

# STUDIO SUL PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE DI LIE.

Nota di **Carlo Severini** (Catania).

Adunanza dell'8 dicembre 1907.

La seconda parte del primo teorema fondamentale di LIE <sup>1)</sup> assegna come condizioni sufficienti, affinchè un insieme  $\infty^r$  di trasformazioni:

$$(1) \quad x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

costituisca un gruppo, le seguenti:

a) Che le  $x'$ ; quali funzioni dei parametri, soddisfino ad equazioni della forma:

$$(2) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

in cui il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$  non è identicamente nullo, e le  $\xi_{\rho h}(x')$  non soddisfano a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

coi coefficienti  $g_{\rho}$  indipendenti dalle  $x'$  e non tutti nulli;

b) Che all'insieme appartenga la trasformazione identica, corrispondente a valori dei parametri, che non annullino il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ .

Di queste due condizioni la seconda non può essere anche necessaria, giacchè esistono, come è noto, gruppi finiti, continui, privi della trasformazione identica <sup>3)</sup>, e, quando si ammetta di questa l'esistenza, non si può dire che essa corrisponda a valori dei parametri, che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ ; l'altra è poi da sola in ogni caso soltanto necessaria, ciò che costituisce la prima parte del teorema dianzi citato.

Nella presente Nota io mi propongo d'indicare quali condizioni si devono aggiungere a quest'ultima, per modo che le condizioni risultanti, necessarie sempre, siano anche

<sup>1)</sup> LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, III. Abschnitt, Abth. VI. (Leipzig, Teubner, 1893).

<sup>2)</sup> Scriviamo per brevità  $f_i(x, a)$  invece di  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r)$ , ed analoghe notazioni adotteremo, secondo l'uso, in casi analoghi.

Intenderemo sempre di riferirci a funzioni analitiche, monodrome.

<sup>3)</sup> LIE-ENGEL, l. c., I, p. 165.

sufficienti, ove l'insieme dato contenga la trasformazione identica. Il risultato, a cui perverrò, che in quest'ultimo caso risolve completamente la questione, comprende in particolare quello sopra detto di LIE.

1. Una condizione, che necessariamente deve essere soddisfatta, se le (1) costituiscono un gruppo, è che la trasformazione composta:

$$(3) \quad x''_i = f_i[f(x, a), b] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

con due qualsivogliano:

$$(4) \quad \begin{cases} x'_i = f_i(x, a) \\ x''_i = f_i(x', b) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

delle trasformazioni (1), contenga soltanto  $r$  parametri essenziali.

A tal'uopo è intanto necessario, come ben si sa, che le  $x'$ , quali funzioni dei parametri, soddisfino ad equazioni della forma delle (2), colle proprietà indicate per le  $\psi_{\rho k}(a)$  e per le  $\xi_{\rho h}(x')$ . Inoltre la (3) potrà scriversi:

$$(5) \quad x''_i = g_i(x, c) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove le  $c$  sono funzioni delle  $a$  e delle  $b$ :

$$(6) \quad c_k = \theta_k(a, b) \quad (k = 1, 2, \dots, r);$$

ed è ben noto che le (6) possono risolversi sia rispetto alle  $a$ , sia rispetto alle  $b$ , perchè se teniamo fisse ad es. le  $a$ , e facciamo variare le  $b$ , le trasformazioni (5) corrispondenti percorrono, non altrimenti che le seconde delle (4), un insieme  $\infty^r$ , il che ci dice che le  $c$  sono indipendenti rispetto alle  $b$ , e il determinante funzionale  $\frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial(b_1, b_2, \dots, b_r)}$  delle  $\theta$  rispetto alle  $b$  è diverso da zero. In modo analogo si prova che è diverso da zero l'altro determinante funzionale  $\frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial(a_1, a_2, \dots, a_r)}$  delle  $\theta$  rispetto alle  $a$ .

Se ne ricava che è possibile, essendo dato un sistema di valori  $a^{(0)}$  dei parametri, soddisfare alle equazioni:

$$\theta_k(a, b) = \theta_k(a^{(0)}, a^{(0)}) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

sia assegnando le  $a$  e calcolando le  $b$ , sia assegnando le  $b$  e calcolando le  $a$ ; ovvero, ciò che è lo stesso, indicando simbolicamente con  $S_a$  la trasformazione rappresentata dalle (1), che si può soddisfare all'equazione:

$$(7) \quad S_a S_b = S_{a^{(0)}},$$

sia assegnando la  $S_a$  e calcolando la  $S_b$ , sia viceversa assegnando la  $S_b$  e calcolando la  $S_a$ .

La (7) può anche scriversi:

$$(8) \quad S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = S_{a^{(0)}} S_b^{-1}.$$

Ammettiamo ora che le  $a^{(0)}$  siano prefissate in modo, che per esse non si annulli il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ , e poniamo:

$$(9) \quad S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = E_a,$$

donde per la (8):

$$S_{a^{(0)}} S_b^{-1} = E_a$$

ed anche:

$$(10) \quad S_b = E_a^{-1} S_{a^{(0)}}.$$

Le formole effettive delle trasformazioni (9), se con:

$$x_i = F_i(x', a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

s'indicano quelle delle trasformazioni inverse delle (1), sono le seguenti:

$$x'_i = f_i[F(x, a^{(0)}), a] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e le  $x'$ , che se ne deducono, come funzioni dei parametri, soddisfano ancora alle equazioni (2). Inoltre fra le (9) è contenuta la trasformazione identica, corrispondente ai valori  $a^{(0)}$  dei parametri, che per ipotesi non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ . In base al primo teorema fondamentale di LIE, che in principio abbiamo ricordato, possiamo pertanto concludere che le (9) costituiscono un gruppo. Questo essendo a coppie di trasformazioni inverse, la  $E_a^{-1}$  è ancora una trasformazione di esso, e, posto:

$$E_a^{-1} = E_{a'},$$

segue perciò dalla (10):

$$S_b = E_{a'} S_{a^{(0)}}.$$

Questa relazione e la (9) ci dicono che l'insieme dato di trasformazioni coincide con ciascuno dei due insiemi:

$$(11) \quad S_{a^{(0)}} E_a, \quad E_a S_{a^{(0)}}.$$

Se con  $a$  ed  $\bar{a}$  indichiamo i parametri, che in questi due insiemi rispettivamente determinano una medesima trasformazione, potremo scrivere:

$$S_{a^{(0)}} E_a = E_{\bar{a}} S_{a^{(0)}},$$

ove, conviene notare, date le  $a$  restano determinate le  $\bar{a}$ , e viceversa.

Dalla precedente uguaglianza segue:

$$E_a = S_{a^{(0)}}^{-1} E_{\bar{a}} S_{a^{(0)}},$$

e per la (9):

$$(12) \quad S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = S_{a^{(0)}}^{-1} S_{\bar{a}}^{-1} S_{\bar{a}} S_{a^{(0)}},$$

donde in ultimo:

$$(13) \quad S_a = S_{a^{(0)}}^{-1} S_{\bar{a}} S_{a^{(0)}}.$$

Ben si comprende che in generale ciò ha luogo soltanto quando si considerino la  $S_a$  e la  $S_{\bar{a}}$  in certi intorno di  $S_{a^{(0)}}$ , ai quali noi, senza troppo dilungarci, abbiamo inteso riferirci. Questa avvertenza converrà avere nel seguito del lavoro, ove le considerazioni che saranno svolte, e le conseguenze che se ne deriveranno, s'intenderanno sempre relative a campi convenienti, i quali potranno anche, in casi determinati, estendersi a tutto il campo di validità delle  $f_i(x, a)$ .

Noi arriviamo così ad un'altra condizione necessaria, perchè la trasformazione composta con due qualsivogliano dell'insieme dato contenga soltanto  $r$  parametri essenziali; e tale condizione è che, essendo  $S_{a^{(0)}}$  una trasformazione, corrispondente a valori dei parametri, che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ , l'insieme medesimo venga, per mezzo della  $S_{a^{(0)}}$ , trasformato in sè stesso.

È facile vedere che le due precedenti condizioni sono anche sufficienti. Se partiamo

infatti dalla (13) e risaliamo, otteniamo ancora, che all'insieme dato competono le due rappresentazioni, simbolicamente indicate mediante le (11).

La trasformazione composta con due qualsivogliano di esso:

$$S_a = S_{a(0)} E_a, \quad S_b = E_b S_{a(0)}$$

si può allora scrivere:

$$S_a S_b = S_{a(0)} E_a E_b S_{a(0)},$$

ed i parametri essenziali, da cui essa dipende, sono gli  $r$  parametri essenziali, da cui dipende la trasformazione  $E_a E_b$ .

Dopo ciò possiamo enunciare il seguente teorema:

Se l'insieme dato  $\infty^r$  di trasformazioni:

$$(1) \quad x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

è tale che la trasformazione composta con due qualsivogliano di esso contiene soltanto  $r$  parametri essenziali:

a) le  $x'$ , come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni della forma:

$$(2) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

in cui il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$  non è identicamente nullo, e le  $\xi_{\rho h}(x')$  non possono soddisfare a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

coi coefficienti  $g_{\rho}$  indipendenti dalle  $x'$  e non tutti nulli;

b) essendo  $S_{a(0)}$  una trasformazione, corrispondente a valori dei parametri che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ , l'insieme dato viene, per mezzo della  $S_{a(0)}$ , trasformato in sè stesso.

Viceversa se le  $x'$ , come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni del tipo (2), ed esiste una trasformazione  $S_{a(0)}$ , che gode delle proprietà ora dette, la trasformazione, composta con due qualsivogliano delle (1), contiene soltanto  $r$  parametri essenziali.

2. Profittando di quanto abbiamo stabilito nel § precedente, possiamo ora facilmente giungere al risultato, a cui in principio abbiamo accennato, che generalizza il primo teorema fondamentale di LIE. Tenendo infatti presente che un insieme  $\infty^r$  di trasformazioni, il quale contenga la trasformazione identica, allora e solo allora costituisce un gruppo, quando la trasformazione composta con due qualsivogliano di esso contiene soltanto  $r$  parametri essenziali <sup>4)</sup>, è ben chiaro che possiamo senz'altro enunciare il seguente teorema:

Se l'insieme dato  $\infty^r$  di trasformazioni:

$$x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

costituisce un gruppo:

<sup>4)</sup> LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* (Leipzig, Teubner, 1893), p. 391, Satz 4.

a) le  $x'$ , come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{p-r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

in cui il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$  non è identicamente nullo, e le  $\xi_{\rho h}(x')$  non possono soddisfare a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{p-r} g_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

coi coefficienti  $g_{\rho}$  indipendenti dalle  $x'$  e non tutti nulli;

b) essendo  $S_{a^{(0)}}$  una trasformazione, corrispondente a valori dei parametri che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ , l'insieme dato viene, per mezzo della  $S_{a^{(0)}}$ , trasformato in sè stesso.

Viceversa, se le  $x'$ , come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni del tipo (2), se all'insieme appartiene una trasformazione, come  $S_{a^{(0)}}$ , che gode delle proprietà ora dette, e se finalmente, per valori dei parametri, che sono all'interno del campo, in cui le precedenti condizioni sono soddisfatte e di quello, nel quale le  $S_{a^{(0)}}^{-1} S_a$  costituiscono un gruppo, esiste fra le (1) la trasformazione identica, queste formano esse pure un gruppo.

OSSERVAZIONE. — Le due ultime condizioni si trovano in particolare soddisfatte, se la trasformazione identica corrisponde a valori dei parametri, che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ ; è il caso contemplato dal primo teorema fondamentale di LIE.

3. Se ammettiamo che l'insieme dato contenga la trasformazione identica, e nell'intorno di questa <sup>5)</sup> costituisca un gruppo, esistono trasformazioni, che ad esso appartengono insieme colle loro inverse, e che corrispondono a valori dei parametri, pei quali il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$  è diverso da zero <sup>6)</sup>. Tutte le condizioni, considerate nella seconda parte del precedente teorema, si trovano allora, come è evidente, soddisfatte, e possiamo quindi enunciare quest'altro risultato:

Se l'insieme dato  $\infty'$  di trasformazioni:

$$x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

contiene la trasformazione identica, affinchè (nell'intorno di questa) costituisca un gruppo, è necessario e sufficiente:

a) che le  $x'$ , come funzioni dei parametri, soddisfino ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{p-r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

<sup>5)</sup> S'intende che i parametri della trasformazione identica siano all'interno del campo, in cui la proprietà grupale ha luogo.

<sup>6)</sup> Che in un intorno della trasformazione identica le trasformazioni del gruppo siano a due a due inverse si può vedere ad es. mediante l'equazione simbolica:

$$S_a S_b = S_{a_1}^2,$$

alla quale è possibile soddisfare sia assegnando la  $S_a$  e calcolando la  $S_b$ , sia, inversamente, assegnando la  $S_b$  e calcolando la  $S_a$ , quando in essa si faccia  $S_{a_1} = 1$ .

in cui il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$  non è identicamente nullo, e le  $\xi_{\rho k}(x')$  non possono soddisfare a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

coi coefficienti  $g_{\rho}$  indipendenti dalle  $x'$  e non tutti nulli;

b) che esista una trasformazione  $S_{a(a)}$ , corrispondente a valori dei parametri che non annullano il determinante delle  $\psi_{\rho k}(a)$ , per mezzo della quale l'insieme dato venga trasformato in sè stesso;

c) che la trasformazione identica corrisponda a valori dei parametri, che sono all'interno del campo, in cui le precedenti condizioni sono soddisfatte, e di quello nel quale le  $S_a^{-1} S_a$  costituiscono un gruppo.

Catania, settembre 1907.

CARLO SEVERINI.