, ε étant un nombre positif déterminé. Par conséquent, le polynome

$$H(x) = P(x) - \lambda R(x) = (A_0 - \lambda C_0) x^{\alpha_0} + \cdots + A_{i_0} x^{\alpha_{i_0}} + \cdots + (A_n - \lambda C_n) x^{\alpha_n}$$

aurait son module maximum inférieur à celui de $P(x)$, si l'on prenait le nombre positif λ assez petit pour avoir sur tout le segment o I

$$\lambda |R(x)| < \varepsilon .$$

Il est donc nécessaire que le polynome $P(x)$ soit un polynome oscillateur.

6. Corollaires. a. *Un polynome quelconque*

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

de degré n *ne peut dans l'intervalle* o I *rester inférieur en valeur absolue au plus grand des nombres*

$$|A_0|, \ldots, \left| \frac{A_{n-l} \,.\, l!}{2^{2n-2l} \,.\, n(2n-l-1)(2n-l-2)\ldots(2n-2l+1)} \right|, \ldots, \left| \frac{A_{n-1}}{n \,.\, 2^{2n-2}} \right|, \left| \frac{A_n}{2^{2n-1}} \right|.$$

Réciproquement, si L *est le module maximum de* $P(x)$ *dans l'intervalle* o I, *on a nécessairement*

$$|A_{n-l}| \leqq \frac{2^{2n-2l} \,.\, n(2n-l-1)(2n-l-2)\ldots(2n-2l+1)}{l!} L. \tag{5}$$

Cela résulte de l'application du théorème précédent au cas, où $\alpha_i = i$, pour lequel nous avons construit au § 2 le polynome oscillateur

$$P_{2n}(\sqrt{x}) = L \cos 2n \arccos \sqrt{x} .$$

Remarque. On voit pourtant que l'affirmation relative à A_0, évidente par le fait que $P(0) = A_0$, n'est pas une conséquence du théorème précédent.

b. *Un polynome de la forme*[1]

$$P(x) = A_0 x + A_1 x^3 + \cdots + A_n x^{2n+1}$$

[1] Voir aussi le mémoire de W. MARKOW »Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro», (en russe) publié par l'Université de St. Pétersbourg, 1892.

ne peut rester dans l'intervalle o ı *inférieur en valeur absolue au plus grand des nombres*

$$\left|\frac{A_0}{2n+1}\right|, \ldots, \left|\frac{A_{n-l}\,.\,l!}{2^{2n-2l}\,.\,(2n+1)(2n-2l)\ldots(2n-l)}\right|, \ldots, \left|\frac{A_n}{2^{2n}}\right|;$$

et réciproquement, si L est le module maximum de $P(x)$, on a nécessairement $|A_0| < (2n+1)L$, *etc.*

Cela résulte également de la considération du polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants $1, 3, \ldots, 2n+1$.

7. Théorème. *Il existe dans l'intervalle* o ı *un polynome oscillateur et un seul relatif à une suite d'exposants donnée et ayant un de ses coefficients arbitrairement donné.*

En effet, il suffira de démontrer que parmis les polynomes de la forme

$$Q(x) = B_0 x^{\alpha_0} + \cdots + B_{i_0-1} x^{\alpha_{i_0}-1} + A_{i_0} x^{\alpha_{i_0}} + B_{i_0+1} x^{\alpha_{i_0}+1} + \cdots + B_n x^{\alpha_n},$$

où les exposants α sont donnés ainsi que le coefficient A_{i_0}, il en existe un dont le module maximum est le plus petit possible dans l'intervalle o ı. Or le module maximum de chaque polynome $Q(x)$ est une fonction continue de ses coefficients B. La limite inférieure de ce maximum qui n'est pas nulle, en vertu du corollaire (6, a), ne dépasse pas certainement $|A_{i_0}|$; par conséquent, en vertu du même corollaire, on ne considérera que les coefficients B_i satisfaisant aux inégalités

$$|B_i| \leqq \frac{2^{2\alpha_i}\alpha_n\,.\,(\alpha_n+\alpha_i-1)(\alpha_n+\alpha_i-2)\ldots(2\alpha_i+1)}{(\alpha_n-\alpha_i)!}|A_{i_0}|;$$

les valeurs des variables B_i formant des ensembles fermés, il existera certainement au moins un système de valeurs des B_i qui réalisera le minimum.

En vertu du théorème (5), le polynome oscillateur sera unique, pourvu que $\alpha_{i_0} > 0$. Donc, en général, tous les polynomes oscillateurs relatifs à une suite d'exposants donnée ne peuvent différer que par un facteur constant. Par conséquent, si l'on se donne arbitrairement le coefficient A_0, le facteur de proportionnalité se trouvera également déterminé sans ambiguité. Le théorème est donc démontré.

8. Théorème. *Si on a deux polynomes oscillateurs*

$$P(x) = x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} \text{ et } Q(x) = x^{\alpha_0} + B_1 x^{\beta_1} + \cdots + B_n x^{\beta_n},$$

où $0 < \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \alpha_n$, *le module maximum de $P(x)$ dans l'intervalle* o ı *sera supérieur à celui de $Q(x)$.*

En effet, nous savons (lemme 4) que les coefficients de $P(x)$ sont de signes alternés; par conséquent, les coefficients de

$$Q(x) - P(x) = B_1 x^{\beta_1} - A_1 x^{\alpha_1} + B_2 x^{\beta_2} - \cdots + B_n x^{\beta_n} - A_n x^{\alpha_n}$$

ne pourront présenter plus de n variations de signe.

L'équation

$$Q(x) - P(x) = 0 \tag{6}$$

aura donc, au plus, n racines positives. Si le module maximum de $Q(x)$ était supérieur ou égal à celui de $P(x)$, la différence $Q(x_k) - P(x_k)$ aurait le signe de $Q(x_k)$ (ou serait nulle) en tous les points x_k où $|Q(x)|$ est maximum. Par conséquent, l'équation (6) aurait nécessairement n racines positives $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, satisfaisant aux inégalités

$$x_1 \leqq \xi_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n \leqq x_{n+1};$$

de sorte que dans l'intervalle $0\xi_1$ la différence $Q(x) - P(x)$ aurait le signe de B_1 qui est négatif, et, d'une façon générale, dans l'intervalle $\xi_i \xi_{i+1}$ la différence $Q(x) - P(x)$ aura le signe de $(-1)^{i+1}$. De plus, le nombre des x_i étant supérieur à celui des ξ_i, il y aura au moins un x_i tel que $\xi_{i-1} < x_i < \xi_i$, si l'on convient de remplacer dans cette inégalité ξ_0 par 0 et ξ_{n+1} par ∞. On aurait en ce point x_i

$$[Q(x_i) - P(x_i)] \cdot (-1)^i > 0,$$

et, par conséquent, aussi

$$Q(x_i) \cdot (-1)^i > 0.$$

Or, on a $Q(x_1) > 0$, (puisque, pour des valeurs positives voisines de 0, $Q(x)$ a le signe de son premier terme), donc $Q(x_2) < 0$, et, en général, $Q(x_i) \cdot (-1)^i < 0$. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Le théorème est donc démontré.

9. Théorème. *Si on a deux polynomes oscillateurs*

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + \cdots + A_{i-1} x^{\alpha_{i-1}} + x^m + A_{i+1} x^{\alpha_{i+1}} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$$

et

$$Q(x) = B_0 x^{\beta_0} + \cdots + B_{i-1} x^{\beta_{i-1}} + x^m + B_{i+1} x^{\beta_{i+1}} + \cdots B_n x^{\beta_n}$$

le module maximum de $P(x)$ *est supérieur à celui de* $Q(x)$, *si* $0 \leqq \alpha_0 < \beta_0 < \cdots < \alpha_{i-1} < \beta_{i-1} < m < \beta_{i+1} < \alpha_{i+1} < \cdots < \beta_n < \alpha_n$.

En effet, les coefficients de l'équation

$$P(x) - Q(x) = A_0 x^{\alpha_0} - B_0 x^{\beta_0} + \cdots + A_{i-1} x^{\alpha_{i-1}} - B_{i-1} x^{\beta_{i-1}} - B_{i+1} x^{\beta_{i+1}} + \\ + A_{i+1} x^{\alpha_{i+1}} - \cdots - B_n x^{\beta_n} + A_n x^{\alpha_n} = 0$$

ne présentent pas plus de n variations de signes. Donc le nombre de racines positives de l'équation

$$P(x) - Q(x) = 0 \tag{6bis}$$

ne dépasse pas n. Si le module maximum de $P(x)$ n'était pas supérieur à celui de $Q(x)$, on aurait aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, où $|Q(x)|$ est maximum,

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \cdot Q(x_k) \leqq 0;$$

ou bien, si l'on remarque que $Q(x_1)$ a le signe de A_0 qui est celui de $(-1)^i$, on en conclut que $Q(x_k)$ a le signe de $(-1)^{i+k-1}$, et par conséquent

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \cdot (-1)^{i+k} \geqq 0. \tag{7}$$

En désignant par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les racines de l'équation (6^{bis}), on en déduit que

$$x_1 \leqq \xi_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq \xi_n \leqq x_{n+1}.$$

D'autre part, la différence $P(x) - Q(x)$ aura pour de petites valeurs positives de x le signe de son premier terme A_0; de sorte que dans l'intervalle $0\xi_1$ on a $[P(x) - Q(x)] \cdot (-1)^i > 0$, et dans un intervalle $\xi_{k-1}\xi_k$, on a, en général, $[P(x) - Q(x)] \cdot (-1)^{i+k-1} > 0$.

Il y aurait donc au moins un point x_k, où

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \cdot (-1)^{i+k-1} > 0;$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (7).

Le théorème est donc démontré.

10. Corollaire. *Le polynome oscillateur*

$$P(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}$$

reste, dans l'intervalle $0\,1$, *inférieur en valeur absolue à* $\frac{1}{2n+1}$; *au contraire, le module maximum du polynome* $P_1(x) = x + b_1 x^4 + \cdots + b_n x^{2n+2}$ *doit être supérieur à* $\frac{1}{2n+1}$.

En effet,

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \arccos x = x + B_1 x^3 + \cdots + B_n x^{2n+1}$$

est le polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants: $1, 3, \ldots 2n+1$; son module maximum étant égal à $\frac{1}{2n+1}$, le module maximum de $P(x)$ devra être inférieur et celui de $P_1(x)$ supérieur à $\frac{1}{2n+1}$ (en vertu du théorème 8).

11. Théorème. *Le module maximum E'_{2n} du polynome oscillateur*

$$P(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}$$

satisfait aux inégalités

$$\frac{1}{2n+1} > E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}, \tag{8}$$

si $n > 1$. *Dans le cas, où* $n = 1$, *on a*

$$E'_{2n} = E'_2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

On vérifie d'abord la dernière partie de l'énoncé, en remarquant que, pour $n = 1$, le polynome oscillateur se réduit à

$$P(x) = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^2,$$

son module maximum, $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$, étant atteint pour $x = 1$ et pour $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Examinons à présent le cas de $n > 1$; l'inégalité

$$\frac{1}{2n+1} > E'_{2n}$$

résulte du § précédent. D'autre part, on a par hypothèse,

$$|x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{2n}| \leq E'_{2n} \tag{9}$$

sur le segment $0\ 1$. Donc, a fortiori, pour toute valeur positive de μ, aura-t-on également

$$\left| \frac{x}{1+\mu} + a_1 \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{2n} \right| \leq E'_{2n}$$

ou bien

$$|x(1+\mu)+a_1x^2+\cdots+a'_nx^{2n}|\leqq E'_{2n}(1+\mu)^2$$

En retranchant de cette dernière inégalité l'inégalité (9), on trouve une inégalité de la forme

$$|\mu(x+B_1x^4+\cdots+B_{n-1}x^{2n})|\leqq E'_{2n}[(1+\mu)^2+1],$$

ou encore,

$$|x+B_1x^4+\cdots+B_{n-1}x^{2n}|\leqq E'_{2n}\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}.$$

Or, d'après le corollaire précédent, le module du polynome $x+B_1x^4+\cdots+B_{n-1}x^{2n}$ doit dépasser $\frac{1}{2n-1}$ dans l'intervalle $0\ 1$. Donc,

$$\frac{1}{2n-1}<E'_{2n}\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}$$

ou

$$E'_{2n}>\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\mu}{(1+\mu)^2+1}.$$

En posant, enfin, pour rendre le second membre aussi grand que possible, $\mu=\sqrt{2}$, on obtient

$$E'_{2n}>\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

c. q. f. d.

12. Lemme. *Le module maximum E_{2n} du polynome oscillateur de la forme $P(x)=A_0+x+A_1x^2+A_2x^4+\cdots+A_nx^{2n}$ satisfait aux inégalités*

$$\frac{1}{2}E'_{2n}<E_{2n}<E'_{2n},$$

quel que soit $n>0$.

En effet, l'inégalité $E_{2n}<E'_{2n}$ est une conséquence du théorème 5. D'autre part,

$$P(x)-A_0=x+A_1x^2+A_2x^4+\cdots+A_nx^{2n}$$

ne saurait être un polynome oscillateur. Par conséquent, son module maximum qui ne dépasse pas $E_{2n}\pm A_0\leqq 2E_{2n}$ est supérieur (en vertu du même théorème) à E'_{2n}. Donc, $2E_{2n}>E'_{2n}$ ou bien

$$E_{2n} > \frac{1}{2} E'_{2n}.$$

c. q. f. d.

Corollaire. *Le module maximum E_{2n} du polynome oscillateur de la forme $P(x) = A_0 + x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_n x^{2n}$ satisfait aux inégalités*

$$\frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} < E_{2n} < \frac{1}{2n-1}, \tag{10}$$

quel que soit $n > 0$.

13 Théorème. *La meilleure approximation de $|x|$ sur le segment $(-h, +h)$ par un polynome de degré $2n$ s'annulant à l'origine est égale à hE'_{2n}, la meilleure approximation de $|x|$ sur le segment $(-h, +h)$ par un polynome quelconque de degré $2n$ est égale à hE_{2n}.*

En effet, soit d'abord $h = 1$. Si

$$R(x) = A_0 x + A_1 x^2 + \cdots + A_{2n-1} x^{2n}$$

était un polynome, s'annulant à l'origine, tel que, pour $-1 \leqq x \leqq 1$ on ait

$$\big| |x| - R(x) \big| < E'_{2n}, \tag{11}$$

on aurait aussi

$$\big| |x| - R(-x) \big| < E'_{2n}$$

et, a fortiori, pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\left| |x| - \frac{R(x) + R(-x)}{2} \right| < E'_{2n}.$$

Or cette inégalité est impossible, puisque le polynome

$$|x| - \frac{R(x) + R(-x)}{2} = x - A_1 x^2 - A_3 x^4 - \cdots - A_{2n-1} x^{2n}$$

ne peut rester inférieur, en valeur absolue, au module maximum du polynome oscillateur correspondant.

Au contraire, on peut certainement réaliser l'inégalité

$$\big| |x| - R(x) \big| \leqq E'_{2n}, \tag{12}$$

pour $-1 \leqq x \leqq 1$, si $x - R(x)$ est un polynome oscillateur.

Du moment que l'inégalité (12) est réalisée, on aura aussi

$$\left|\left|\frac{x}{h}\right| - R\left(\frac{x}{h}\right)\right| \leqq E'_{2n}$$

ou bien

$$\left|\,|x| - hR\left(\frac{x}{h}\right)\right| \leqq hE'_{2n} \qquad (12^{\text{bis}})$$

sur le segment $(-h, +h)$; au contraire, on ne peut pas avoir sur le segment $(-h, +h)$

$$\left|\,|x| - R_1(x)\right| < hE'_{2n},$$

car cela conduirait à l'inégalité

$$\left|\,|x| - \frac{1}{h}R_1(x)\right| < E'_{2n}$$

sur le segment $(-1, +1)$ équivalente à l'inégalité (11) qui est impossible. La deuxième partie se démontre d'une façon identique.

14. *Remarque.* En appliquant le théorème (9) *on obtiendra par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent des inégalités analogues pour les meilleures approximations de* $x|x|$, $x^2|x|$ *etc. par des polynomes de degré* m; *l'on vérifiera qu'elles sont respectivement de l'ordre de* $\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}$ *etc.*

Il ne semble pas pourtant que l'on puisse obtenir des résultats plus précis par cette méthode élémentaire. Le problème de la détermination explicite des polynomes oscillateurs parait présenter, en général, des difficultés très considérables; et ce n'est que par l'emploi convenable des approximations successives que l'on parviendra dans chaque cas particulier à des solutions plus ou moins approchées du problème. A mesure que le nombre de termes du polynome augmente, le problème se complique; et il convient d'indiquer une méthode spéciale, si l'on a en vue le cas, où le nombre de termes est très grand. Ce dernier cas fera l'objet principal de l'étude qui va suivre. Indiquons cependant encore deux propositions élémentaires, dont la première, sans intervenir directement dans la suite, sera un de nos guides principaux, tandis que la seconde qui est une généralisation d'un théorème fondamental de M. de la Vallée Poussin, est un principe indispensable de vérification.

15. *Théorème. Les points intérieurs d'écart maximum:* $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ *du polynome oscillateur* $Q(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, *et les points intérieurs d'écart maximum:* $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ *du polynome oscillateur* $P(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $k, 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ (où $k \gtreqless \alpha_i$) *se séparent mutuellement, c'est à dire satisfont aux inégalités:*

$$\beta_1 < b_1 < \beta_2 < b_2 < \cdots \beta_{n-1} < b_{n-1} < \beta_n.$$

En effet, par l'introduction d'un facteur convenable nous pouvons égaler les maxima des polynomes oscillateurs

$$P(x) = x^k + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{a_i},\ Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{a_i},$$

de sorte que le polynome

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

s'annule à l'origine, et le polynome

$$R_1(x) = P(x) + Q(x)$$

s'annule pour $x = 1$. Sauf ces racines évidentes, chacune des équations aura au plus n racines positives. Pour fixer les idées, supposons n pair, et $P(0) = Q(0) > 0$. On aura alors

$$R(0) = 0,\ R(\beta_1) < 0,\ R(\beta_2) > 0, \cdots,\ R(\beta_n) > 0,\ R(1) < 0$$

et

$$R_1(0) > 0,\ R_1(\beta_1) < 0,\ R_1(\beta_2) > 0, \cdots,\ R_1(\beta_n) > 0,\ R_1(1) = 0,$$

en excluant, pour le moment, l'hypothèse de $\beta_i = b_k$. $R(x)$ a donc une racine unique dans chaque intervalle $\beta_i \beta_{i+1}$ et $\beta_n 1$, et $R_1(x)$ a une racine unique dans $0\beta_1$ et dans chacun des intervalles $\beta_i \beta_{i+1}$. Mais il est impossible alors que l'intervalle $\beta_i \beta_{i+1}$ contienne à la fois b_k et b_{k+1}. En effet, il faudrait, puisque $R(x)$ ne s'annule qu'une seule fois entre β_i et β_{i+1}, que la suite des quatres nombres

$$R(\beta_i),\ R(b_k),\ R(b_{k+1}),\ R(\beta_{i+1})$$

ne présente qu'une variation de signe; mais $R(b_k) \,.\, R(b_{k+1}) < 0$, donc, $R(\beta_i) \,.\, R(b_k) > 0$ et $R(b_{k+1}) \,.\, R(\beta_{i+1}) > 0$. Or, on a naturellement, quel que soit k, $R(b_k) \,.\, R_1(b_k) < 0$; d'où $R_1(\beta_i) R_1(b_k) < 0$ et $R_1(b_{k+1}) \,.\, R_1(\beta_{i+1}) < 0$; l'équation $R_1(x) = 0$ aurait donc, au moins, une racine dans chacun des intervalles: $\beta_i b_k$, $b_k b_{k+1}$, $b_{k+1} \beta_{i+1}$, c'est à dire trois racines entre β_i et β_{i+1}, ce qui est impossible.

De même, on a

$$R(0) = 0,\ R(b_1) > 0,\ R(b_2) < 0, \cdots, R(b_{n-1}) > 0,\ R(1) < 0$$

et

$$R_1(0) > 0,\ R_1(b_1) < 0,\ R_1(b_2) > 0, \cdots, R_1(b_{n-1}) < 0,\ R_1(1) = 0.$$

$R(x)=0$ a donc une racine entre b_i et b_{i+1} $(i=1, \cdots n-2)$ et une racine entre b_{n-1} et 1; il ne manque encore qu'une racine qui devra se trouver entre 0 et b_1. On voit également que $R_1(x)=0$ admet une racine dans chacun de ces intervalles. D'où il résultera, comme précédemment, qu'un intervalle $b_i b_{i+1}$ ne peut contenir à la fois deux valeurs β_k et β_{k+1}.

On a donc

$$\beta_1 < b_1 < \beta_2 < \cdots b_{n-1} < \beta_n.$$

Mais il faut montrer encore l'impossibilité de l'hypothèse $\beta_i = b_k$. Il est clair d'abord que si cette circonstance se présentait, $\beta_i = b_k$ serait une racine double de $R(x)=0$, par exemple, qu'il faudrait considérer comme appartenant à la fois aux intervalles $\beta_{i-1}\beta_i$, $\beta_i\beta_{i+1}$, $b_{k-1}b_k$, $b_k b_{k+1}$; dans chacun des deux premiers intervalles et dans l'un au moins des deux derniers $R(x)=0$ n'aurait d'autres racines.

Or, si on a $R(\beta_i)=R(b_k)=0$, cela prouve que

$$P(\beta_i)\,.\,Q(b_k) > 0,$$

et par conséquent,

$$P(\beta_{i+1})\,.\,Q(b_{k+1}) > 0, \quad P(\beta_{i-1})\,.\,Q(b_{k-1}) > 0.$$

On aurait donc les inégalités

$$R(\beta_{i+1})\,.\,R(b_{k+1}) \leqq 0, \quad R(\beta_{i-1})\,.\,R(b_{k-1}) \leqq 0,$$

ce qui est en contradiction avec la remarque que dans trois, au moins, des intervalles $\beta_{i-1}\beta_i$, $\beta_i\beta_{i+1}$, $b_{k-1}b_k$, $b_k b_{k+1}$, $R(x)=0$ n'a d'autre racine que $\beta_i = b_k$. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. *Si* $P(x) = x^\alpha + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{2i}$ *est le polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants:* $\alpha, 0, 2, 4, \cdots 2n$, où $\alpha \neq 2i$, *ses points intérieurs d'écart maximum:* $\beta_1, \cdots \beta_n$ *satisfont aux inégalités:*

$$0 < \beta_1 < \sin\frac{\pi}{2n} < \beta_2 < \sin\frac{2\pi}{2n} < \cdots \beta_{n-1} < \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} < \beta_n < 1.$$

15^{bis}. Lemme. *Si* $P(x)$ *est le polynome oscillateur relatif à la suite des exposants:* $0, \alpha_0, \alpha'_1, \cdots, \alpha'_n$, *il ne pourra pas y avoir entre deux de ses points d'écart* β_i *et* β_{i+1} *plus d'un point d'écart* b_k *du polynome oscillateur* $Q(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, *où* $0 < \alpha_0 < \alpha'_1 < \alpha_1 < \cdots \alpha'_n < \alpha_n$; *de plus, si*

$b_k = \beta_i$, *l'un, au moins, des intervalles* $\beta_i \beta_{i+1}$ *ou* $\beta_{i-1}\beta_i$ *ne contiendra pas d'autre point d'écart de* $Q(x)$.

En effet, formons, comme précédemment,

$$R(x) = P(x) - Q(x), \quad R_1(x) = P(x) + Q(x),$$

en supposant $P(1) = Q(1) > 0$, donc $R(1) = 0$. Soit toujours n pair, pour fixer les idées. On aura

$$R(0) < 0, \; R(\beta_1) > 0, \cdots, \; R(\beta_n) < 0, \; R(1) = 0$$

et

$$R_1(0) < 0, \; R_1(\beta_1) > 0, \cdots, \; R_1(\beta_n) < 0, \; R_1(1) > 0.$$

Chacune des équations $R(x) = 0$ et $R_1(x) = 0$ a, au plus, $n + 2$ racines positives, et d'ailleurs la différence entre le nombre de racines de $R(x)$ et $R_1(x)$ est impaire. Or la seconde équation a une seule racine dans chaque intervalle, ce qui fait $(n+1)$ racines, et la première qui n'en a pas moins que $(n+1)$, aura $(n+2)$ racines, la dernière entre β_n et 1. On en conclut comme précédemment que chaque intervalle contient au plus une valeur b_k. Supposons à présent, que l'on ait $\beta_i = b_k$ et, par exemple,

$$R(\beta_i) = R(b_k) = 0.$$

Il est clair d'abord que l'on n'aura pas $\beta_i < b_{k+1} < b_{k+2} \leqq \beta_{i+1}$; mais supposons que $\beta_i < b_{k+1} < \beta_{i+1}$; on aura donc $R(b_{k+1}) \,.\, R(\beta_{i+1}) < 0$, et par conséquent une racine de $R(x)$ dans l'intervalle $b_{k+1}\beta_{i+1}$. De même, si l'on avait $\beta_i > b_{k-1} > \beta_{i-1}$, cela nous donnerait une seconde racine sur $\beta_{i-1} b_{k-1}$, et au total, cela ferait déjà $(n+3)$ racines pour $R(x) = 0$ ce qui est impossible.

Corollaire. *Les points d'écart du polynome oscillateur* $P(x) = x^a + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{2i}$ *satisfont aux inégalités*

$$\sin\frac{\pi}{2n} < \beta_2 \leqq \sin\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}, \quad \sin\frac{2\pi}{2n} < \beta_3 \leqq \sin\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}, \cdots$$

$$\sin\frac{(i-1)\pi}{2n} < \beta_i \leqq \sin\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1},$$

si le premier point d'écart β_1 *satisfait à l'inégalité* $\beta_1 < \sin\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1}$.

Cela résulte de la comparaison du polynome $P(x)$ avec le polynome oscillateur $Q(x) = \cos(2n+1)\arccos x$ qui est relatif à la suite d'exposants: $1, 3, \cdots 2n+1$, les bornes inférieures étant données par le corollaire précédent.

Remarque. Il résultera des calculs de la seconde partie que pour $\alpha = 1$, on a bien, pour n assez grand, $\beta_1 < \sin\frac{\pi}{4n}$; mais une démonstration élémentaire de ce fait m'échappe pour le moment.

16. *Théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin.*[1] *S'il existe un polynome* $P(x) = \sum_{h=0}^{h=n} A_h x^{a_h}$, *tel que la différence* $f(x) - P(x)$ *prend en* $(n+2)$ *points successifs de l'intervalle* $0\ 1$: $x_1, x_2, \cdots x_{n+2}$ *des signes contraires, il est impossible de former un polynome* $Q(x) = \sum_{h=0}^{h=n} B_h x^{a_h}$ *tel que le module de la différence* $f(x) - Q(x)$ *soit en tous ces points inférieur à la plus petite des valeurs* $|f(x_h) - P(x_h)|$.

En effet, si l'on avait, quel que soit h, $|f(x_h) - P(x_h)| > |f(x_h) - Q(x_h)|$ il en résulterait que

$$f(x_h) - P(x_h) - f(x_h) + Q(x_h) = Q(x_h) - P(x_h)$$

a le signe de $f(x_h) - P(x_h)$. Par conséquent, l'équation

$$\sum_{h=0}^{h=n} (B_h - A_h) x^{a_h} = 0$$

aurait $n+1$ racines positives, ce qui n'est pas possible.

M. de la Vallée Poussin considère, en particulier, les polynomes $P(x)$ tels qu'aux points considérés toutes les différences $f(x_h) - P(x_h)$ sont égales, en valeur absolue. Il résulte du théorème démontré, que pour tout autre polynome $Q(x)$ de la même forme, l'une au moins des différences $f(x_h) - Q(x_h)$ sera supérieure en valeur absolue à la valeur absolue commune des différences $f(x_h) - P(x_h)$. Le polynome $P(x)$ est, pour cette raison, nommé polynome d'approximation relatif à l'ensemble de points considérés.

---

[1] Bulletins de l'Académie de Belgique, 1910. »Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle.« M. de la Vallée Poussin ne considère que le cas, où $a_h = h$; dans ce cas l'intervalle 0 1 peut être remplacé par un intervalle quelconque moyennant la transformation $y = ax + b$.

Seconde Partie.

Propriétés asymptotiques de la meilleure approximation de $|x|$.

17. *Construction d'un polynome $R(x)$ approché de $|x|$.*

Nous allons définir a priori un polynome $R(x)$ par les conditions suivantes. Le polynome $R(x)$ de degré $2n$ doit s'annuler pour $x = 0$ et devenir égal à $|x|$ aux points $x_k = \cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \cdots 2n-1)$ qui sont racines du polynome

$$T(x) = \cos 2n \arccos x.$$

En déterminant le polynome $\frac{R(x)}{x}$ de degré $2n-1$ par la formule de Lagrange, et en remarquant que

$$T'(x_k) = \frac{2n \sin 2n \arccos x_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = (-1)^k \cdot \frac{2n}{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}},$$

on a donc

$$R(x) = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} - \sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right].$$

D'autre part, on a manifestement, par un calcul semblable

$$x = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} + \sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right];$$

d'où

$$x - R(x) = \frac{xT(x)}{n}\sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{-xT(x)}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \cdot \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}.$$

Mais $R(x)$ ne peut contenir que des puissances paires de x. Par conséquent,

$$|x| - R(x) = T(x)\frac{xH(x)}{n}, \tag{13}$$

x étant toujours supposé positif dans le second membre, où l'on a fait, pour abréger,

$$H(x) = -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x + \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}. \tag{14}$$

18. Théorème. *On a*

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{2n}[1 + \varepsilon_n(x)], \tag{15}$$

où $\varepsilon_n(x)$ *tend vers* o *avec* $\frac{1}{nx}$, *pour* $x \gtrless 0$, *et* $\varepsilon_n(0) = -1$.

La dernière affirmation est évidente. Pour voir que $\varepsilon_n(x)$ tend vers o, si $x \gtrless 0$, remarquons que

$$H(x) = \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{3\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_{\frac{5\pi}{4n}}^{\frac{7\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \cdots + \int_{\frac{(2n-3)\pi}{4n}}^{\frac{(2n-1)\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha,$$

en supposant n pair, pour fixer les idées, puisque

$$\int_a^b \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha = \frac{\sin b}{x+\cos b} - \frac{\sin a}{x + \cos a}. \tag{16}$$

Or, la fonction $\frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}$ étant croissante avec α $\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha < 2H(x) < \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha.$$

Donc, en vertu de la formule (16)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{x+\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x+\sin\frac{\pi}{4n}}\right]<H(x)<\frac{1}{2}\left[\frac{2}{x}-\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{x+\cos\frac{\pi}{4n}}-\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x+\sin\frac{\pi}{4n}}\right]$$

et, a fortiori,

$$\frac{1}{2x}\cdot\left(\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{\pi}{4nx}}\right)<H(x)<\frac{1}{2x}\left[1+\frac{\pi}{4nx}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right]. \tag{17}$$

Par conséquent,

$$xH(x)=\frac{1}{2}(1+\varepsilon_n(x)),$$

où $\varepsilon_n(x)$ tend vers 0, lorsque nx croît indéfiniment. D'où résulte la formule annoncée.

19. *Détermination d'une limite inférieure de* $E'_{2n}|x|$.

D'après le théorème (16), nous allons considérer $(n+1)$ intervalles du segment 0 1, où la différence

$$x-R(x)=\frac{T(x)}{n}.xH(x)$$

change successivement de signe; et si dans chacun de ces intervalles le module de cette différence devient supérieur à un nombre fixe A, nous en conclurons que $E'_{2n}>A$.

Or $xH(x)$ conserve son signe, et $T(x)$ change successivement de signe aux points: $\sin\frac{\pi}{4n}$, $\sin\frac{3\pi}{4n}$, $\cdots$, $\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}$, qui déterminent ainsi sur le segment 0 1 les $(n+1)$ intervalles voulus. Dans tous ces intervalles, sauf le premier $\left(0, \sin\frac{\pi}{4n}\right)$, considérons les points $\sin\frac{\pi}{2n}$, $\cdots$ $\sin\frac{n\pi}{2n}$, où $|T(x)|=1$. En utilisant l'inégalité (17), nous voyons qu'en tous ces points

$$xH(x)>\frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right),$$

et par conséquent,

$$|x - R(x)| > \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{\pi^2}{32n^2}\right).$$

Dans le premier intervalle nous prendrons le point $\sin\frac{\pi}{8n}$, en remarquant que $T\left(\sin\frac{\pi}{8n}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ Or, on voit aisément (en ne conservant que les deux derniers termes de la somme $H(x)$) que

$$H(x) > \frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x+\sin\frac{\pi}{4n}} - \frac{\cos\frac{3\pi}{4n}}{x+\sin\frac{3\pi}{4n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + 2x\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}}{\left(x+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)} >$$

$$> \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(x+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)} > \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{\left(x+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)},$$

si l'on suppose $n \geqq 2$.

Donc,

$$\sin\frac{\pi}{8n}\cdot H\left(\sin\frac{\pi}{8n}\right) > \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8n}}{\left(\sin\frac{\pi}{8n}+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{8n}+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)} >$$

$$> \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{\frac{\pi}{8n}}{\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{\pi}{4n}\right)\left(\frac{\pi}{8n}+\frac{3\pi}{4n}\right)} = \frac{8n}{21(2n+1)}.$$

Par conséquent, pour $x = \sin\frac{\pi}{8n}$, on a

$$|x - R(x)| > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

Ainsi $E'_{2n}|x|$ est supérieur au plus petit des nombres, $\frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}$ et $\frac{1}{4n}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right)\cdot$ Donc, finalement,

$$E'_{2n} > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)} \tag{18}$$

Cette inégalité est plus précise que l'inégalité (8) obtenue plus haut, dès que $n \geqq 4$.

20. Théorème. *Si $P(x)$ est un polynome d'approximation de degré $2n$ $(n \geqq 4)$ de $|x|$ sur le segment $(-1, +1)$, l'équation*

$$P(x) - R(x) = 0$$

admet une racine et une seule dans chacun des $2n$ intervalles compris entre $\sin \frac{k\pi}{2n}$ et $\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}$ $(k = -n, -(n-1), \ldots, 0, 1, \ldots, n)$.

En effet, pour toute valeur de n, on a sur tout le segment[1]

$$\left| |x| - P(x) \right| \leqq \frac{2}{\pi(2n+1)},$$

et, d'autre part en tenant compte de l'inégalité (17), on constate qu'aux points $\sin \frac{k\pi}{2n}$, on a

$$\left| |x| - R(x) \right| > \frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\pi^2}{32 n^2}}{1 + \frac{\pi}{4n \sin \frac{\pi}{2n}}} \right)$$

quel que soit $|k| > 0$, avec $(|x| - R(x)) \cdot (-1)^k > 0$ (on suppose, pour fixer les idées, n pair).

Pour $n \geqq 4$, on a

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{1 - \frac{\pi^2}{32 n^2}}{1 + \frac{\pi}{4n \sin \frac{\pi}{2n}}} \right) > \frac{2}{\pi(2n+1)};$$

[1] Cette inégalité que l'on pourrait, en utilisant les resultats obtenus plus loin, remplacer par une inégalité plus precise, résulte du développement de $|x|$ en série de polynomes trigonométriques $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

On a

$$|x| = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{T_2(x)}{1 \cdot 3} - \frac{T_4(x)}{3 \cdot 5} + \frac{T_6(x)}{5 \cdot 7} - \cdots \right]$$

(voyez mon mémoire de l'Academie Belgique). En s'arrêtant au terme de degré $2n$, on a un polynome de degré $2n$ qui fournit une approximation égale à $\frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \cdots \right] = \frac{2}{\pi(2n+1)}$.

pour le voir il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2n}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right) > \frac{2}{\pi(2n+1)}\cdot\left(1+\frac{2n+\frac{1}{3}}{4n}\right),$$

ou

$$1-\frac{\pi^2}{32n^2} > \frac{6n+\frac{1}{3}}{\pi(2n+1)}.$$

Par conséquent, le polynome

$$P(x)-R(x)=(P(x)-|x|)+(|x|-R(x))$$

a en tous les points considérés le signe de

$$|x|-R(x).$$

Ainsi, aux points $\sin\frac{k\pi}{2n}$ $(k\gtrless 0)$

$$[P(x)-R(x)]\,.\,(-1)^k>0. \tag{19}$$

D'autre part, pour $x=k=0$, $R(x)=0$ et $P(x)>0$, l'inégalité (19) a donc lieu également. Il y a, par conséquent, un nombre impair de racines de l'équation $P(x)-R(x)=0$ dans chaque intervalle $\left(\sin\frac{k\pi}{2n},\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)$; il y en a donc une et une seule. *C.q.f.d.*

Corollaire. *Un polynome quelconque $Q(x)$ de degré non supérieur à $2n$ qui fournit une approximation de $|x|$ inférieure à* $\frac{1}{2n}\left[\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{\pi}{4n\sin\frac{\pi}{2n}}}\right]$ *jouit de la propriété que l'équation*

$$Q(x)-R(x)=0$$

admet une et une seule racine dans chaque intervalle $\left(\sin\frac{k\pi}{2n},\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)$, *si on a* $Q(0)\gtrless 0$.

21. *Expressions asymptotiques* de $|x|-R(x)$. Nous avons déjà obtenu une expression asymptotique très simple de $|x|-R(x)$ au § 18. Mais cette expression

n'a été déterminée que pour nx croissant indéfiniment. Il est nécessaire de se débarrasser de cette restriction. Puisqu'il s'agit de valeurs très grandes de n, nous pouvons supposer n pair, pour fixer les idées, ce que nous ferons toujours dans la suite, en remarquant qu'on a alors $T(x) = \cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$.

Remarquons d'abord que l'on a identiquement

$$H(x) = -\sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\cdot\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Posons ensuite

$$H_1(x) = \frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1,3,\cdots n-1} \frac{x\sin\frac{k\pi}{2n}+1}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}. \tag{20}$$

On en conclut immédiatement que

$$H(x) = (1-\eta)\,.\,H_1(x), \tag{21}$$

où

$$0 < \eta < \frac{\pi^2}{24n^2}. \tag{22}$$

La différence $xH(x) - xH_1(x)$ tend donc *uniformément* vers 0, lorsque n croît indéfiniment.

Envisageons, enfin, la fonction

$$xH_2(x) = \frac{\pi x}{2n}\cdot\sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{k\pi}{2n}\right)^2-\frac{\pi^2}{16n^2}} \tag{23}$$

qui joue un rôle fondamental dans ce qui suivra. Sa propriété essentielle est qu'elle est une fonction de $b = \frac{2nx}{\pi}$ seulement, et, en introduisant cette nouvelle variable, on a manifestement

$$xH_2(x) = \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}} = F(b). \tag{24}$$

Je dis que la différence $xH(x) - xH_2(x)$ tend aussi *uniformément* vers 0.

Pour le voir, je prends un nombre positif fixe A, qui est supposé aussi grand qu'on veut, et je sépare les valeurs de x en deux classes: dans la première, $x \leqq x_0 \leqq \frac{\pi A}{2n}$, c'est à dire $b \leqq A$, dans la seconde, $x > x_0$, c'est à dire $b > A$.

Soit d'abord $x > x_0$. En vertu de l'inégalité (17), on a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1 - \frac{\pi^2}{32n^2}}{1 + \frac{1}{2A}}\right] < xH(x) < \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2A} + \frac{\pi^2}{32n^2}\right].$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{b\,dz}{(b+z)^2 - \frac{1}{4}} < \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}} < \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{b\,dz}{(b+z)^2 - \frac{1}{4}} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

ou

$$\frac{b}{2}\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} < F(b) < \frac{b}{2}\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

ou encore,

$$\frac{b}{2b+1} - \frac{b}{(2b+1)^2} < F(b) < \frac{b}{2b+1} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

puisque $\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} = \frac{1}{b+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\left(b+\frac{1}{2}\right)^2} + \cdots$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{A}\right) < F(b) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2A}\right)$$

et

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2A}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right] < F(b) - xH(x) < \frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2A}-\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{1}{2A}}\right] < \frac{1}{2}\left[\frac{2}{A}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right].$$

Donc, finalement, pour $x > x_0\,(b > A)$, on a

$$|xH(x) - xH_2(x)| < \frac{1}{A} + \frac{\pi^2}{64n^2}. \tag{25}$$

22. Soit à présent $x \leqq x_0$. Désignons par I_k le terme général de $xH_1(x)$, et par I'_k celui de $xH_2(x)$. Ainsi

$$I_k = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{x^2\sin\frac{k\pi}{2n}+x}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \frac{\frac{\pi b^2}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}+b}{\left[b+\frac{2n}{\pi}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[b+\frac{2n}{\pi}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

et

$$I'_k = \frac{b}{(b+k)^2-\frac{1}{4}} = \frac{b}{\left(b+k-\frac{1}{2}\right)\left(b+k+\frac{1}{2}\right)}.$$

En développant les sinus en série, on a

$$I_k = \frac{b(1+\Theta x_0)}{\left\{b+\left(k-\frac{1}{2}\right)\left[1-\Theta_1\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{24n^2}\right]\right\}\left\{b+\left(k+\frac{1}{2}\right)\left[1-\Theta_2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{24n^2}\right]\right\}},$$

où Θ, Θ_1, Θ_2 sont positifs et inférieurs à 1.

En supposant d'abord $k+\frac{1}{2} \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt[3]{x_0}$, on a donc

$$I_k = \frac{b(1+\Theta x_0)}{\left[b+\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\Theta'_1 x_0^{2/3}}{6}\right)\right]\left[b+\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\Theta'_2 x_0^{2/3}}{6}\right)\right]} = I'_k\cdot\frac{1+\Theta x_0}{\left(1-\frac{\Theta' x_0^{2/3}}{6}\right)^2},$$

où Θ'_1, Θ'_2, Θ' sont également positifs et inférieurs à 1. Ainsi

$$I'_k < I_k < I'_k(1 + 2x_0^{2/3}).$$

D'autre part, si $k + \frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi}\sqrt[3]{x_0}$, on a

$$I'_k < I_k < \frac{b(1+\Theta x_0)}{\left[b + \frac{2}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right]\left[b + \frac{2}{\pi}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\pi}{2} b(1+\Theta x_0)\left[\frac{1}{b + \frac{2}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{b + \frac{2}{\pi}\left(k + \frac{1}{2}\right)}\right]$$

$\left(\text{puisque } \sin\frac{\pi h}{2} > h, \text{ pour } 0 < h < 1\right)$.

Par conséquent, k_0 étant le plus petit nombre entier satisfaisant à la condition $k + \frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi}\sqrt[3]{x_0}$, on a

$$\sum_{k=k_0}^{k=n-1} I'_k < \sum_{k=k_0}^{k=n-1} I_k < \frac{\pi b}{b + \frac{2}{\pi}\left(k_0 - \frac{1}{2}\right)} < \frac{\pi b}{b + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2n\sqrt[3]{x_0}}{\pi} - 1\right)} \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi n x_0}{n x_0 + \left(\frac{2n\sqrt[3]{x_0}}{\pi} - 1\right)} < \frac{\pi^2}{2} x_0^{2/3}.$$

De plus, $\sum_n^\infty I'_k < \frac{1}{n}$. Donc, pour $x \leqq x_0$, on a

$$-\frac{1}{n} < xH_1(x) - xH_2(x) < \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)x_0^{2/3}$$

et, en vertu de (21),

$$-\frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{24n^2} < xH(x) - xH_2(x) < \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)x_0^{2/3}. \tag{26}$$

Posons, enfin, $x_0 = \frac{1}{n^{3/5}}$. Dans ces conditions, l'inégalité (26) donne à fortiori

$$|xH(x) - xH_2(x)| < \frac{2 + \frac{\pi^2}{2}}{n^{2/5}} \tag{26bis}$$

et l'inégalité (25), qui a lieu pour $x > x_0$, devient

$$|xH(x) - xH_2(x)| < \frac{\pi}{2n^{2/3}} + \frac{\pi^2}{64n^2}. \tag{25bis}$$

Il est donc démontré que, pour toute valeur positive de x,

$$xH(x) = xH_2(x) + \beta_n(x),$$

où

$$|\beta_n(x)| < \frac{2 + \frac{\pi^2}{2}}{n^{2/3}}, \tag{27}$$

c'est à dire

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}\left[F\left(\frac{2nx}{\pi}\right) + \beta_n(x)\right]. \tag{28}$$

Telle est l'expression asymptotique que nous allons utiliser dans la suite.

23. *Expressions diverses de la fonction* $F(b)$. Nous avons défini la fonction $F(b)$ par l'expression

$$F(b) = \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}}. \tag{24}$$

Il est aisé de voir que cette fonction est étroitement liée à la fonction Γ. En effet, on a immédiatement

$$F(b) = 2b\left[\frac{1}{2b+1} - \frac{1}{2b+3} + \frac{1}{2b+5} - \frac{1}{2b+7} + \cdots\right]. \tag{29}$$

Or, on sait que

$$\psi(a) = \frac{d\log\Gamma(a)}{da} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \cdots,$$

où γ est la constante d'EULER. Donc,

$$F(b) = \frac{b}{2}\left\{(\gamma - \gamma) - \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{1}{4}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{3}{4}}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{5}{4}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{7}{4}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \cdots\right\} = \frac{b}{2}\left[\psi\left(\frac{b}{2} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]. \tag{30}$$

Indiquons une autre expression[1] de $F(b)$ qui se déduit de (29) par la transformation d'EULER; on obtient ainsi

$$F(b) = \frac{b}{2b+1}\left[1 + \frac{1}{2b+3} + \frac{1.2}{(2b+3)(2b+5)} + \frac{1.2.3}{(2b+3)(2b+5)(2b+7)} + \cdots\right]. \quad (31)$$

Remarquons que nous avons là une série hypergéometrique; ainsi, d'après les notations habituelles, on a l'expression

$$F(b) = \frac{b}{2b+1} F\left(1, 1, b+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

L'expression (31) conduit immédiatement au résultat trouvé plus haut que

$$F(\infty) = \frac{1}{2},$$

mais il convient encore d'en déduire que

$$F(b) < \frac{1}{2}. \quad (32)$$

En effet,

$$F(b) < \frac{b}{2b+1}\left[1 + \frac{1}{2b+3} + \frac{1.2}{(2b+3)(2b+5)} + 2.\frac{1.2.3}{(2b+3)(2b+5)(2b+7)}\right];$$

il suffit donc de vérifier que

$$2b[2.1.2.3 + 1.2.(2b+7) + (2b+5)(2b+7) + (2b+3)(2b+5)(2b+7)] <$$
$$< (2b+1)(2b+3)(2b+5)(2b+7),$$

ou

$$0 < 105 + 20b + 4b^2.$$

La fonction $F(b)$ peut aussi se présenter sous forme d'intégrale définie:

$$F(b) = b\int_0^1 \frac{z^{b-\frac{1}{2}}}{z+1}dz. \quad (33)$$

Remarquons, enfin, que $F(b)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\frac{F(b)}{b} + \frac{F(b+1)}{b+1} = \frac{1}{b+\frac{1}{2}}.$$

[1] Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II (Teil I_2). BRUNEL, »Bestimmte Intégrale«, § 12.

24. *Tables des valeurs de la fonction $F(b)$ avec l'approximation* 0,00055 *et de sa dérivée $F'(b)$ avec l'approximation* 0,001.

v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$
0	0,000	0,45	0,332	1,2	0,445	2,1	0,477
0,05	0,070	0,5	0,347	1,3	0,451	2,2	0,478
0,1	0,127	0,55	0,360	1,4	0,456	2,3	0,480
0,15	0,173	0,6	0,371	1,5	0,460	2,4	0,481
0,2	0,212	0,7	0,391	1,6	0,464	2,5	0,483
0,25	0,244	0,8	0,406	1,7	0,467	3	0,488
0,3	0,271	0,9	0,419	1,8	0,470	4	0,493
0,35	0,294	1	0,429	1,9	0,473	5	0,495
0,4	0,314	1,1	0,438	2	0,475	6	0,497

v	$F'(v)$	v	$F'(v)$
0	1,571	0,46	0,314
0,3	0,502	0,48	0,297
0,32	0,471	0,5	0,282
0,34	0,443	0,52	0,268
0,36	0,417	0,54	0,254
0,38	0,393	0,56	0,241
0,4	0,371	0,58	0,230
0,42	0,350	0,6	0,219
0,44	0,331	1	0,093

25. *Détermination d'une borne supérieure de E_{2n} pour des valeurs très grandes de n.* Nous verrons la raison qui conduit à envisager les polynomes de la forme

$$Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \frac{3a_2}{b^2 - b_2^2} + \cdots\right], \tag{34}$$

où $b_1 < b_2 < \cdots$ sont les racines successives de l'équation

$$T(x) = T\left(\frac{\pi b}{2n}\right) = \cos 2n \arcsin \frac{\pi b}{2n} = 0.$$

Bornons nous aux trois premières racines b_1, b_2, b_3. Je dis que, si n croît indéfiniment, l'approximation de $|x|$ par le polynome $Q(x)$ a pour valeur asymptotique l'approximation de $|x|$ par la fonction

$$Q_1(x) = R(x) + \frac{\cos \pi b}{n}\left[B + \frac{a_2}{b^2 - \frac{1}{4}} + \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} + \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}}\right].$$

Je veux dire par là que, si μ_n est l'approximation fournie par $Q(x)$, et μ'_n l'approximation fournie par $Q_1(x)$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{\mu'_n} = 1.$$

En effet, en vertu de (28),

$$|x| - Q(x) = \frac{T(x)}{n}\left[F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} - \frac{3a_2}{b^2 - b_2^2} - \frac{5a_3}{b^2 - b_3^2} + \beta_n\right]$$

et

$$|x| - Q_1(x) = \frac{T(x)}{n}[F(b) + \beta_n] - \frac{\cos \pi b}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} + \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} + \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}}\right].$$

Par conséquent, pour $b > A$, A étant suffisamment grand, le maximum de $\big||x| - Q(x)\big|$, aussi bien que celui de $\big||x| - Q_1(x)\big|$, aura la forme

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - B + \alpha_n\right),$$

où α_n est une quantité aussi petite que l'on veut. D'autre part, $T(x) = \cos 2n \arcsin \frac{\pi b}{2n} = \cos 2n\left[\frac{\pi b}{2n} + \theta\left(\frac{\pi b}{2n}\right)^3\right] = \cos\left(\pi b + \frac{\theta \pi^3 b^3}{4n^2}\right)$, où $0 < \theta < 1$. Donc, lorsque $\frac{A^3}{n^2}$ tendra vers 0, $\cos \pi b - T(x)$ et chacune des différences telle que $\frac{\cos \pi b}{b^2 - \frac{1}{4}} - \frac{T(x)}{b^2 - b_1^2}$ tendront également vers 0. Par conséquent, ou bien $n\mu_n$ et $n\mu'_n$ tendent vers $\frac{1}{2} - B$ (si c'est, pour $b > A$, que l'écart maximum de $|x| - Q(x)$ est atteint), ou bien, sans tendre nécessairement vers une limite fixe, $n\mu_n$ et $n\mu'_n$ sont supérieurs à $\frac{1}{2} - B$ et ont une différence qui tend vers 0. Dans les deux cas

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{\mu'_n} = 1.$$

Nous dirons aussi d'une façon générale que $Q_1(x)$ est une expression asymptotique de $Q(x)$, si l'approximation fournie par $Q_1(x)$ est asymptotique (au sens précis qui vient d'être indiqué) à celle que donne $Q(x)$.

Il faudrait déterminer les nombres B, a_1, a_2, a_3 de telle sorte que la fonction

$$S(b) = \Phi(b) \, . \cos \pi b$$

s'écarte le moins possible de zéro pour toutes les valeurs positives de b, où l'on a posé

$$\Phi(b) = F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} - \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}}.$$

Je signale ce problème, sans le traiter d'une façon générale. Remarquons seulement que, si l'on admet que[1] $0 < B < \frac{1}{2}$ et $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, ce problème est équivalent au suivant; déterminer la fonction $S(b)$ qui s'écarte le moins possible de zéro pour $0 \leqq b \leqq \frac{5}{2}$ et pour $b = \infty$. En effet, on a

$$|\Phi(\infty)| = \frac{1}{2} - B$$

et

$$|\Phi(b)| < \frac{1}{2} - B$$

lorsque $b > \frac{5}{2}$: il est donc inutile de considérer les valeurs de $b > \frac{5}{2}$.

J'ai résolu ce dernier problème avec une approximation du même ordre que celle des tables (24) des fonctions $F(b)$ et $F'(b)$; mais j'éprouve quelques difficultés à présenter systématiquement les approximations successives que j'ai faites. Je me bornerai d'indiquer a priori les coefficients trouvés et de calculer directement une borne supérieure de l'approximation fournie par le polynome correspondant.

26. Les coefficients B, a_1, a_2, a_3 doivent dans tous les cas satisfaire à l'égalité

$$|\Phi(0)| = |\Phi(\infty)|$$

ou

$$\frac{1}{2} - B = B - 4a_1 - \frac{4}{3}a_2 - \frac{4}{5}a_3. \tag{35}$$

Posons

$$B = 0{,}357; \; a_1 = 0{,}0401; \; a_2 = 0{,}0255; \; a_3 = 0{,}0245.$$

L'égalité (35) est vérifiée; on a, en effet

$$|\Phi(0)| = |\Phi(\infty)| = 0{,}143.$$

[1] Voir le corollaire (15^{bis}).

Il est évident que $S(0) = \Phi(0) < 0$, et $S(b)$ va en croissant au début. Je dis que dans l'intervalle $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ $S(b)$ aura, au plus, trois extrema. Pour le voir, il suffit de remarquer que $S(b)$ qui admet une dérivée continue, devra avoir le même nombre[1] d'extrema que $n[|x| - Q(x)]$, qui tend uniformément vers $S(b)$ pour $b < \frac{5}{2}$.

Or, $x - Q(x)$ admet au moins $n - 2$ extrema pour $x > \sin \frac{5\pi}{4n}$ et le nombre total d'extrema ne peut dépasser $n + 2$. Donc, si l'on exclut encore l'extremum de l'origine il ne reste que trois extrema possibles pour $0 < b \leqq \frac{5}{2}$. On remarque que $S'(0) > 0$, $S'(1) < 0$, $S'(2) > 0$, $S'(3) < 0$. Donc dans chaque intervalle 0 1, 1 2, 2 3, il y aura un seul extremum.

Dans le premier intervalle je prend $b = 0{,}4$. Je trouve[2]

$$S(0{,}4) = \cos 72^\circ \left[0{,}314 - 0{,}357 + \frac{0{,}0401}{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}} + \frac{0{,}0765}{\frac{9}{4} - \frac{4}{25}} + \frac{0{,}1225}{\frac{25}{4} - \frac{4}{28}}\right] = \cos 72^\circ \,.\, 0{,}4586 <$$

$$< \cos 72^\circ \,.\, 0{,}4598 < 0{,}1421.$$

Il faut s'assurer que l'extremum de l'intervalle 0 1 est inférieur à $0{,}143$. A cet effet, calculons, pour $b = 0{,}4$, la dérivée logarithmique $\frac{S'(b)}{S(b)}$. On a

[1] Il est peut-être utile d'insister sur ce point qui est une conséquence du fait suivant: si on a une suite de fonctions $F_n(b)$ qui tend uniformément vers une fonction $F(b)$, si en outre les fonctions $F(b)$ et $F_n(b)$ admettent des dérivées continues, et si, enfin, $F'(b_0) = A$, on pourra déterminer b et un nombre n assez grand tel que l'on ait $|F'_n(b) - A| < \varepsilon$ et $|b - b_0| < h$, ε et h étant aussi petits que l'on veut. En effet, on a $F(b_0 + \alpha) - F(b_0) = \alpha(A + \eta)$; supposons $\alpha < h$ et assez petit, pour avoir aussi $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$. Or, pour n assez grand, on a, quelque soit b dans l'intervalle considéré, $|F_n(b) - F(b)| < \frac{\varepsilon\alpha}{4}$. Par conséquent,

$$F_n(b_0 + \alpha) - F_n(b_0) = \alpha(A + \eta) + \frac{\varepsilon'\alpha}{2},$$

avec $\varepsilon' < \varepsilon$. Donc, pour une certaine valeur de b ($b_0 < b < b_0 + \alpha$), on a

$$F'_n(b) = A + \eta + \frac{\varepsilon'}{2}$$

ou

$$|F'_n(b) - A| < \varepsilon. \qquad c.q.f.d.$$

[2] Les égalités sont approchées et remplacées à la fin de chaque calcul par des inégalités éxactes qu'on obtient en additionnant toutes les erreurs.

$$\frac{S'(0{,}4)}{S(0{,}4)} = \frac{F'(0{,}4) + \dfrac{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}0401}{\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{25}\right)^2} + \dfrac{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}0765}{\left(\frac{9}{4} - \frac{4}{25}\right)^2} + \dfrac{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1225}{\left(\frac{25}{4} - \frac{4}{25}\right)^2}}{0{,}4586} - \pi \operatorname{tg} 72^\circ =$$

$$= 9{,}481 - 9{,}669 = -0{,}188.$$

D'où

$$S'(0{,}4) = -0{,}142 \cdot 0{,}188 = -0{,}0267.$$

Ainsi

$$0 > S'(0{,}4) > -0{,}03.$$

Donc, si $S(b)$ peut atteindre la valeur $0{,}143$, cela arrive pour $b < 0{,}4$, et il faut que $0{,}4 - b > \frac{0{,}009}{0{,}03} = 0{,}03$.

Pour être certain que le maximum n'atteint pas $0{,}143$, il suffira donc de remarquer que $S(0{,}375) < S(0{,}4)$.

Or,

$$F(0{,}375) = \cos 67^\circ 30' \left[0{,}304 - 0{,}357 + \frac{4{,}01}{\frac{1}{4} - \frac{9}{64}} + \frac{0{,}0765}{\frac{9}{4} - \frac{9}{64}} + \frac{0{,}1225}{\frac{25}{4} - \frac{9}{64}}\right] = 0{,}14157.$$

Cherchons ensuite le maximum de $|S(b)|$ dans l'intervalle $(1\ 2)$. Calculons $S(b)$, pour $b = 1{,}2$. On a

$$-S(1{,}2) = \cos 36^\circ \left[0{,}445 - 0{,}357 - \frac{0{,}0401}{\frac{36}{25} - \frac{1}{4}} + \frac{0{,}0765}{\frac{9}{4} - \frac{36}{25}} + \frac{0{,}1225}{\frac{25}{4} - \frac{36}{25}}\right] = \cos 36^\circ [0{,}088 -$$

$$- 0{,}03370 + 0{,}09444 + 0{,}02547] = \cos 36^\circ \cdot 0{,}17421 < \cos 36^\circ \cdot 0{,}175 < 0{,}1416.$$

Calculons encore

$$-S'(1{,}2) = \cos 36^\circ [0{,}065 + 0{,}0680 + 0{,}2788 + 0{,}0127] - \pi \sin 36^\circ \cdot 0{,}17421 < \cos 36^\circ \cdot 0{,}427 -$$

$$- \pi \sin 36^\circ \cdot 0{,}1736 < 0{,}34546 - 0{,}32056 < 0{,}025.$$

D'ailleurs, $S'(1{,}2) < 0$.

Donc, le module de $S(b)$ ne pourra atteindre $0{,}143$, c'est à dire augmenter de $0{,}0014$ que, si b augmente de plus que $\frac{0{,}0014}{0{,}025} = 0{,}056$. Or,

$$-S(1{,}25) = \cos 45^\circ \left[0{,}448 - 0{,}357 - \frac{0{,}0401}{\frac{25}{16} - \frac{1}{4}} + \frac{0{,}0765}{\frac{9}{4} - \frac{25}{16}} + \frac{0{,}1225}{\frac{25}{4} - \frac{25}{16}}\right] = \cos 45^\circ [0{,}091 +$$

$$+ 0{,}11126 + 0{,}02613 - 0{,}03055] = \cos 45^\circ \cdot 0{,}19784 < 0{,}707 \cdot 0{,}19784 < 0{,}1399.$$

$|S(b)|$ a donc dépassé son maximum avant $b = 1{,}25$; ce maximum est donc inférieur à $0{,}143$.

Il reste encore à examiner l'intervalle $(2\ 3)$.

Calculons $S(2{,}2)$. On a

$$S(2{,}2) = \cos 36^\circ \left[0{,}478 - 0{,}357 - \frac{0{,}0401}{4{,}84 - 0{,}25} - \frac{0{,}0765}{4{,}84 - 2{,}25} + \frac{0{,}1225}{6{,}25 - 4{,}84}\right] <$$
$$< \cos 36^\circ \,.\, 0{,}17 < 0{,}1377.$$

D'autre part

$$0 > S'(2{,}2) > -0{,}04.$$

Le maximum de $S(b)$ ne saurait donc dépasser $0{,}143$ que s'il était atteint pour $b < 2{,}1$. Or on vérifie que $S'(2{,}1) > 0$.

Ainsi tous les maxima de $|S(b)|$ sont inférieurs ou égaux à $0{,}143$.

Il en résulte qu'avec le choix indiqué des coefficients on construit un polynome $Q(x)$ de degré $2n$ tel que, pour n assez élevé, on a

$$\big||x| - Q(x)\big| < \frac{0{,}143 + \varepsilon_n}{n},$$

où ε_n tend vers 0; a fortiori

$$E_{2n}|x| < \frac{0{,}286}{2n}, \tag{36}$$

pour n suffisamment grand.

Si l'on veut abaisser la borne supérieure, il faut prendre un nombre plus considérable de termes dans $Q(x)$, et il y a lieu de remarquer que les coefficients déjà trouvés n'éprouveront que des variations très faibles. Mais avant d'entreprendre cette nouvelle étude il sera essentiel de former une table plus exacte des fonctions $F(b)$ et $F'(b)$.

27. *Détermination d'une borne inférieure de* $E_{2n}|x|$.

Pour la détermination d'une borne inférieure de E_{2n} on pourra procéder de la façon suivante.

Prenons sur le segment $(-1, +1)$ les points $0, \pm\beta_1, \pm\beta_2, \cdots, \pm\beta_{i_0}$, $\pm \sin\frac{i_0\pi}{2n}, \pm\sin\frac{(i_0+1)\pi}{2n}, \cdots, \pm\sin\frac{n\pi}{2n}$ et déterminons le polynome[1] de degré non supérieur à $(2n+1)$ qui en tous ces points reçoit successivement les valeurs

[1] Ce sera, d'après le § 16, le polynome d'approximation de $|x|$ relatif à la suite considérée de points.

$|x| \pm \varrho$. Au sujet des β_i nous ferons ensuite l'hypothèse que $\sin \frac{(i-1)\pi}{2n} < \beta_i < \sin \frac{i\pi}{2n}$. Posons

$$S(x) = \sqrt{1-x^2} \, . \sin 2n \arccos x$$

et

$$S_1(x) = \frac{(x^2-\beta_1^2)\dots(x^2-\beta_{i_0}^2) \, . \, S(x)}{\left(x^2-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(x^2-\sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\left(x^2-\sin^2\frac{(i_0-1)}{2n}\pi\right)}.$$

En appliquant la formule classique d'interpôlation, le polynome cherché sera égal à

$$f(x) = S_1(x) \cdot \left[\sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i\varrho}{\left(x-\sin\frac{i\pi}{2n}\right) S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i\varrho}{\left(x+\sin\frac{i\pi}{2n}\right) S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho}{xS'_1(0)} + \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\beta_i + (-1)^i\varrho}{(x-\beta_i)S'_1(\beta_i)} + \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\beta_i + (-1)^i\varrho}{(x+\beta_i)S'_1(\beta_i)} \right]. \tag{37}$$

La condition que le degré de $f(x)$ soit inférieur à $2n+2$ conduit à l'équation suivante pour déterminer ϱ

$$2\sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i\varrho}{S'_1\left(\frac{i\pi}{2n}\right)} + 2\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\beta_i + (-1)^i\varrho}{S'_1(\beta_i)} + \frac{\varrho}{S'_1(0)} = 0.$$

D'où

$$2n\varrho = \frac{2\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\beta_i}{S'_1(\beta_i)} + 2\sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n}}{S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}}{-\frac{1}{2nS'_1(0)} - \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(-1)^i}{nS'_1(\beta_i)} + \sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{nS'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}}. \tag{38}$$

Or,

$$S'_1(\beta_i) = 2\beta_i \cdot \frac{(\beta_i^2-\beta_1^2)\cdots(\beta_i^2-\beta_{i_0}^2)}{\left(\beta_i^2-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\beta_i^2-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)} \cdot S(\beta_i),$$

et

$$S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)=2n(-1)^i\frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)},$$

pour $i<n$, et

$$S'_1\left(\sin\frac{n\pi}{2n}\right)=S'_1(1)=4n(-1)^n\cdot\frac{(1-\beta_1^2)\cdots(1-\beta_{i_0}^2)}{\left(1-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(1-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}.$$

Par conséquent, en posant

$$\beta_i=\frac{\lambda_i\pi}{2n},$$

où λ_i seront fixes, et n croîtra indéfiniment (i_0 sera également un nombre fixe), on a

$$\lim nS'_1(\beta_i)=\frac{\lambda_i\pi(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)}{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}\sin\lambda_i\pi.$$

Donc, le numérateur dans la formule (38) a la même limite que la somme

$$\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)\sin\lambda_i\pi}+$$

$$+\sum_{i=i_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)},$$

dont la seconde partie peut être mise d'abord sous la forme

$$\sum_{i=i_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{n\sin\frac{i\pi}{2n}\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n^2\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}.$$

Or, pour n_0 suffisamment grand,

$$\left|\sum_{i=n_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{n\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n^2\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}\right|<$$

$$< \frac{n \sin \frac{n_0 \pi}{2n} \cdot \left(\sin^2 \frac{n_0 \pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{n_0 \pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{n^2 \left(\sin^2 \frac{n_0 \pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{n_0 \pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right)} <$$

$$< \frac{n \sin \frac{n_0 \pi}{2n}}{n^2 \left[\sin^2 \frac{n_0 \pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right]} < \frac{n_0}{n_0^2 - \frac{\lambda_{i_0}^2 \pi^2}{4}},$$

car les termes de cette série alternée vont en diminuant.

D'autre part, après avoir fixé n_0, on voit que la somme

$$\sum_{i=i_0}^{i=n_0-1} (-1)^i \frac{n \cdot \sin \frac{i\pi}{2n} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{n^2 \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right)}$$

tend vers

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i=i_0}^{i=n_0-1} \frac{(-1)^i \cdot i(i^2 - 1) \cdots [i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(i^2 - \lambda_1^2) \cdots (i^2 - \lambda_{i_0}^2)},$$

lorsque n croît indéfiniment.

Par conséquent, le numérateur de la formule (38) a pour limite

$$\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2) \sin \lambda_i \pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=i_0}^{i=\infty} (-1)^i \cdot \frac{i(i^2 - 1) \cdots [i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(i^2 - \lambda_1^2) \cdots (i^2 - \lambda_{i_0}^2)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2) \sin \lambda_i \pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \cdot m(m^2 - 1) \cdots [m^2 - (i_0 - 1)^2]}{(m^2 - \lambda_1^2) \cdots (m^2 - \lambda_{i_0}^2)} = \qquad (39)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2)} \left[\frac{1}{\sin \lambda_i \pi} + \frac{1}{\pi} \cdot f_1(\lambda_i)\right],$$

où

$$f_1(\lambda) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2m \cdot (-1)^m}{m^2 - \lambda^2}. \qquad (40)$$

28. Le dénominateur de l'expression (38) aura la même limite que

$$\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdots (i_0 - 1)}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=i_0} (-1)^i \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{\pi \lambda_i (\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2)} \cdot \frac{1}{\sin \lambda_i \pi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda_{i_0}^2 \pi^2}{4}\right)}.$$

En prenant n_0 suffisamment grand, on peut rendre la somme

$$\sum_{i=n_0}^{i=n} \frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right)\cdots\left(n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda_{i_0}^2\pi^2}{4}\right)} < \sum_{i=n_0}^{i=n} \frac{1}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda_{i_0}^2\pi^2}{4}}$$

aussi petite qu'on le veut.

Donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right)\cdots\left(n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda_{i_0}^2\pi^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{i=i_0}^{i=\infty} \frac{(i^2-1)\cdots[i^2-(i_0-1)^2]}{(i^2-\lambda_1)\cdots(i^2-\lambda_{i_0}^2)} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(i^2-1)\cdots[i^2-(i_0-1)^2]}{(i^2-\lambda_1^2)\cdots(i^2-\lambda_{i_0}^2)}.$$

Par conséquent, le dénominateur de (38) a pour limite

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1\cdot 2\cdots(i_0-1)}{\lambda_1\cdots\lambda_{i_0}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=i_0}(-1)^i\cdot\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{\pi\lambda_i(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)}\cdot\frac{1}{\sin\lambda_i\pi} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(m^2-1)\cdots[m^2-(i_0-1)^2]}{(m^2-\lambda_1^2)\cdots(m^2-\lambda_{i_0}^2)} = \tag{41}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)}\left[\frac{(-1)^{i+1}}{\pi\lambda_i\sin\lambda_i\pi} + \frac{1}{\pi^2}f_2(\lambda_i)\right],$$

où

$$f_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m^2-\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{\pi}{\lambda}\operatorname{cotg}\pi\lambda. \tag{42}$$

Ainsi,

$$\lim_{n=\infty} 2n\varrho = \frac{\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)}\left[\frac{\pi}{\sin\lambda_i\pi} + f_1(\lambda_i)\right]}{\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots[\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2]}\left[\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i\sin\lambda_i\pi} + \frac{1}{\pi}f_2(\lambda_i)\right]}. \tag{43}$$

29. Il convient encore de faire les transformations suivantes. On sait que

$$\frac{\pi}{\sin\pi\lambda} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\lambda^2-m^2}.$$

Donc,

$$\frac{\pi}{\sin \pi \lambda} + f_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda^2 - m^2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2m(-1)^m}{m^2 - \lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda + m} = \frac{1}{\lambda} - 2 \int_0^1 \frac{z^\lambda dz}{1+z} = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda + \frac{1}{2}} F\left(\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

d'après les formules (33) et (40).

D'autre part, posons $\lambda_i = i - 1 + \varepsilon_i$. Dans ces conditions

$$\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i \sin \lambda_i \pi} + \frac{1}{\pi} f_2(\lambda_i) = \frac{1}{(i-1+\varepsilon_i)} \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon_i \pi} + \frac{2}{\pi (i-1+\varepsilon_i)^2} - \frac{1}{(i-1+\varepsilon_i)} \operatorname{cotg} \pi \varepsilon_i =$$

$$= \frac{2}{\pi (i-1+\varepsilon_i)^2} + \frac{1 - \cos \pi \varepsilon_i}{(i-1+\varepsilon_i) \sin \pi \varepsilon_i} = \frac{2}{\pi (i-1+\varepsilon_i)^2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi \varepsilon_i}{2}}{i-1+\varepsilon_i}.$$

Posons enfin

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x^2 - 1) \cdots [x^2 - (i_0 - 1)^2], \\ \psi(x) &= (x^2 - \lambda_1^2) \cdots (x^2 - \lambda_{i_0}^2). \end{aligned} \tag{44}$$

Nous aurons ainsi

$$\lim_{n=\infty} 2n\varrho = \frac{\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi'(\lambda_i)} \left[1 - \frac{2\lambda_i}{\lambda_i + \frac{1}{2}} F\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi'(\lambda_i)} \left[\frac{2}{\pi \lambda_i} + \operatorname{tg} \frac{\pi \varepsilon_i}{2}\right]} = B_{i_0}. \tag{45}$$

D'après le théorème (16), on a

$$E_{2n} \geqq \varrho;$$

donc,

$$2n E_{2n} \geqq B_{i_0} \tag{46}$$

pour $n = \infty$.

30. Il s'agit de déterminer les constantes λ_i de façon à rendre maximum[1] la valeur de B_{i_0}. Ce maximum, qui existe, évidemment, pour chaque valeur de

[1] Nous verrons plus loin que λ_i tend vers $i-1$, et la différence $\lambda_i - (i-1) = \varepsilon_i$ tend vers 0, comme $\frac{1}{i}$.

i_0, et va en croissant avec i_0, tend vers une limite déterminée, pour $i_0 = \infty$. Nous allons montrer plus loin que *cette limite est égale à la limite vers laquelle tend* $2nE_{2n}$. En d'autre termes

$$\lim_{i_0=\infty} \text{Max.}\, B_{i_0} = \lim_{n=\infty} 2nE_{2n}.$$

Or, le maximum de B_{i_0} et sa limite, pour $i_0 = \infty$, peut être calculé par approximations successives convergentes très rapidement.

Posons d'abord $i_0 = 1$. On aura

$$B_1 = \frac{1 - \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{2}{\pi\lambda_1} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi\lambda_1}{2}}.$$

Pour $\lambda_1 = 0{,}4$, on trouve

$$B_1 = \frac{1 - \dfrac{8}{9}\cdot 0{,}419}{\dfrac{5}{3{,}1416} + 0{,}727} = \frac{0{,}628}{2{,}318} = 0{,}2709$$

$$B_1 > 0{,}27.$$

Ainsi,

$$2nE_{2n} > 0{,}27 - \alpha_n,$$

où α_n tend vers 0.

Prenons ensuite $i_0 = 2$. On aura

$$B_2 = \frac{1 - \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{\lambda_1(\lambda_2^2 - 1)}{(1 - \lambda_1^2)}\left[\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{2}{\lambda_2 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_2 + \dfrac{1}{2}\right)\right]}{\dfrac{2}{\pi\lambda_1} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_1(\lambda_2^2 - 1)}{1 - \lambda_1^2}\left[\dfrac{2}{\pi\lambda_2^2} + \dfrac{1}{\lambda_2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varepsilon_2}{2}\right]},$$

où $\lambda_2 = 1 + \varepsilon_2$.

Conservons $\lambda_1 = 0{,}4$ et posons $\lambda_2 = 1{,}14$. Nous aurons

$$B_2 = \frac{0{,}628 + \dfrac{0{,}2996}{2{,}1}\left[\dfrac{1}{1{,}14} - \dfrac{2}{1{,}64}\cdot 0{,}465\right]}{2{,}318 + \dfrac{0{,}2996}{2{,}1}\left[\dfrac{0{,}6366}{1{,}2996} + \dfrac{0{,}216}{1{,}14}\right]} = \frac{0{,}628 + 0{,}0442}{2{,}316 + 0{,}0958} = 0{,}2785.$$

L'erreur totale ne dépasse pas $0{,}0005$. Donc

$$B_2 > 0{,}278.$$

Ainsi

$$2nE_{2n} > 0{,}278.$$

Finalement, nous avons, pour n assez grand,

$$0{,}278 < 2nE_{2n} < 0{,}286. \tag{47}$$

Passons à présent à la démonstration des théorèmes qui montrent que chacune des méthodes que nous venons d'indiquer permet de calculer $2nE_{2n}$ avec une approximation infinie.

31. Théorème. *Le polynome d'approximation de $|x|$ sur le segment* $(-1, +1)$ *admet comme expression asymptotique*

$$G(x) = R(x) + \left(\frac{1}{2n} - E_{2n}\right) T(x) + \frac{\gamma_n(x)}{n}, \tag{48}$$

où $\gamma_n(x)$ tend vers 0, *dès que nx croît indéfiniment.*

La démonstration est assez longue et fait appel a des considérations de nature différente. Il y a lieu de remarquer que notre proposition serait établie, si l'on pouvait démontrer directement que l'une ou l'autre des méthodes employées pour le calcul approché de E_{2n} est capable de fournir une approximation indéfinie pour $2nE_{2n}$. Pour le moment, c'est la marche inverse que j'ai due adopter. Un des lemmes que je me bornerai d'énoncer, en renvoyant pour la démonstration à la page 6 du Mémoire de l'Académie de Belgique, est le suivant.

Lemme. *Si un polynome $P(x)$ de degré n reste, en valeur absolue, inférieur à M sur le segment* $(-1, +1)$, *sa dérivée restera, en valeur absolue, inférieure à* $\dfrac{nM}{\sqrt{1-h^2}}$ *dans l'intervalle* $(-h, +h)$.

32. On se rappelle la formule (15) que l'on peut écrire

$$2n\left[|x| - R(x) - \frac{T(x)}{2n}\right] = \varepsilon_n(x) \,.\, T(x). \tag{15$^{\text{bis}}$}$$

Il est clair que la meilleure approximation $2nE_{2n}$ de $2n|x|$ par un polynome de degré $2n$ est la même que celle de $\varepsilon_n(x) \,.\, T(x)$; et on a la relation

$$P(x) = R(x) + \frac{1}{2n}[T(x) + \Omega(x)] \tag{49}$$

entre le polynome d'approximation $P(x)$ de $|x|$ et le polynome d'approximation $\Omega(x)$ de $\varepsilon_n(x) . T(x)$. Nous voulons trouver une expression asymptotique du polynome $\Omega(x)$. A cet effet, nous prenons un nombre A, aussi grand que l'on veut, et nous introduisons la fonction $\delta_n(x)$ telle que

$$\delta_n(x) = \varepsilon_n(x) . T(x), \text{ pour } |x| < \frac{A}{n}$$

et

$$\delta_n(x) = 0, \text{ pour } |x| \geqq \frac{A}{n}.$$

De cette façon, on a, en supposant α_n aussi petit que l'on veut

$$|\delta_n(x) - \varepsilon_n(x) . T(x)| < \alpha_n.$$

Il est évident que, si $\Omega_1(x)$ est le polynome d'approximation de $\delta_n(x)$, il servira d'expression asymptotique pour $\Omega(x)$. En effet, si k_n est l'écart maximum de $\Omega_1(x)$ par rapport à $\delta_n(x)$, on a la relation

$$|k_n - 2nE_{2n}| < \alpha_n;$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n}{2nE_{2n}} = 1. \tag{50}$$

C'est le polynome

$$\Omega_1(x) = c_0 + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{2n} \tag{51}$$

que nous allons étudier.

L'équation $\Omega_1(x) - \delta_n(x) = 0$, aussi bien que l'équation $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) . T(x) = 0$ a nécessairement, au moins, une racine entre deux points d'écart, (c'est à dire entre deux points où le maximum de $|\Omega_1(x) - \delta_n(x)|$ est atteint). Or l'équation

$$\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) . T(x) = 0 \tag{52}$$

étant de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \cdots + A_{n+1} x^{2n} = 0,$$

ne peut avoir plus de $n + 1$ racines positives. Par conséquent, le nombre de points d'écart sera $n + 2$, et il y en aura un à l'origine. On a ainsi

$$\Omega_1(0) = -1 + k_n. \tag{53}$$

33. Démontrons à présent que $\Omega_1(x)$ *n'admet que des maxima positifs* M *et des minima négatifs* m, *tels que*

$$0{,}5 > M > 0{,}09 \text{ et } -0{,}73 < m < -0{,}09. \tag{54}$$

On voit d'abord que, pour $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$\lim |\varepsilon_n(x) \,.\, T(x)| = |(2F(b) - 1) \,.\, \cos \pi b| < 0{,}18;$$

donc, pour $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$-0{,}18 - k_n < \Omega_1(x) < 0{,}18 + k_n,$$

et entre deux racines de l'équation (52) $\Omega_1(x)$ admet un maximum M ou un minimum m qui satisfont nécessairement aux inégalités:

$$\begin{gathered} 0{,}5 > k_n + 0{,}18 > M > k_n - 0{,}18 > 0{,}09, \\ -0{,}09 > -k_n + 0{,}18 > m > -k_n - 0{,}18 > -0{,}6, \end{gathered} \tag{55}$$

puisque $0{,}3 > k_n > 0{,}27$.

Il faut examiner deux hypothèses. Soit d'abord $\Omega_1(0)$ un minimum. Dans ces conditions, on a constamment[1]

$$\Omega_1(x) > -1 + k_n;$$

et, puisque l'on a d'autre part

$$\varepsilon_n(x) \,.\, T(x) < 0,$$

lorsque $x < \frac{\pi}{4n}$, il en résulte que

$$\Omega_1(x) < k_n + 0{,}18$$

sur tout le segment $(-1, +1)$.

Donc, sur tout le segment

$$|\Omega_1(x) + 0{,}41 - k_n| < 0{,}59. \tag{56}$$

Par conséquent, en vertu du lemme énoncé plus haut on a dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right)$, pour n assez grand,

[1] L'impossibilité d'un minimum absolu différent de $\Omega_1(0)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ sera mise en évidence par le raisonnement qui démontrera l'impossibilité de la seconde hypothèse.

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1{,}18\, n. \tag{57}$$

Si l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ contient à son intérieur au plus un seul point d'écart de $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) . T(x)$, il y aura n points, où $|\Omega_1(x)|$ atteint son maximum en satisfaisant aux inégalités (55); tous les maxima et minima de $\Omega_1(x)$ satisferont donc aux inégalités (54). Il s'agit à présent de voir que le nombre de points d'écart de $|\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)\, T(x)|$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ est inférieur à 2.

En effet, soit $x_0 = \frac{\pi b_0}{2n}$ le premier point d'écart. On aura nécessairement

$$[2F(b_0) - 1] \cos \pi b_0 = \varepsilon_n(x_0) . T(x_0) > -1 + 2k_n > -0{,}444.$$

Mais la fonction

$$[2F(b) - 1] \cos \pi b$$

croît dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$, et on reconnait que, pour $b = 0{,}21$, elle se réduit à $-0{,}446$ (à $0{,}001$ près). Donc, $b_0 > 0{,}21$, ou $x_0 > \frac{0{,}21\pi}{2n}$. D'autre part, si x_1 est le second point d'écart, on a

$$\Omega_1(x_1) - \Omega_1(x_0) > 2k_n > 0{,}556,$$

et puisque

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1{,}18\, n,$$

donc

$$x_1 - x_0 > \frac{0{,}556}{1{,}18\, n} > \frac{0{,}47}{n},$$

d'où, enfin,

$$x_1 > \frac{0{,}47}{n} + \frac{0{,}21\pi}{2n} > \frac{\pi}{4n}.$$

Remarque. Par un raisonnement semblable on reconnaîtra que *la plus petite racine de* $\Omega_1(x) = 0$ *est supérieure à* $\frac{\pi}{4n}$. Cela résultera de l'inégalité

$0{,}27 + [1 - 2F(b)] \cos \pi b > 1{,}18 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi b}{2}\right]$ qui a lieu pour $0 < b < \frac{1}{2}$, comme on le vérifie facilement en utilisant le tableau (24).

Seconde hypothèse: $\Omega_1(0)$ est un maximum négatif. Dans ces conditions, l'équation $\Omega_1(x) = 0$ ne pourrait avoir plus de $(n-1)$ racines positives.

Si la plus petite racine a_1 de $\Omega_1(x) = 0$ était supérieure à $\frac{\pi}{4n}$, il y aurait, d'après ce qui précède, au moins une racine de $\Omega_1 = 0$ entre deux écarts maximum de $|\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) . T(x)|$; il n'y aurait donc que $n-1$ écarts maxima à droite de a_1; il y aurait donc 2 points d'écarts à gauche de a_1 (sans compter 0), et aussi à gauche de $\frac{\pi}{4n}$. De même, si $a_1 < \frac{\pi}{4n}$, il ne peut y avoir plus d'un point d'écart entre deux racines successives de $\Omega_1 = 0$. Donc, il faudrait en tout cas, que, pour $x \leqq \frac{\pi}{4n}$, $x \leqq a_1$, on ait deux points d'ecart (sans compter l'origine). Ainsi, au second point d'écart x_1 on a encore $\Omega_1(x_1) < 0$, d'où

$$\varepsilon_n(x_1) . T(x_1) < -0{,}27.$$

Par conséquent,

$$x_1 < \frac{\pi}{6n}.$$

Soit, d'autre part,

$$m = -1 + k_n - h$$

la valeur du minimum de Ω_1 près de 0. La variation totale de Ω_1, lorsque x varie depuis 0 à x_1 en passant par le point, où Ω_1 est minimum et ensuite par le premier point d'écart x_0, est supérieure à

$$h + 2k_n > h + 0{,}55.$$

Mais on a, comme précédemment, dans le voisinage de l'origine

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < (1{,}18 + h)n, \tag{58}$$

puisque

$$-1 + k_n - h \leqq \Omega_1 < k_n + 0{,}18.$$

De sorte que x_1 satisfait à l'inégalité

$$x_1(1{,}18 + h)n > h + 0{,}55;$$

donc

$$\frac{\pi}{6}(1{,}18 + h) > h + 0{,}55,$$

d'où

$$h < 0{,}15. \tag{59}$$

Par conséquent, au premier point d'écart x_0 on aurait

$$\varepsilon_n(x_0) \,.\, T(x_0) > -1 + 2k_n - h > -1 + 0{,}55 - 0{,}15 = -0{,}6,$$

d'où $x_0 > \frac{\pi}{15n}$, et $x_1 - x_0 < \frac{\pi}{6n} - \frac{\pi}{15n} = \frac{\pi}{10n}$; ce qui est en contradiction avec $x_1 - x_0 > \frac{0{,}55}{1{,}33\, n}$ qui résulte de (58) et (59). L'hypothèse que Ω_1 a un maximum négatif doit donc être rejetée.

Les inégalités (54) sont donc démontrées.

En d'autres termes *le polynome $\Omega_1(x)$ admet $(2n+1)$ maxima et minima sur le segment $(-1, +1)$; et, en outre, tant que $|nx| > A$, ces maxima ou minima sont égaux, en valeur absolue, à k_n, tandis que les autres sont, en valeur absolue, inférieurs à $3k_n$ et supérieurs à $\frac{1}{4}k_n$.*

34. **Les équations**

$$\Omega_1^2(x) - k_n^2 = 0 \tag{60}$$

et

$$\left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 . (x^2 - 1) = 0 \tag{61}$$

dont la seconde a toutes ses racines réelles, auront des racines communes: à savoir, toutes les racines qui, en valeur absolue, sont supérieures à $\frac{A}{n}$. Soient, d'autre part, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$ toutes les racines positives de $\Omega_1(x) = 0$ inférieures ou égales à $\frac{A}{n}$. L'équation (60) aura au moins 2 racines positives (distinctes ou confondues) entre β_i et β_{i+1}, dans le cas où le maximum (ou minimum) de Ω_1 compris entre β_i et β_{i+1} est, en valeur absolue, supérieur ou égal à k_n. Dans le cas, où le maximum ou minimum correspondant est inférieur à k_n, l'équation (60) n'admet plus de racines réelles dans l'intervalle considéré, mais on peut démontrer que

Si l'on construit un trapèze $\beta_i \beta_{i+1} C D$ ayant pour base $\beta_i \beta_{i+1}$ et pour hauteur $\frac{4}{n}$

et dont les cotés lateraux $\beta_i D$ et $\beta_{i+1} C$ forment avec la base des angles intérieurs égaux à $\frac{3\pi}{2}$, il y aura au moins une racine de l'équation (60) *à l'intérieur du trapèze $\beta_i \beta_{i+1} CD$.*

En effet, sur une parallèle quelconque à la base $\beta_i \beta_{i+1}$ il y aura au moins un point, où la partie imaginaire de $\Omega_1(x)$ est nulle, car, si l'on parcourre cette parallèle de droite à gauche depuis le coté $\beta_{i+1} C$ jusqu'au coté $\beta_i D$ on fait varier l'argument de Ω_1 d'une quantité supérieure à π. Par conséquent, la courbe S, où la partie imaginaire de Ω_1 est nulle, passant par le point γ_i, racine de $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$ comprise entre β_i et β_{i+1}, rencontrera chaque parallèle à la base; mais toutes les racines de $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$ étant réelles, la courbe S n'aura pas de points multiples à l'intérieur du trapèze, de sorte que la partie réelle de Ω_1 variera dans le même sens, lorsqu'on suit la courbe S depuis γ_i jusqu'au premier point H d'intersection de S avec CD. Pour reconnaître que l'équation (60) admet une racine à l'intérieur de $\beta_i \beta_{i+1} CD$, il suffira donc de prouver que

$$\mu^2 = \Omega_1^2(H) > k^2_n. \tag{62}$$

A cet effet, prenons le polynome

$$T(x) = \cos 2n \arc \sin x,$$

et désignons par φ son argument pour $x = H$; soit, pour fixer les idées $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Du point H menons une parallèle à $\beta_i D$ qui rencontre l'axe réel en un point E; soit x_0 la plus grande racine de $T(x) = 0$, telle que $x_0 < E$; menons ensuite la droite $x_0 H$ et perpendiculairement à celleci HE', le point E' étant également sur l'axe reel; on pourra alors déterminer entre E' et x_0 un point y_0 tel que l'argument de la fraction

$$\frac{H - y_0}{H - x_0}$$

soit égal à $-\varphi$, son module étant évidemment supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ceci posé, le produit

$$\frac{H - y_0}{H - x_0} \cos 2n \arc \sin H$$

sera réel. Mais, par hypothèse, on a, en supposant $0 < \Theta < 1$,

$$H = \frac{\theta A}{n} + \frac{4i}{n}$$

D'où, aux infiniment petits près,

$$\cos 2n \arcsin H = \cos(2\theta A + 8i) = \frac{1}{2}[(e^8 + e^{-8})\cos 2\theta A + i(e^{-8} - e^8)\sin 2\theta A].$$

Donc,

$$|\cos 2n \arcsin H| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{16} + e^{-16} + 2\cos 4\theta A} \geqq \frac{1}{2}(e^8 - e^{-8}) > \frac{1}{2}(e^8 - 1).$$

Par conséquent, l'équation à coefficients réels,

$$\Omega_1(x) = \frac{\mu''(x - y_0)}{x - x_0}\cos 2n \arcsin x, \tag{63}$$

où

$$\mu'' = \frac{H - x_0}{H - y_0} \cdot \frac{\mu}{\cos 2n \arcsin H} < \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1}\mu,$$

aura une racine complexe égale à H (en supposant, pour fixer les idées, $\Omega_1(H) = \mu$).

Mais ceci exige que l'on ait précisement, comme je l'affirmais,

$$\mu > k_n.$$

En effet, s'il en était autrement, on tirerait de l'inégalité $\mu \leqq k_n$ que

$$\mu'' < \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1}k_n < \frac{k_n}{84}$$

et, dans ces conditions, comme nous le verrons facilement, toutes les racines de l'équation (63) devraient être réelles, de sorte que H n'en serait pas une racine.

En effet, en écrivant

$$\frac{x - y_0}{x - x_0}\cos 2n \arcsin x = \cos 2n \arcsin x + \frac{x_0 - y_0}{x - x_0}\cos 2n \arcsin x,$$

on voit que, pour $-\frac{2A}{n} \leqq x \leqq \frac{2A}{n}$,

$$\left|\frac{x - y_0}{x - x_0}\cos 2n \arcsin x\right| < 1 + 2n(x_0 - y_0) < 1 + 2n\left[\frac{4}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2}{\frac{4}{n} - \frac{\pi}{2n}}\right] <$$

$$< 1 + 2n\left[\frac{8}{n} + \frac{\pi}{2n}\right] < 21,$$

puisque $E - x_0 < \frac{\pi}{2n}$.

Sur le reste du segment $(-1, +1)$, on a $\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\right| < 2$; donc a fortiori

$$\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n \arcsin x\right| < 21.$$

Par conséquent, si $\mu'' < \frac{k_n}{4.21}$, le polynome

$$\Omega_1(x) - \mu'' \cdot \frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n \arcsin x$$

aura le signe de $\Omega_1(x)$ en tous les points, où $\Omega_1(x)$ est maximum ou minimum; toutes les racines de ce polynome seraient réelles.

Ainsi l'équation (60) admet bien une racine à l'intérieur du trapèze $\beta_i\beta_{i+1}CD$.

En construisant le trapèze $\beta_i\beta_{i+1}C'D'$ symétrique à $\beta_i\beta_{i+1}CD$ par rapport à la base $\beta_i\beta_{i+1}$, on en conclut que l'équation (60) admet au moins une paire de racines réelles ou complexes à l'intérieur de la figure $\beta_i D'C'\beta_{i+1}CD$. En ajoutant la racine de (60) comprise entre 0 et β_1 et en remarquant que l'équation (60) est paire, on voit qu'elle n'a pas d'autres racines que celles que nous venons de trouver ainsi que les racines égales et de signe contraire.

35. Il résulte de ce qui précède que l'on doit avoir

$$4n^2[\Omega_1^2(x) - k^2{}_n] = \left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 \cdot (x^2-1)\,Y(x), \tag{64}$$

où

$$Y(x) = \frac{(x^2-\eta_0^2)[x^2-(\beta_1+\eta_1)^2][x^2-(\beta_1+\eta_2)^2]\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\eta_{2k-2})^2]}{x^2[x^2-(\beta_1+\varepsilon_1)^2]^2\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1})^2]^2},$$

avec $|\varepsilon_i| < \beta_{i+1}-\beta_i$ et $|\eta_{2i-1}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1}-\beta_i$, $|\eta_{2i}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1}-\beta_i$.

Par conséquent,

$$Y(x) = \frac{\left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\beta_1+\eta_1}{x}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\eta_{2k-2}}{x}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{\beta_1+\varepsilon_1}{x}\right)^2\right]^2\cdots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}}{x}\right)^2\right]^2} =$$

$$= \left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1+\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}+3\theta_1\left(\frac{\beta_2}{x}\right)^4\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon^2{}_{k-1}-\eta^2{}_{2k-2}}{x^2}+3\theta_{2k-2}\left(\frac{\beta_k}{x}\right)^4\right],$$

où $|\theta_i| < 1$, lorsque $|nx| > 2A$.

Donc

$$Y(x) = 1 + h(1 + \varphi), \tag{65}$$

où

$$|h| < \left|\frac{\eta_0}{x}\right|^2 + \left|\frac{2(\varepsilon_1 - \eta_1)\beta_1 + \varepsilon_1^2 - \eta_1^2}{x^2}\right| + \cdots + \left|\frac{2(\varepsilon_{k-1} - \eta_{2k-2})\beta_{k-1} + \varepsilon^2_{k-1} - \eta^2_{2k-2}}{x^2}\right| + \\ + 6\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{x}\right)^4, \tag{66}$$

φ tendant vers o avec h.

Mais, lorsque x varie de β_i à β_{i+1}, $\Omega_1(x)$ passe par un maximum ou minimum qui, en valeur absolue, dépasse $\frac{1}{4}k_n$, de sorte que la variation totale de $\Omega_1(x)$ dans cet intervalle est supérieure à $\frac{1}{2}k_n > 0{,}13$. Donc, en vertu de l'inégalité (57) qui est valable pourvu que $\frac{A}{n}$ soit assez petit, on a

$$\beta_{i+1} - \beta_i > \frac{0{,}13}{1{,}18\,n} > \frac{1}{10\,n}.$$

On en conclut que

$$|\eta_{2i}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i < 41\,(\beta_{i+1} - \beta_i)$$

et

$$|\eta_{2i-1}| < 41\,(\beta_{i+1} - \beta_i).$$

Donc

$$|h| < \frac{\beta_1^2}{x^2} + \frac{42}{x^2}\left[(\beta_2 - \beta_1)\left(\frac{4}{n} + 6\beta_2\right) + \cdots + (\beta_k - \beta_{k-1})\left(\frac{4}{n} + 6\beta_k\right)\right] + \\ + 60\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{x}\right)^4(\beta_i - \beta_{i-1})n < \frac{336A}{n^2x^2} + \frac{504A^2}{n^2x^2} + \frac{60A^5}{n^4x^4}. \tag{67}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$Y(x) = 1 + 2t\left[\frac{A^2}{n^2x^2} + \frac{A^5}{n^4x^4}\right], \tag{68}$$

où A étant supposé fixe, $|t|$ reste borné (inférieur à 500, par exemple), lorsque nx croît indéfiniment.

Or, de l'équation (64) on tire

$$\frac{d\Omega_1}{2n\sqrt{k_n^2-\Omega_1^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A^2}{n^2x^2}+\frac{A^5}{n^4x^4}\right)\right], \tag{69}$$

l étant borné comme t.

D'où

$$\arccos\frac{\Omega_1(x)}{\pm k_n}=2n\int_x^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A^2}{n^2x^2}+\frac{A^5}{n^4x^4}\right)\right]=$$

$$=2n\arccos x+p\left[\int_x^1\frac{A^2dx}{nx^2\sqrt{1-x^2}}+\int_x^1\frac{A^5dx}{n^3x^4\sqrt{1-x^2}}\right]=$$

$$=2n\arccos x+p\left[\frac{A^2\sqrt{1-x^2}}{nx}+\frac{A^5\sqrt{1-x^2}}{3n^3x^3}(1+2x^2)\right],$$

p étant borné, lorsque nx croît indéfiniment. En supposant n pair, c'est le signe — qu'il faut prendre devant k_n.

Donc,

$$-\Omega_1(x)=k_n\cos[2n\arccos x+\varepsilon_n], \tag{70}$$

où ε_n tend vers o comme $\frac{1}{nx}$, le nombre A étant fixé d'avance aussi grand que l'on veut.

Par conséquent, le polynome d'approximation $P(x)$ a pour expression asymptotique

$$\begin{aligned}G(x)&=R(x)+\frac{1}{2n}\left[\cos 2n\arccos x-k_n\cos(2n\arccos x+\varepsilon_n)\right]=\\&=R(x)+\left(\frac{1}{2n}-\frac{k_n}{2n}\right)\cos 2n\arccos x+\frac{\gamma_n(x)}{n}=\\&=R(x)+\left(\frac{1}{2n}-E_{2n}\right)T(x)+\frac{\gamma_n(x)}{n},\end{aligned} \tag{48}$$

où $\gamma_n(x)$ tend vers o avec $\frac{1}{nx}$. *C.q.f.d.*

Remarque. Les formules (48) subsistent encore pour n impair, pourvu que l'on y pose $T(x)=\cos 2n\arcsin x$.

36. Théorème. *En reprenant les notations du* § 30, *on a* $\lim\limits_{n=\infty} 2nE_{2n}=$ $=\text{Max.}\,B_\infty=\text{Constante}.$

En effet, C étant un nombre suffisamment grand, on aura, aux points $\left|\sin\frac{i\pi}{2n}\right| > \frac{c}{n}$, et aux points $\beta_i \leqq \frac{c}{n}$ d'écart maximum,

$$|x| - G(x) = \pm E_{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

où ε_n est aussi petit qu'on veut, si n croît indéfiniment.

Par conséquent, si on construit le polynome d'approximation de $|x|$ relatif à cette suite de points, comme nous l'avons fait au § 27, on trouvera, en choisissant i_0 assez grand, que la meilleure approximation ϱ en ces points est

$$\varrho = \left(E_{2n} - \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

avec $0 < \varepsilon < \operatorname{Max}|\varepsilon_n|$.

Donc, a fortiori

$$\lim 2n E_{2n} = \operatorname{Max.} B_\infty = \text{Constante.}$$

C. q. f. d.

37. Théorème. *En désignant par δ_i le maximum du module de l'expression de la forme*

$$S(b) = \cos\pi b\left[F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} - \cdots - \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - \left(\frac{2i-1}{2}\right)^2}\right]$$

qui s'écarte le moins de 0, *lorsque* $b \geqq 0$, *on a* $2\lim\limits_{i=\infty}\delta_i = \lim\limits_{n=\infty} 2n E_{2n}$.

En effet, d'après le § 25, on a

$$\lim_{n=\infty}\frac{n\mu_n}{\delta_i} = 1, \tag{71}$$

où μ_n est la meilleure approximation de $|x|$ par un polynome de degré $2n$ de la forme

$$\begin{aligned} Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right] = \\ = R(x) + \frac{T(x)}{2n} + \frac{T(x)}{n}\left[B - \frac{1}{2} + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right], \end{aligned} \tag{34}$$

en posant, comme auparavant $b = \frac{2nx}{\pi}$, et en désignant par $b_1, b_2, \cdots$ les racines successives de l'équation

$$T\left(\frac{\pi b}{2n}\right) = \cos 2n \arcsin \frac{\pi b}{2n} = 0.$$

Le produit

$$Z(x) = T(x)\left[B - \frac{1}{2} + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right]$$

représente un polynome pair arbitraire de degré $2n$ ayant $2n - 2i$ racines égales à $\pm \sin\left(i + h - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}$, pour $h = 1, 2, \cdots n - i$.

Prenons i très grand par rapport au nombre A, dont dépend

$$\Omega_1(x) = -k_n \cos[2n \arcsin x + \varepsilon_n],$$

où ε_n tend vers 0 comme $\frac{1}{nx}$, et déterminons les coefficients de $Z(x)$ par la condition que $Z(x) = 0$ admette les $2i$ plus petites racines de $\Omega_1(x) = 0$, et de plus que $1 - 2B = k_n$. La dernière condition exprime que, pour x très grand $\frac{2Z(x)}{\Omega_1(x)}$ tend vers 1, c'est à dire que les coefficients de x^{2n} au numérateur et au dénominateur sont égaux. Par conséquent, on a

$$\frac{2Z(x)}{\Omega_1(x)} = \\ = \frac{\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[x^2 - \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{1}{2} + \alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{3}{2} + \alpha_{i+1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[x^2 - \sin^2\left(n - \frac{1}{2} + \alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} \tag{72}$$

où α_h est une quantité de l'ordre de $\frac{1}{k}$.

Je dis que, i étant pris assez grand, ce rapport différera aussi peu que l'on veut de 1, lorsque n croîtra indéfiniment, pour $x = \sin\left(\frac{i+h}{2n}\right)\pi$, où h diffère d'un entier positif ou nul de moins que $\varrho < \frac{1}{2}$, ou bien est une quantité négative quelconque. Pour fixer les idées, posons $h = 0$, car on verra sans peine qu'il n'y aura aucun changement essentiel à faire dans le calcul pour les autres valeurs considérées de h. On aura donc

$$\frac{2Z\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}{\Omega_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}=\frac{\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}=$$

$$=\left[1+\frac{\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}}\right].$$

Il suffira par conséquent de montrer que la somme

$$\frac{\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}+\cdots+\frac{\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}}$$

tend vers 0. Or celle-ci tendra vers 0 en même temps que la somme

$$\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{i\pi}{2n}-\sin\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}+\cdots+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{i\pi}{2n}-\sin\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}},$$

donc, en même temps que la somme

$$\frac{\alpha_i}{\frac{1}{2}+\alpha_i}+\frac{\alpha_{i+1}}{\frac{3}{2}+\alpha_{i+1}}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{n-i-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}}.$$

Mais nous avons remarqué qu'on peut fixer un nombre D tel que $\alpha_k<\frac{D}{k}$. Il suffit donc de prouver que la série $\frac{D}{\frac{i}{2}+D}+\frac{D}{\frac{3(i+1)}{2}+D}+\cdots$

ou

$$S=\frac{1}{i}+\frac{1}{3(i+1)}+\frac{1}{5(i+2)}+\cdots$$

prolongée indéfiniment a une somme aussi petite que l'on veut, si i est pris assez grand. Or, ceci est évident, puisque

$$S < \int_0^\infty \frac{dx}{(2x+1)(x+i)} + \frac{1}{i} = \frac{\log 2i}{2i-1} + \frac{1}{i}.$$

Du fait que, pour $h \leqq 0$, $\dfrac{2Z(x)}{\Omega_1(x)}$ diffère infiniment peu de 1, on conclut que

$$n[Q(x) - G(x)] = \varepsilon$$

tend vers 0, lorsque $|x| \leqq \sin\dfrac{i\pi}{2n}$; de sorte que pour ces valeurs de x le rapport du maximum de $|Q(x) - |x||$ au maximum de $|G(x) - |x||$ qui est égal à

$$1 + \frac{\varepsilon}{n.\,\mathrm{Max.}\,|G(x) - |x||}$$

tend vers 1.

D'autre part, dès que nx devient suffisamment grand, $2n(G(x) - |x|)$ diffère infiniment peu de $\Omega_1(x)$, et son maximum sera atteint en des points $\sin\dfrac{b\pi}{2n}$, où b diffère infiniment peu d'un entier positif. En ces points on a, à des infiniment petits près,

$$|2Z(x)| = |\Omega_1(x)| = k_n;$$

et, si x s'écarte de ces points, de sorte que b varie d'une quantité finie, par exemple, supérieure à $\dfrac{1}{4}$, on pourra indiquer un nombre fixe $\theta < 1$, tel que (aux infiniment petits près)

$$|2Z(x)| = |\Omega_1(x)| < \theta k_n.$$

On en conclut que $|2Z(x)|$ a aussi un maximum égal à k_n pour b infiniment voisin d'un entier positif. Puisque entre deux racines de $Z(x)$, il n'existe qu'un seul maximum de $|Z(x)|$, le maximum de $2|Z(x)|$ dans ces intervalles est égal à k_n; c'est à dire que dans ces intervalles également le rapport du maximum de $|Q(x) - |x||$ à celui de $|G(x) - |x||$ tend vers 1. Donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{2n\mu_n}{k_n} = 1,$$

et, en tenant compte de (71), on a finalement

$$2 \lim_{i=\infty} \delta_i = \lim_{n=\infty} k_n = \lim_{n=\infty} 2n\ E_{2n}$$

Les deux derniers théorèmes montrent respectivement que les méthodes que nous avons suivies, soit pour déterminer une borne supérieure (§§ 25—26) de $2nE_{2n}$, soit pour en donner une borne inférieure (§§ 27—30), permettent de calculer $\lim\limits_{n=\infty} 2nE_{2n}$ avec une approximation infinie par défaut, comme par excès.

38. *Généralisations.* Je voudrais, en terminant, faire observer que l'étude particulière de la meilleure approximation de $|x|$ faite dans ce Mémoire est susceptible d'importantes généralisations.[1]

En ce reportant au § 15, on voit d'abord que les méthodes employées peuvent, sans modifications essentielles, être appliquées à l'étude de la meilleure approximation $E_{2n}[x^a]$ de x^a par un polynome pair de degré $2n$ sur le segment o 1. On devra trouver, en particulier, que *le produit* $(2n)^a \cdot E_{2n}[x^a]$ *tend vers une limite parfaitement déterminée* $\lambda(a)$, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Mais on peut généraliser de plusieures manières le théorème 15.

Nous dirons que le polynome

$$P(x) = A_0 + A_1 x^{a_1} + \cdots + A_k x^{a_k} + \cdots + A_{k+n} x^{a_{k+n}}$$

est un polynome oscillateur *d'ordre* $(k+n)$ et de *genre* k, s'il possède $(n+1)$ extrema égaux et de signes alternés dans l'intervalle o 1.

Ceci posé, voilà un théorème, dont la démonstration est pareille à celle du théorème (15):

Si $Q(x) = B_0 + B_1 x_{a_1} + \cdots + B_{k+n} x^{a_{k+n}}$ *est le polynome oscillateur d'ordre* $(k+n)$ *et de genre* o, *il ne peut y avoir plus d'un point d'écart maximum* b_i *du polynome* $P(x)$ *de même ordre et de genre différent de* o *entre deux points d'écart* β_i *et* β_{i+1} *de* $Q(x)$; *d'ailleurs, si* P *a un point d'écart confondu avec un point d'écart* β_i *de* Q, *il n'en aura pas d'autres dans les intervalles* $\beta_i \beta_{i+1}$ *et* $\beta_i \beta_{i-1}$.

On en déduit immédiatement que, *si le rapport* $\frac{k}{n+k}$ *du genre d'un polynome oscillateur à son ordre tend vers* o, *on a*

$$\lim_{n=\infty} (\beta_i - b_i) = 0$$

Ainsi, en particulier, dans le cas, où $a_i = i$, on a

$$\lim_{n=\infty} b_i = \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1 - \cos \frac{i\pi}{n}}{2} \cdot \tag{73}$$

[1] Il serait très intéressant de rechercher, si la limite de $2nE_{2n}$ est une transcendante nouvelle, ou bien s'exprime au moyen des transcendantes connues. Sans résoudre cette question, je signalerai, comme une coïncidence curieuse, que l'on a aussi $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0{,}282$ (à 0,0005 près).

Nous pouvons en tirer la conséquence suivante:

Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété qu'à une infinité de valeurs de n on peut faire correspondre des nombres k tels que les rapports $\frac{k}{n}$ et $\frac{E_{n+k}[f(x)]}{E_n[f(x)]}$ tendent vers o, *les polynomes d'approximation de $f(x)$ de ces degrés n auront des expressions asymptotiques, dont les points d'écart b_i satisferont à la condition*

$$\lim b_i = \lim \frac{1 - \cos \frac{i\pi}{n}}{2}.$$

En particulier, *toutes les fonctions analytiques* (régulières sur le segment o 1) *jouissent de cette propriété.*[1]

En effet, soit π_{n+k} le polynome d'approximation de $f(x)$ de degré $(n+k)$, et soit π'_n le polynome d'approximation de degré n de π_{n+k}, on voit que

$$|f(x) - \pi'_n(x)| \leqq E_n[f(x)] + 2E_{n+k}[f(x)];$$

la condition que $\frac{E_{n+k}}{E_n}$ tend vers o, exprime donc que $\pi'_n(x)$ est une expression asymptotique du polynome d'approximation de degré n de $f(x)$. Mais

$$\pi_{n+k} - \pi'_n$$

sera un polynome oscillateur d'ordre $n+k$ et de genre k, dont les points d'écart jouiront de la propriété indiquée, puisque $\frac{k}{n}$ tend vers o.

Pour voir que toutes les fonctions analytiques satisfont à la condition du théorème, rappellons que pour toute fonction analytique on peut indiquer un nombre $\varrho < 1$, tel que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{E_n} \leqq \varrho.$$

Il existera donc une infinité de valeurs de n tels que, si petit que soit ε, on ait

$$\frac{E_{n+k}}{E_n} \leqq (\varrho + \varepsilon)^k;$$

de sorte que ce rapport pourra tendre vers o en même temps que $\frac{k}{n}$. *c. q. f. d.*

Les fonctions analytiques ne sont pas les seules pour lesquelles la distribution asymptotique des points d'écart des polynomes d'approximation satisfait à la condition (73).

[1] Voir ma Note des Comptes Rendus, 26 novembre, 1912 »Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques».