

Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen.

Von

M. NOETHER in Erlangen.

Im Folgenden gebe ich eine ausführliche Bearbeitung der von mir in den Sitzungsberichten der Erlanger physicalisch-medicinischen Societät, Hefte 16 (1883/4) und 18 (1886) veröffentlichten Noten über die algebraischen Differentialausdrücke *einer* Variablen und über das Jacobi'sche Umkehrproblem. Dieselbe schliesst eng an die im Wintersemester 1885/6 in einer Vorlesung über Abel'sche Functionen vorgetragenen Entwicklungen an. Ein erster Theil beschäftigt sich mit den Differentialausdrücken, ein zweiter mit den Integralen und ihrer Umkehrung, wobei ich Angabe von Standpunkt und Ziel der Betrachtungen jedem dieser Theile als Einleitung vorausschicke.

Erster Theil.

Die Abel'schen Differentialausdrücke.

Der erste Theil ist als *rein algebraischer* aufzufassen; obwohl er unmittelbar die Reduction aller zu einer Grundcurve gehörigen Integrale algebraischer Differentialausdrücke auf eine Summe von Normalintegralen der drei Gattungen, alle Darstellungen von algebraischen Functionen durch solche Integrale etc. leistet, hat er doch die besondere und wesentliche Eigenschaft, nur mit *algebraischen* Ausdrücken und Mitteln zu arbeiten, und zwar nur mit solchen, welche zugleich den *Charakter der Invarianz* in Bezug auf das ganze Gebiet der rationalen Transformationen haben, denen man die Grundcurve unterwerfen kann. Unsere scheinbar an einer bestimmten ebenen Curve $f=0$ ausgesprochenen Betrachtungen und Formeln gelten also ohne Weiteres für die ganze Classe von algebraischen Gebilden, welcher $f=0$ angehört. Das Hauptmittel zur Erreichung dieses Zweckes ist die Erweiterung des durch das invariante System der *Formen* φ seit lange

eingeführten *Formenbegriffs*: ich führe die „*algebraischen Formen eines Punktes von $f = 0$* “ — homogene Ausdrücke $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension in den Coordinaten eines Punktes der Curve m^{ter} Ordnung $f = 0$, die rational-gebrochen und zu f adjungirt sind — *in die Theorie ein, als gleichberechtigt mit den algebraischen zu $f = 0$ gehörigen Functionen*. Diese Formen sind, aus dem System der φ abgeleitet, die Ausdrücke $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}}$, wie die Functionen die Gestalt $\frac{\Phi^{(\mu)}}{\Phi'(\mu)}$ haben, wo $\Phi^{(\mu)}$ eine ganze Function μ^{ter} Dimension der p Formen φ ist. Durch einfache Multiplication mit einem und demselben, ebenfalls invarianten Factor, der Differentialform

$$d\omega_x \left(= \frac{(cx \, dx)}{f_0(x)} \quad \text{für} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0 \right),$$

gehen aus den Relationen für die Formen die für die Integranden hervor. Bei dieser Auffassung fallen alle durch Auszeichnung einzelner Variablen, also auch Nichthomogenität, hervorgebrachten Besonderheiten einfach weg, indem alle Modificationen jedes speciellen Falles in der allgemeinen Behandlung schon mitbegriffen sind.

Die Festlegung der Normalform 3^{ter} Gattung geschieht (§ 6) wesentlich nach Clebsch-Gordan (Abel'sche Functionen, § 6); nur dass ich noch p willkürliche feste Punkte a_i von $f = 0$ benutze. Von dem so *algebraisch* normirten Ausdruck habe ich nun bemerkt, dass er die Differenz zweier, je nur von einem der beiden Parameter abhängigen Formen 3^{ter} Gattung wird. Diese Eigenschaft erlaubt, zwei wichtige Aufgaben zu lösen: 1) *die Aufstellung der einfachsten algebraischen Functionen* des Punktes x der Curve, wie derer, welche in $p + 1$ gegebenen Punkten je zu ∞^1 werden (§ 8); 2) die allgemeinste Erledigung des Problems, *alle Formen 2^{ter} Gattung* (bez. Integrale 3^{ter} Gattung) *algebraisch aufzustellen, welche Vertauschung von Argument und Parameter zulassen* (§ 9). Herr Cayley hat auf diese letztere Aufgabe in Bd. V (p. 137) des American. Journ. of. Math. hingewiesen; aber das hiernach von mir aufgenommene Problem findet sich schon in einer Formel von Hrn. Weierstrass, und zwar für die hyperelliptischen Functionen in dessen Programmschrift des Braunsberger Gymnasiums 1849, allgemein in dessen Vorlesungen über Abel'sche Functionen*), gelöst. Mit diesen Resultaten des Herrn Weierstrass stimmen meine Formeln im Wesentlichen überein; mein Ausgangspunkt und meine algebraischen Beweismittel sind indess — von der Einführung der oben genannten p Punkte a_i abgesehen — völlig verschiedene.

*) Dieselben wurden mir durch eine Nachschrift nach den ersten beiden Noten über die Differentialausdrücke und vor der Note über das Umkehrproblem zugänglich.

Die Vertauschungsformel bietet ein bequemes Mittel, die früher (§§ 2—5) behandelte Formenreduction wirklich auszuführen (§ 10) und die algebraischen Functionen und ihren Logarithmus durch eine Summe von Integralen 2^{ter}, bez. 3^{ter}, Gattung auszudrücken, oder vielmehr deren Ableitung durch eine Summe von Formen (§ 11).

Inhalt des I. Theils:

- § 1. Differentialform $d\omega_x$. Algebraische Formen.
- § 2. Classification der algebraischen Formen.
- § 3. Reduction der algebr. Formen auf die Normalformen des § 2.
- § 4. Reduction der Formen $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ auf die Normalformen.
- § 5. Einführung von p bestimmten Formen 2^{ter} Gattung in die Reductionsformeln.
- § 6. Algebr. Festlegung und Eigenschaften der Normalform 3^{ter} Gattung. Residuensatz.
- § 7. Festlegung und Eigenschaften der Normalformen 2^{ter} Gattung.
- § 8. Die Normalform 3^{ter} Gattung als Function der Parameter. Aufstellung der einfachsten algebr. Functionen.
- § 9. Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei den Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung. Kanonische Formen 2^{ter} Gattung.
- § 10. Darstellung von algebr. Formen.
- § 11. Darstellung von $D_x \lg \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ und von $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$.
- § 12. Die Sätze von §§ 9—11 bei Einführung von corresidualen Gruppen von je $p+1$ Punkten.

§ 1.

Differentialform $d\omega_x$. Algebraische Formen.

1. Die zu Grunde gelegte algebraische Curve sei f , mit der Gleichung:

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

von der Ordnung m und dem Geschlecht p . Die zugehörigen Integralen haben die Gestalt

$$d\omega = \frac{M}{N} \cdot \frac{(cx \, dx)}{\sum c_i f_i(x)},$$

wobei M und N ganze homogene Functionen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes x sind und zwar M von einer um $m-3$ höheren Dimension als N . Dabei sind Ausdrücke wie (abc) für die Determinante

$\sum \pm a_1 b_2 c_3$ gesetzt, und

$$\sum c_i f_i(x) \equiv \sum_i c_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv f_c(x)$$

bedeutet die Polare von c in Bezug auf f . Für die beiden Factoren von dw führe ich besondere Bezeichnungen ein: den allen dw gemeinsamen, von den c unabhängigen, Factor

$$\frac{(cx dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

bezeichne ich als *Differentialform* $d\omega_x$ *) von f ; den veränderlichen Factor

$$\frac{dw}{d\omega_x} = \frac{M(x)}{N(x)}$$

als *algebraische* (zu f gehörige) *Form* von x .

2. Zur Rechnung mit diesen homogenen Größen ist Folgendes zu bemerken:

Sei

$$X = \frac{\chi}{\psi}$$

der Quotient zweier homogenen rationalen ganzen Functionen r -ter Dimension in x_1, x_2, x_3 , ψ und χ , also eine *algebraische Function* von x ; so wird, indem man die c durch die Unterdeterminanten aus den ersten Differentialquotienten von ψ und χ ersetzt, für $d\omega_x$ erhalten:

$$\begin{aligned} d\omega_x &= \frac{r(\psi d\chi - \chi d\psi)}{(f\psi\chi)} = \frac{r\psi^2 dX}{(f\psi\chi)} = \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot dX}{(\alpha X f)} \\ &= \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot \psi dX}{\sum \pm \alpha_i f_i (\psi_i X - x_i)}, \quad (\text{unabhängig von den } \alpha). \end{aligned}$$

Umgekehrt führe ich, wie $\frac{dw}{d\omega_x}$, für jede homogene Function 0-ter Dimension der Coordinaten, X , die *Differentialableitung*

$$D_x X = \frac{dX}{d\omega_x} = \frac{\sum X_i dx_i}{d\omega_x}, \quad \text{wobei } \sum f_i dx_i = 0,$$

ein. Dieselbe wird eine, von den dx unabhängige, *algebraische Form* von f , wenn X eine *algebraische Function* $\frac{\chi}{\psi}$ war; und zwar ist:

$$D_x X = \frac{(\alpha X f)}{\sum \alpha_i x_i} = \frac{1}{r} \frac{(f\psi\chi)}{\psi^2}.$$

Auch für irgend eine ganze homogene Function $N(x)$ der Coordinaten, die an einer Stelle $x = \xi$ verschwindet, wird an dieser Stelle $x = \xi$:

$$D_x N = \frac{dN}{d\omega_x} = \frac{(\alpha N f)}{\sum \alpha_i x_i}$$

von den α und dx unabhängig.

*) S. Cayley in American J. of Math., Bd. V.

3. In Betreff der Factoren $\frac{M}{N}$ von du nehme ich zunächst an — was mittels eindeutiger Transformation von f immer zu erreichen ist —, dass keiner der Unendlichkeitspunkte von

$$du = \frac{M}{N} \cdot \frac{(cx dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

in den von den c unabhängigen 0-Punkten von $f = 0$, $\sum c_i f_i(x) = 0$ liege. Dann muss $\frac{M}{N}$ in diesen vielfachen Punkten von f sich jedenfalls „zu f adjungirt“ verhalten; wenn also N durch einen κ -fachen Punkt von f nicht hindurchgeht, muss M diesen Punkt zum $(\kappa - 1)$ -fachen Punkt besitzen.

Nimmt man nun die Gesammtheit der Curven N von allen möglichen Ordnungen κ , und je die Gesammtheit aller zu f adjungirten Curven M von der $(\kappa + m - 3)^{\text{te}}$ Ordnung, so erhält man in $\frac{M}{N}$ alle existirenden algebraischen Formen von f ; und zwar nicht nur die der obigen Annahme entsprechenden wirklich adjungirten Formen $\frac{M}{N}$, sondern auch als *specielle Unterschaaren* der adjungirten Formen die in *nichtadjungirter* Gestalt geschriebenen Formen, indem ja von den Curven N ein Theil seine Schnittpunkte mit f in vielfachen Punkten von f haben wird:

die allgemeinsten algebraischen Formen von f sind zu f adjungirte Formen.

Unter den vielen Gestalten, welche man einem solchen Ausdruck $\frac{M}{N}$ vermöge $f = 0$ geben kann, hebe ich eine hervor. Seien

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)$$

p linear unabhängige zu f adjungirte „Curven φ “, von der $(\kappa - 3)^{\text{te}}$ Dimension in x_1, x_2, x_3 ; und sei unter

$$\Phi^{(\mu)}(x)$$

eine ganze Function μ^{te} Dimension von $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ verstanden. Legt man diese Curve $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$, indem man μ genügend gross annimmt, durch alle diejenigen Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ von $N = 0$, $f = 0$, in welchen M , von den durch die Adjunctionsbedingung von M hervorgebrachten 0-Punkten abgesehen, *nicht* verschwindet, so existirt eine Relation der Art*)

$$\Phi^{(\mu)}(x) \cdot M = \Phi^{(\mu+1)}(x) \cdot N + A \cdot f,$$

*) S. meinen Aufsatz: Invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Ann. XVII, p. 203. Der hyperelliptische Fall von f verlangt dabei gesonderte Betrachtung.

bedeutet die Polare von c in Bezug auf f . Für die beiden Factoren von du führe ich besondere Bezeichnungen ein: den allen du gemeinsamen, von den c unabhängigen, Factor

$$\frac{(cx dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

bezeichne ich als *Differentialform* $d\omega_x$ *) von f ; den veränderlichen Factor

$$\frac{du}{d\omega_x} = \frac{M(x)}{N(x)}$$

als *algebraische* (zu f gehörige) *Form* von x .

2. Zur Rechnung mit diesen homogenen Grössen ist Folgendes zu bemerken:

Sei

$$X = \frac{\chi}{\psi}$$

der Quotient zweier homogenen rationalen ganzen Functionen r^{ter} Dimension in x_1, x_2, x_3, ψ und χ , also eine *algebraische Function* von x ; so wird, indem man die c durch die Unterdeterminanten aus den ersten Differentialquotienten von ψ und χ ersetzt, für $d\omega_x$ erhalten:

$$\begin{aligned} d\omega_x &= \frac{r(\psi d\chi - \chi d\psi)}{(f\psi\chi)} = \frac{r\psi^2 dX}{(f\psi\chi)} = \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot dX}{(\alpha X f)} \\ &= \frac{\sum \alpha_i x_i \cdot \psi dX}{\sum \pm \alpha_i f_i (\psi x_i - \chi_i)}, \quad (\text{unabhängig von den } \alpha). \end{aligned}$$

Umgekehrt führe ich, wie $\frac{du}{d\omega_x}$, für jede homogene Function 0^{ter} Dimension der Coordinaten, X , die *Differentialableitung*

$$D_x X = \frac{dX}{d\omega_x} = \frac{\sum X_i dx_i}{d\omega_x}, \quad \text{wobei} \quad \sum f_i dx_i = 0,$$

ein. Dieselbe wird eine, von den dx unabhängige, algebraische *Form* von f , wenn X eine algebraische *Function* $\frac{\chi}{\psi}$ war; und zwar ist:

$$D_x X = \frac{(\alpha X f)}{\sum \alpha_i x_i} = \frac{1}{r} \frac{(f\psi\chi)}{\psi^2}.$$

Auch für irgend eine ganze homogene Function $N(x)$ der Coordinaten, die an einer Stelle $x = \xi$ verschwindet, wird an dieser Stelle $x = \xi$:

$$D_x N = \frac{dN}{d\omega_x} = \frac{(\alpha N f)}{\sum \alpha_i x_i}$$

von den α und dx unabhängig.

*) S. Cayley in American J. of Math., Bd. V.

3. In Betreff der Factoren $\frac{M}{N}$ von du nehme ich zunächst an — was mittels eindeutiger Transformation von f immer zu erreichen ist —, dass keiner der Unendlichkeitspunkte von

$$du = \frac{M}{N} \cdot \frac{(cx \, dx)}{\sum c_i f_i(x)}$$

in den von den c unabhängigen 0-Punkten von $f = 0$, $\sum c_i f_i(x) = 0$ liege. Dann muss $\frac{M}{N}$ in diesen vielfachen Punkten von f sich jedenfalls „zu f adjungirt“ verhalten; wenn also N durch einen κ -fachen Punkt von f nicht hindurchgeht, muss M diesen Punkt zum $(\kappa - 1)$ -fachen Punkt besitzen.

Nimmt man nun die Gesammtheit der Curven N von allen möglichen Ordnungen n , und je die Gesammtheit aller zu f adjungirten Curven M von der $(n + m - 3)^{\text{ten}}$ Ordnung, so erhält man in $\frac{M}{N}$ alle existirenden algebraischen Formen von f ; und zwar nicht nur die der obigen Annahme entsprechenden wirklich adjungirten Formen $\frac{M}{N}$, sondern auch als *specielle Unterschaaren* der adjungirten Formen die in *nichtadjungirter* Gestalt geschriebenen Formen, indem ja von den Curven N ein Theil seine Schnittpunkte mit f in vielfachen Punkten von f haben wird:

die allgemeinsten algebraischen Formen von f sind zu f adjungirte Formen.

Unter den vielen Gestalten, welche man einem solchen Ausdruck $\frac{M}{N}$ vermöge $f = 0$ geben kann, hebe ich eine hervor. Seien

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)$$

p linear unabhängige zu f adjungirte „Curven φ “, von der $(m - 3)^{\text{ten}}$ Dimension in x_1, x_2, x_3 ; und sei unter

$$\Phi^{(\mu)}(x)$$

eine ganze Function μ^{ter} Dimension von $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ verstanden. Legt man diese Curve $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$, indem man μ genügend gross annimmt, durch alle diejenigen Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ von $N = 0$, $f = 0$, in welchen M , von den durch die Adjunctionsbedingung von M hervorgebrachten 0-Punkten abgesehen, *nicht* verschwindet, so existirt eine Relation der Art*)

$$\Phi^{(\mu)}(x) \cdot M = \Phi^{(\mu+1)}(x) \cdot N + A \cdot f,$$

*) S. meinen Aufsatz: Invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Ann. XVII, p. 263. Der hyperelliptische Fall von f verlangt dabei gesonderte Betrachtung.

wo $\Phi^{(\mu+1)}(x)$ eine ganze Function $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Dimension der $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ wird. Vermöge $f=0$ wird also

$$\frac{M}{N} = \frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)}.$$

Ist, umgekehrt, $\frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)}$ gegeben, so treffen $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ und $\Phi^{(\mu+1)}(x) = 0$ die Grundcurve f in bez. $\mu(2p-2)$ und $(\mu+1)(2p-2)$, von den vielfachen Punkten von f selbst verschiedenen, Punkten; unter den ersteren seien

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s,$$

diejenigen, welche nicht zu den letzteren gehören. Legt man dann durch diese Punkte ξ eine ganz beliebige Curve $N=0$, so existirt wiederum eine Relation der obigen Gestalt, die nun M als von f adjungirte Curve bestimmt. Für die algebraische Form ist dadurch die frühere Gestalt $\frac{M}{N}$ wiedergefunden.

4. Die beiden Factoren von

$$du = \frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)} \cdot d\omega_x$$

haben für sich Covarianteneigenschaft bei beliebiger eindeutiger Transformation von $f=0$ in eine neue Curve $f'=0$.

Denn sei

$$x_i = \vartheta_i(y_1, y_2, y_3), \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die ϑ_i ganze rationale Functionen s^{ter} Ordnung der y sind, und sei

$$\sum \pm \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y_2} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y_3} = (\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3),$$

$$f(x) = A(y) \cdot f'(y),$$

wo $f'(y) = 0$ die transformirte Curve; so wird*)

$$d\omega_x = \frac{(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3)}{s \cdot A(y)} \cdot d'\omega_y,$$

$$\frac{\Phi^{(\mu+1)}(x)}{\Phi^{(\mu)}(x)} = \frac{s \cdot A(y)}{(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3)} \cdot \frac{\Phi'^{(\mu+1)}(y)}{\Phi'^{(\mu)}(y)},$$

wo

$$d'\omega_y = \frac{(y dy)}{\sum_h x_h \frac{\partial f'(y)}{\partial y_h}},$$

und wo die $\Phi'^{(v)}(y)$ ganze Functionen v^{ter} Dimension der y zu $f'(y) = 0$ gehörigen Formen $\varphi'(y)$ sind.

*) S. meinen Aufsatz „Rat. Ausführung der Operationen etc.“, § 31, (Math. Ann. XXIII).

Es giebt keine Formen, die nur in einem Punkte von f zu ∞^1 , und sonst nicht, unendlich werden.

Denn man lege eine Gerade N_1 durch diesen Punkt, durch den Restschnitt von $N_1 = 0$ mit $f = 0$, der aus $m - 1$ Punkten besteht, aber alle adj. Curven $(m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, M_{m-2} , so müssen unsere Formen sich in die Gestalt

$$\frac{M_{m-2}}{N_1}$$

setzen lassen. Aber es wird, wegen der Ordnung von M_{m-2} :

$$M_{m-2} = N_1 \cdot \varphi,$$

d. h. unsere Formen werden zu Formen φ , also gar nicht unendlich.

Wegen seines Gebrauchs im Folgenden werde ich diesen Satz als den *Reductionssatz für algebraische Formen* bezeichnen: es ist übrigens im Wesentlichen derselbe Satz, wie ein bekannter Satz für algebraische Functionen*), den man nur auf $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)} \cdot \varphi}$, statt auf $\frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}}$, bezieht.

Dass er das algebraische Aequivalent des sogen. „Residuensatzes“ ist, wird sich später zeigen (§ 6, Nr. 8).

3. Nach Nr. 2 wird man als *Normalformen* einführen:

a) die p linear von einander unabhängigen Formen *erster Gattung*, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, die für *keinen* Punkt von f zu unendlich werden;

b) die Formen *zweiter Gattung*, von denen jede in nur *einem* Punkte, aber in einer Ordnung ν zu ∞ wird, wo ν eine ganze Zahl > 1 ist;

c) die Formen *dritter Gattung*, von denen jede in nur *zwei* endlich von einander verschiedenen Punkten von f je zu ∞^1 wird.

4. *Bildung* dieser Normalformen:

a) Zur Bildung von p Normalformen erster Gattung denke ich mir p Punkte

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

von $f = 0$ fest gegeben, nur der Bedingung genügend, dass sie auf keiner Curve φ liegen, d. h. dass

$$A \equiv \sum \pm \varphi_1(a_1) \varphi_2(a_2) \dots \varphi_p(a_p) \neq 0,$$

*) „Die algebraischen Functionen, welche höchstens in einer gegebenen Gruppe von $s + 1$ Punkten ξ, ξ_1, \dots, ξ_s je zu ∞^1 werden sollen, haben dann, und nur dann, die Eigenschaft, in ξ alle nicht zu ∞ zu werden, wenn es eine Curve φ giebt, welche durch $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, aber nicht durch ξ , geht“. (S. meine Note: Beweis und Erweiterung eines algebr.-functionenth. Satzes des Hrn. Weierstrass, Cr. J. Bd. 97). Ich pflege diesen Satz als *Reductionssatz für algebraische Functionen* zu bezeichnen.

im Uebrigen beliebig gelegen. Die Normalformen

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$$

wähle ich dann so, dass

$$\Phi_i(a_i) = 1, \quad \Phi_i(a_x) = 0, \quad \left(i, x = 1, \dots, p \right).$$

Also ist:

$$\Phi_i(x) = \sum_1^p \frac{A_{i,k}}{A} \varphi_k(x),$$

wo $A_{i,k}$ der Factor von $\varphi_k(a_i)$ in A ist; und für irgend eine Form $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi(a_i) \Phi_i(x).$$

b) Für eine Form 2^{ter} Gattung sei ξ der eine Unendlichkeitspunkt ν ^{ter} Ordnung ($\nu > 1$). Man lege eine Curve $N = 0$, n ^{ter} Ordnung, die f in ξ ν -punktig treffe; durch die weiteren $n + m - \nu$ Schnittpunkte von $N = 0$ mit $f = 0$ geht dann eine Schaar von zu f adjungirten Curven $M = 0$, von der $n + m - 3$ ^{ten} Ordnung, welche f in Gruppen von je $2p - 2 + \nu$ Punkten treffen. Die Mannigfaltigkeit dieser Schaar $M = 0$ wird also in allen Fällen *) zu $\infty^{p-2+\nu}$.

Diese Gruppen enthalten keinen festen (allen Gruppen gemeinsamen) Punkt; denn der übrige Theil der Gruppen, von je $2p - 3 + \nu$ Punkten, würde, wegen $\nu > 1$, nur eine $\infty^{p-2+\nu}$ -Schaar, statt einer $\infty^{p-2+\nu}$ -Schaar, bilden. Insbesondere verschwinden also nicht alle Curven $M = 0$ von selbst für den Punkt ξ . Oder für $\frac{M}{N}$:

Es existiren $p - 1 + \nu$ linear von einander unabhängige Formen 2^{ter} Gattung, welche in einem gegebenen Punkte ξ von f in der ν ^{ten} ($\nu > 1$) Ordnung wirklich unendlich werden.

Schreibt man also $M = 0$ noch vor, $f = 0$ in ξ μ -punktig zu treffen, so liefert dies, für $\mu \leq \nu - 2$, genau μ unabhängige Bedingungen, und man erhält dann in $\frac{M}{N}$ eine $\infty^{p-2+\nu-\mu}$ -Schaar von Formen 2^{ter} Gattung, die in ξ zu $\infty^{\nu-\mu}$ werden. Für $\mu = \nu - 1$ kommt man aber auf eine ∞^{p-1} -Schaar von Formen, die in ξ zu ∞^1 werden sollten, also, nach Nr. 2, in ξ gar nicht unendlich werden, d. h. Formen φ von f sind. Man kann daher die Gesammtheit der Formen 2^{ter} Gattung, ν ^{ter} Ordnung in ξ , linear zusammensetzen aus irgend $\nu - 1$ Formen, die in ξ je wirklich in der Ordnung

$$\nu, \nu - 1, \nu - 2, \dots, 2$$

zu unendlich werden, und aus den p Formen erster Gattung. Solche

*) S. Brill und Noether. Math. Ann. VII.

$\nu - 1$ Normalformen werden späterhin vollständig normirt werden; hier seien irgendwelche bestimmte der genannten Art bezeichnet mit

$$A_{\xi}^{(\kappa)}(x) = \frac{M_{\xi}^{(\kappa)}}{N_{\xi}^{(\kappa)}} \quad (\kappa = \nu - 1, \nu - 2, \dots, 1),$$

wo $A_{\xi}^{(\kappa)}(x)$ als Form von x im Punkte ξ in der Ordnung $\kappa + 1$ zu ∞ werde. Man hat dann

$$\frac{M}{N} = \alpha_{\nu-1} A_{\xi}^{(\nu-1)}(x) + \alpha_{\nu-2} A_{\xi}^{(\nu-2)}(x) + \dots + \alpha_1 A_{\xi}^{(1)}(x) + \sum_1^p \beta_i \Phi_i(x),$$

wo die $\alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu-2}, \dots, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ willkürliche Parameter sind.

c) Für eine Form dritter Gattung seien ξ und η die beiden, endlich verschiedenen, Unendlichkeitspunkte erster Ordnung. Man lege etwa eine Gerade $N_1 = 0$ durch ξ und η ; durch die weiteren $m-2$ Schnittpunkte von $N_1 = 0, f = 0$ aber die Gesamtheit der zu f adjungirten Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, M_{m-2} , welche f noch in einer Schaar von Gruppen von je $2p$ Punkten treffen, mit der Mannigfaltigkeit ∞^p .

Die so entstehende Schaar von Formen $\frac{M_{m-2}}{N_1}$ kann man also linear zusammensetzen aus irgend einer dieser Formen, welche wirklich für ξ und η zu ∞^1 wird, und aus den p Formen φ . Jene eine Form kann zunächst beliebig, nur von den φ verschieden, gewählt werden; eine a) entsprechende passende weitere Normirung wird aber erreicht, wenn man der Form, welche unter ihren $2p$ Nullpunkten p beliebige hat, vorschreibt, die Punkte a_1, a_2, \dots, a_p von Nr. 4, a) zu Nullpunkten zu haben. Eine solche, bis auf einen von x unabhängigen Factor festgelegte, Form sei bezeichnet mit

$$P_{\xi\eta}(x) \equiv \frac{M_{\xi\eta}}{N_{\xi\eta}}.$$

Man hat dann

$$\frac{M_{m-2}}{N_1} = \beta P_{\xi\eta}(x) + \sum_1^p \beta_i \Phi_i(x)$$

mit den Parametern $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$.

§ 3.

Reduction der algebraischen Formen auf die Normalformen des § 2.

1. Sei eine beliebige algebraische Form von f

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

vorgelegt, welche die Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

zu Unendlichkeitspunkten hat, bez. von den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s.$$

Man betrachte zunächst diejenigen dieser Punkte, deren Ordnungszahlen > 1 sind; und zwar successiv. Sei etwa $\nu_1 > 1$; so bilde man für den Punkt ξ_1 zuerst die $\nu_1 - 1$ Normalformen 2^{ter} Gattung des § 2, Nr. 4, b).

In

$$\frac{M(x)}{N(x)} - \gamma_{1, \nu_1-1} \cdot A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)}(x)$$

lässt sich der Zahlencoefficient γ_{1, ν_1-1} so bestimmen, dass diese Form in ξ_1 von niedrigerer als ν_1 ter Ordnung zu ∞ , in den übrigen Punkten ξ_h noch immer zu bez. ∞^{ν_h} wird.

Denn diese Form wird zu

$$\frac{M \cdot N_{\xi}^{(\nu_1-1)} - \gamma_{1, \nu_1-1} N \cdot M_{\xi}^{(\nu_1-1)}}{N \cdot N_{\xi}^{(\nu_1-1)}};$$

wenn also der Zähler dieser Form bei beliebigem γ_{1, ν_1-1} in ξ_1 etwa ϱ -fach verschwindet, für $f=0$, so braucht man γ_{1, ν_1-1} nur die eine Bedingung aufzulegen, den Zähler in ξ_1 $(\varrho+1)$ -fach verschwinden zu machen, wobei γ_{1, ν_1-1} weder 0 noch ∞ wird. Dann wird die Form in ξ_1 in niedrigerer, als der ν_1 ten, Ordnung unendlich, während sich die Ordnung in den übrigen Punkten ξ nicht ändert, wo das hinzugefügte A überhaupt endlich ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt also

$$\frac{M}{N} = \gamma_{1, \nu_1-1} A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)} + \gamma_{1, \nu_1-2} A_{\xi_1}^{(\nu_1-2)} + \dots + \gamma_{1,1} A_{\xi_1}^{(1)} + \frac{M'}{N'},$$

wo $\frac{M'}{N'}$ eine Form ist, welche in ξ_1 höchstens von der 1^{ten} Ordnung zu ∞ , in ξ_2, \dots, ξ_s je zu $\infty^{\nu_2}, \dots, \infty^{\nu_s}$ wird, wie $\frac{M}{N}$; und wo die Zahlen $\gamma_{1, \nu_1-2}, \dots, \gamma_{1,1}$ ebenfalls endlich sind, aber auch 0 sein können.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die übrigen Punkte ξ_2, \dots, ξ_s successiv an, so ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &= \gamma_{1, \nu_1-1} A_{\xi_1}^{(\nu_1-1)} + \dots + \gamma_{1,1} A_{\xi_1}^{(1)} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \gamma_{s, \nu_s-1} A_{\xi_s}^{(\nu_s-1)} + \dots + \gamma_{s,1} A_{\xi_s}^{(1)} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}, \end{aligned}$$

wo $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ eine Form ist, welche in den Punkten ξ_1, \dots, ξ_s höchstens je zu ∞^1 , in keinen weiteren Punkten zu ∞ wird. Von den weiteren Coefficienten $\gamma_{h, \nu}$, die alle endlich sind, können irgend welche $= 0$ sein.

2. Seien

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

diejenigen der s Punkte ξ_h für welche $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ wirklich je zu ∞^1 wird. Man nehme einen ganz willkürlichen Punkt η von f hinzu und bilde die Normalformen des § 2, 4. c), die in η und je einem dieser Punkte ξ zu ∞^1 werden:

$$P_{\xi_h \eta} = \frac{M_{\xi_h \eta}}{N_{\xi_h \eta}}.$$

Dann lässt sich die Constante γ_1 so bestimmen, dass

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} - \gamma_1 P_{\xi_1 \eta}$$

in ξ_2, \dots, ξ_r zu ∞^1 wie $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, in η zu ∞^1 , in ξ_1 nicht mehr ∞ wird.

Denn hierzu ist wieder nur nöthig, der Curve

$$\mathfrak{M} \cdot N_{\xi_1 \eta} - \gamma_1 \cdot \mathfrak{N} \cdot M_{\xi_1 \eta} = 0$$

die eine Bedingung aufzulegen, $f = 0$ im Punkte ξ_1 in einem weiteren successiven Punkte zu treffen, als dieses bei willkürlichem γ_1 geschieht. Dadurch bestimmt sich γ_1 als endliche, von 0 verschiedene Grösse.

Somit ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \gamma_1 P_{\xi_1 \eta} + \gamma_2 P_{\xi_2 \eta} + \dots + \gamma_r P_{\xi_r \eta} + \Psi,$$

wö alle γ_h endliche von 0 verschiedene Grössen werden. Die Form Ψ aber könnte nur höchstens noch im Punkte η , und in diesem nur zu ∞^1 werden; ist also in Wirklichkeit, nach dem Reductionssatze, § 2, 2., eine lineare Verbindung der p Formen φ :

$$\Psi = \varphi^{(1)}.$$

Man hat hiernach eine Reduction der gegebenen Form $\frac{M}{N}$ auf

eine Summe von höchstens $\sum_1^s (\nu_h - 1)$ Formen 2^{ter} Gattung, s Formen 3^{ter} Gattung und p Formen 1^{ter} Gattung.

3. Das Resultat der Reduction ist, bei Zugrundelegung desselben Systems von Normalformen 2^{ter}, 3^{ter} und 1^{ter} Gattung, unabhängig von der Anordnung des Verfahrens. Ferner werden die Coefficienten γ_h der Normalformen 3^{ter} Gattung unabhängig von der Wahl der Normalformen 2^{ter} und 3^{ter} Gattung und unabhängig vom Hilfspunkt η .

Was zunächst die Eindeutigkeit der Reduction betrifft, so kann

zwischen den $\sum_1^s (\nu_h - 1)$ Normalformen 2^{ter}, s Normalformen 3^{ter} und p Normalformen 1^{ter} Gattung keine lineare Relation bestehen. Denn

da für jede Ordnung des Unendlichwerdens dabei nur *ein* Glied vorhanden ist, müssen in einer solchen Relation die Coefficienten der Formen 2^{ter} und 3^{ter} Gattung jeder für sich zu 0 werden; die Formen φ sind aber linear-unabhängig.

Legt man ferner statt der Normalformen 2^{ter} Gattung $A_{\xi}^{(\nu-1)}$ andere solche, $A_{\xi}'^{(\nu-1)}$, zu Grunde, so kann man diese, nach § 2, 4. b), durch die $A_{\xi}^{(\nu-1)}, \dots, A_{\xi}^{(1)}$ und die Formen φ allein ausdrücken. Die Coefficienten γ_h der Normalformen 3^{ter} Gattung $P_{\xi_h \eta}$ in der Reduction von $\frac{M}{N}$ ändern sich also dadurch nicht.

Dass die Reductionscoefficienten der Normalformen 2^{ter} Gattung von der Wahl des Punktes η unabhängig sind, ist nach der Entwicklung von Nr. 1 selbstverständlich.

§ 4.

Reduction der Formen $D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ auf die Normalformen.

Ich mache eine Anwendung der Reduction des § 3 auf die Form

$$D_x \frac{\chi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2},$$

welche die Differentialableitung des Quotienten der beiden algebraischen ganzen Functionen r ter Dimension in $x_1, x_2, x_3, \psi(x)$ und $\chi(x)$, ist (§ 1, 2.).

Die algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$ möge in den Punkten

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

wo $f = 0$ bez. in den Ordnungen

$$\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \dots, \nu_s - 1$$

unendlich werden, in keinem weiteren Punkte von f zu ∞ ; die algebraische Form $D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$ wird dann in diesen, und nur in diesen, Punkten unendlich, bez. in den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s.$$

Nach § 3 kann man nun diese Form in eine Summe von Normalformen der drei Gattungen entwickeln.

In dieser Entwicklung fallen aber die Normalformen 3^{ter} Gattung aus.

Man erkennt dies am einfachsten, wenn man beachtet, dass Formen dritter Gattung durch Differentiation nur aus logarithmisch unendlich werdenden Functionen entstehen können, was bei $\frac{\chi}{\psi}$ nicht vorkommt. Aber diese Thatsache lässt sich auch rein algebraisch einsehen.

welche im Punkte ξ von f zu ∞^{v-1} , in den p Punkten a_1, a_2, \dots, a_p je zu ∞^1 werden soll. Eine solche, in ξ wirklich in der angegebenen Ordnung unendlich werdende Function existirt nach dem „Reductionsatz für algebraische Functionen“ immer, da a_1, a_2, \dots, a_p nicht auf einer Curve φ liegen. Also wird nach § 4:

$$D_x \frac{\chi_1}{\psi_1} = \kappa_{v-1} A_\xi^{(v-1)} + \kappa_{v-2} A_\xi^{(v-2)} + \dots + \kappa_1 A_\xi^{(1)} \\ + \sum_1^p \lambda_i A_{a_i}^{(1)} + \sum_1^p \mu_i \varphi_i,$$

worin $\kappa_{v-1} \neq 0$. Mittels dieser Formel drücke man $A_\xi^{(v-1)}$ aus durch

$$D_x \frac{\chi_1}{\psi_1}, A_\xi^{(v-2)}, \dots, A_\xi^{(1)}, A_{a_i}^{(1)}, \varphi_i \quad (i=1, \dots, p).$$

Verfährt man dann ebenso successiv mit $A_\xi^{(v-2)}, \dots, A_\xi^{(1)}$, unter Einführung neuer algebraischer Functionen $\frac{\chi_2}{\psi_2}, \dots, \frac{\chi_{v-1}}{\psi_{v-1}}$, so erhält man eine Reduction:

$$A_\xi^{(v-1)} = D_x \frac{\chi}{\psi} + \sum_1^p \alpha_i A_{a_i}^{(1)} + \Phi^{(1)};$$

d. h.

Die auf beliebige Punkte ξ bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung lassen sich ersetzen: durch das D_x einer algebraischen Function, eine Summe von auf p feste Punkte a_1, \dots, a_p bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung 1^{ter} Ordnung und eine Form $\Phi^{(1)}$. Auch diese Reduction ist eine eindeutige.

Der letzte Umstand folgt daraus, dass es keine algebraische Function giebt, welche nur in a_1, a_2, \dots, a_p zu ∞^1 wird.

Die wirkliche Darstellung der Reduction der Formen $A_\xi^{(v-1)}$ findet sich später (§ 10) ausgeführt.

Hiernach lässt sich jede gegebene algebraische Form $\frac{M}{N}$ eindeutig reduciren auf die Differentialableitung D_x einer algebraischen Function, auf eine Summe von auf p feste Punkte a_1, \dots, a_p bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung 1^{ter} Ordnung, auf eine Summe von Formen dritter Gattung, die sich nur auf die Unendlichkeitspunkte von $\frac{M}{N}$ beziehen, (identisch mit dem bezüglichen Theil der Reduction des § 3, 2), und auf eine Form $\Phi^{(1)}$.

2. Die in Nr. 1 bezeichnete Reduction der gegebenen Form $\frac{M}{N}$ kann auch an $\frac{M}{N}$ direct durchgeführt werden.

$\frac{M}{N}$ möge, wie in § 3, in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ bez. zu $\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \dots, \infty^{\nu_s}$ werden, Man bestimme dann die allgemeinste algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$, welche in diesen Punkten bez. in den Ordnungen

$$\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \dots, \nu_s - 1$$

wirklich zu unendlich und ausserdem höchstens in den Punkten a_1, a_2, \dots, a_p je zu ∞^1 werde. Diese Function existirt immer (Reductionssatz für Functionen) und enthält, von einer additiven Constanten abgesehen,

noch genau $\sum_1^s (\nu_h - 1)$ linear und homogen in χ eingehende willkürliche Parameter. (Math. Ann. VII).

Dieselben Parameter gehen dann in derselben Weise in

$$D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$$

ein. Man bestimme diese Parameter so, dass die Form

$$\frac{M}{N} - \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi^2}$$

in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ höchstens in 1^{ter} Ordnung unendlich werde, was, nach Nr. 1, die Parameter eindeutig festlegt. Diese Form kann dann, nach § 3, in eine Summe von Formen 3^{ter} Gattung, die sich auf ξ_1, \dots, ξ_s beziehen, von p Formen 2^{ter} Gattung, die sich auf a_1, \dots, a_p beziehen, und von den p Formen 1^{ter} Gattung entwickelt werden.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn $\frac{M}{N}$ gegeben ist, bei der Bildung dieser Function $\frac{\chi}{\psi}$ keine weiteren Irrationalitäten eingehen, als die symmetrischen Functionen der p festgewählten Punkte a_1, a_2, \dots, a_p .

§ 6.

Algebraische Festlegung und Eigenschaften der Normalform dritter Gattung. Residuensatz.

1. Die Normalform $\frac{M_{\xi\eta}}{N_{\xi\eta}}$ von Nr. 4, c des § 2 soll nun endgültig festgelegt und berechnet werden. *)

Für $N_{\xi\eta}$ werde der lineare Ausdruck $(x \xi \eta)$ genommen, für $M_{\xi\eta}$ ein zu f adjungirter Ausdruck

$$\Omega_{\xi\eta}(x)$$

*) Nach Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, § 6.

und dazu die p Gleichungen für die p Punkte a_1, \dots, a_p :

$$0 = \lambda_1 \Omega^{(1)}(a_\kappa) + \dots + \lambda_{m-1} \Omega^{(m-1)}(a_\kappa) + (a_\kappa \xi \eta) \sum_1^p \mu_i \varphi_i(a_\kappa),$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots, p).$$

Die Determinante dieser $m + p - 1$ Gleichungen wird:

$$\Delta = \sum \pm \Omega^{(1)}(\xi) \Omega^{(2)}(\xi) \dots \Omega^{(m-1)}(\eta) \times \sum \pm \varphi_1(a_1) \varphi_2(a_2) \dots \varphi_p(a_p)$$

$$\times (a_1 \xi \eta) (a_2 \xi \eta) \dots (a_p \xi \eta)$$

und für $\Omega_{\xi\eta}(x)$ selbst ergibt sich:

$$\Omega_{\xi\eta}(x) = - \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{(1)}(x) & \dots & \Omega^{(m-1)}(x) & (x \xi \eta) \varphi_1(x) & \dots & (x \xi \eta) \varphi_p(x) \\ f_\eta(\xi) & \Omega^{(1)}(\xi) & \dots & \Omega^{(m-1)}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ f_{\eta^2}(\xi) & \Omega^{(1)}(\xi) & \dots & \Omega^{(m-1)}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_\xi(\eta) & \Omega^{(1)}(\eta) & \dots & \Omega^{(m-1)}(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega^{(1)}(a_1) & \dots & \Omega^{(m-1)}(a_1) & (a_1 \xi \eta) \varphi_1(a_1) & \dots & (a_1 \xi \eta) \varphi_p(a_1) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \Omega^{(1)}(a_p) & \dots & \Omega^{(m-1)}(a_p) & (a_p \xi \eta) \varphi_1(a_p) & \dots & (a_p \xi \eta) \varphi_p(a_p) \end{vmatrix}$$

3. In dieser Darstellung von

$$P_{\xi\eta}(x; a_1 \dots a_p) = \frac{\Omega_{\xi\eta}(x)}{(x \xi \eta)}$$

sind x , sowie ξ , η , als veränderliche Grössen gedacht. Für den speciellen Werth $\xi = a_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \dots, p$) wird diese Form von x aber unabhängig von x zu unendlich, wegen des Factors $(a_\kappa \xi \eta)$ von Δ ; stellt also gar nicht mehr eine Form von x vor, welche nur für $x = a_\kappa$ und η zu ∞^1 wird; in diesem Falle benutze ich eine Form

$$P_{a_\kappa \eta}(x; a_1, \dots, a_{\kappa-1}, a'_\kappa, a_{\kappa+1}, \dots, a_p),$$

wo a'_κ verschieden ist von a_κ und nicht mit $a_1, \dots, a_{\kappa-1}, a_{\kappa+1}, \dots, a_p$ auf einer φ liegt. Analog für $\eta = a_\kappa$.

Wenn ferner ξ und η so liegen, dass einer der weiteren $m - 2$ Schnittpunkte der Geraden $(x \xi \eta) = 0$ mit einem a_κ zusammenfällt, so wird in der obigen Determinantendarstellung $\Omega_{\xi\eta}(x)$ zu $\frac{0}{0}$, hat aber hierbei eine bestimmte Bedeutung, die sich in Nr. 6 dieses Paragraphen ohne Weiteres ergeben wird. Andere Unbestimmtheiten von $\Omega_{\xi\eta}(x)$ kommen aber nicht vor, da man wegen der Willkürlichkeit der $\Omega^{(k)}(x)$ nicht anzunehmen braucht, dass $\sum \pm \Omega^{(1)}(\xi) \dots \Omega^{(m-1)}(\eta)$ verschwindet, und da nach Voraussetzung von § 2, Nr. 4, c. ξ von η verschieden ist.

4. Es sind nun die wesentlichen Eigenschaften unserer Normalform dritter Gattung zu untersuchen; zuerst *die Art des Unendlichwerdens für $x = \xi$* .

Rückt x in die Nähe von ξ , so wird

$$P_{\xi\eta}(x) = \frac{f_{\eta}(\xi)}{(x\xi\eta)},$$

ein Ausdruck, der bei Annäherung von x an ξ von den η unabhängig wird (wie bei $d\omega_x$). Es folgt daraus noch, dass, wenn auch ξ und η so liegen sollten, dass $f_{\eta}(\xi) = 0$ ist, $P_{\xi\eta}(x)$ doch für $x = \xi$ in bestimmter Weise unendlich wird, wie $\frac{f_{\xi}(\xi)}{(x\xi\xi)}$, wo ξ beliebig.

Rückt x an η heran, so wird

$$P_{\xi\eta}(x) = \frac{f_{\xi}(\eta)}{(x\xi\eta)},$$

unabhängig von den ξ .

Für $x = \xi$ wird ferner

$$P_{\xi\eta}(x) d\omega_x = -\frac{(c\xi dx)}{(c\xi x)} = -d \log (c\xi x),$$

für $x = \eta$:

$$P_{\xi\eta}(x) d\omega_x = \frac{(c\eta dx)}{(c\eta x)} = -d \log (c\eta x),$$

Ausdrücke, die ebenfalls unabhängig von den c sind.

5. *Beziehung zwischen drei Normalformen dritter Gattung.* Nimmt man irgend einen dritten Punkt ξ von f an, so lässt $P_{\xi\eta}(x)$, nach § 3, die Entwicklung zu:

$$P_{\xi\eta}(x) = \alpha P_{\xi\xi}(x) + \beta P_{\eta\xi}(x) + \Phi^{(1)}(x),$$

wo α, β und die p Coefficienten von $\Phi^{(1)}$ noch zu bestimmen sind. Nun sind zur Bildung der drei hier auftretenden Normalformen dritter Gattung, nach Nr. 1 dieses Paragraphen, dieselben Punkte

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

verwendet; man hat also

$$P_{\xi\eta}(a_\kappa) = 0, \quad P_{\xi\xi}(a_\kappa) = 0, \quad P_{\eta\xi}(a_\kappa) = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, p),$$

daher:

$$\Phi^{(1)}(a_\kappa) = 0.$$

Da aber a_1, \dots, a_p auf keiner Curve φ liegen, so folgt

$$\Phi^{(1)}(x) \equiv 0.$$

Setzt man $x = \xi$, so wird:

$$\frac{f_{\eta}(\xi)}{(x\xi\eta)} = \alpha \frac{f_{\xi}(\xi)}{(x\xi\xi)},$$

also (s. Nr. 4)

$$\alpha = 1.$$

Ebenso für $x = \eta$:

$$\beta = -1.$$

Die Beziehung wird also:

$$P_{\xi\eta}(x) = P_{\xi\xi}(x) - P_{\eta\eta}(x):$$

Die normirte Form dritter Gattung mit den Parametern ξ, η ist die Differenz zweier gleichartiger Formen, von denen die eine nur von ξ , die andere nur von η abhängt.

Diese Relation besteht nur vermöge $f(x) = 0$. Man könnte sie als vollständige Identität schreiben:

$$(x\xi\xi)(x\eta\xi)\Omega_{\xi\eta}(x) \equiv (x\xi\eta)\{(x\eta\xi)\Omega_{\xi\xi}(x) - (x\xi\xi)\Omega_{\eta\eta}(x)\} + c \cdot f(x),$$

woraus sich durch Polarisiren noch η und Einsetzen von $x = \xi$, wegen $\Omega_{\xi\eta}(\xi) = f_\eta(\xi)$, ergäbe

$$c = (\xi\eta\xi)^2.$$

6. Aus Nr. 5 folgt:

$$P_{\xi\eta}(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad \eta = \xi;$$

und daraus weiter, indem man $\xi = \xi$ setzt:

$$P_{\eta\xi}(x) = -P_{\xi\eta}(x).$$

Daher ist $\Omega_{\xi\eta}$ symmetrisch in ξ und η , was sich auch aus Nr. 1 und 2 direct erkennen liesse.

Ferner ergibt die Relation von Nr. 5, dass, wenn einer der weiteren Schnittpunkte von $f = 0$ mit $(x\xi\eta) = 0$, ausser ξ und η , mit einem der Punkte a_κ zusammenfällt, $P_{\xi\eta}(x)$ die Bedeutung

$$P_{\xi\xi}(x) - P_{\eta\eta}(x)$$

hat; dass also $\Omega_{\xi\eta}(x)$ ebenfalls eine bestimmte Bedeutung erhält (s. Nr. 3).

7. *Einführung anderer fester Punkte in die Normalform dritter Gattung.*

Eine mit irgend p Punkten

$$b_1, b_2, \dots, b_p,$$

statt der a , gebildete Normalform dritter Gattung, mit den Parametern ξ, η , entwickle ich, nach § 2, Nr. 4. c, in eine Summe

$$P_{\xi\eta}(x; b_1, b_2, \dots, b_p) = \beta P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \dots, a_p) + \sum_1^p \beta_i \Phi_i(x),$$

wo, nach § 2, Nr. 4, a.

$$\Phi_i(a_i) = 1, \quad \Phi_i(a_\kappa) = 0 \quad (\kappa \neq i, i, \kappa = 1, 2, \dots, p).$$

Von den Coefficienten ergibt sich β , indem man $x = \xi$ setzt, vorausgesetzt, dass die b_1, b_2, \dots, b_p nicht durch eine Curve φ verbunden sind (wobei die linke Seite zu ∞ würde):

$$\beta = 1;$$

und dann weiter, für $x = a_\kappa$:

also:

$$\beta_x = P_{\xi\eta}(a_x; b_1, b_2, \dots, b_p), \quad (x = 1, 2, \dots, p)$$

$$P_{\xi\eta}(x; b_1, b_2, \dots, b_p) = P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \dots, a_p) + \sum_1^p P_{\xi\eta}(a_i; b_1, b_2, \dots, b_p) \Phi_i(x).$$

Insbesondere wird $P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$ durch eine Vertauschung der a_x unter sich nicht geändert.

8. *Residuensatz.* Dass in Nr. 5 dieses Paragraphen $\alpha + \beta = 0$ wurde, ist ein specieller Fall des allgemeinen Residuensatzes:

Die Summe der Coefficienten

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$$

der Formen dritter Gattung

$$\gamma_1 P_{\xi_1\eta}(x) + \gamma_2 P_{\xi_2\eta}(x) + \dots + \gamma_r P_{\xi_r\eta}(x)$$

in der Entwicklung einer algebraischen Form $\frac{M(x)}{N(x)}$, die in $x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ unendlich wird, ist gleich Null.

Denn diese Summe von Formen dritter Gattung kann nach dem Reductionssatz für algebraische Formen (§ 3, Nr. 2) in $x = \eta$ nicht unendlich werden; verhält sich aber dort wie (Nr. 4 dieses Paragraphen):

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r) \frac{f_o(\eta)}{(c\eta x)}.$$

§ 7.

Festlegung und Eigenschaften der Normalformen zweiter Gattung.

1. Die Normalform $P_{\xi\eta}(x)$ ist in ξ eine homogene *Function* 0^{ter} *Dimension*, wie die Relation von Nr. 5 des § 6 unmittelbar anzeigt. Ich benutze diesen Umstand zur Herstellung einer Normalform 2^{ter} Gattung aus dieser 3^{ten} Gattung.

Zu dem Zwecke lasse man in die Relation von § 6, Nr. 5 den Punkt η an den Punkt ξ heranrücken, indem man setzt:

$$\eta = \xi + \varepsilon \xi', \quad f(\xi) = 0, \quad f_{\xi'}(\xi) = 0;$$

so wird die Relation zu:

$$\lim_{\varepsilon=0} P_{\xi\eta}(x) = - \varepsilon \sum_1^3 \frac{\partial P_{\xi\xi'}(x)}{\partial \xi_i} \xi_i',$$

wobei dieser Werth von dem willkürlichen Punkt ξ unabhängig ist. An Stelle des Factors von ε betrachte ich nun die Differentialableitung

$$\frac{\sum_1^3 \frac{\partial P_{\xi\xi'}(x)}{\partial \xi_i} \xi_i'}{(c\xi\xi')} f_o(\xi) = D_{\xi} P_{\xi\xi'}(x).$$

Dieser Ausdruck ist nicht nur eine algebraische Form von ξ (s. § 1, Nr. 2), sondern auch eine algebraische Form von x , und zwar ist er in x unsere Normalform 2^{ter} Gattung, erster Ordnung.

2. Die Eigenschaften unserer Normalform 2^{ter} Gattung 1^{ter} Ordnung

$$A_{\xi}(x) \equiv A_{\xi}^{(1)}(x) \equiv D_{\xi} P_{\xi\eta}(x)$$

sind folgende:

a) $A_{\xi}(x)$, mit dem Argument x und dem Parameter ξ , ist unabhängig von dem in $P_{\xi\eta}(x)$ vorkommenden zweiten Parameter η .

b) $A_{\xi}(x)$ wird, als Form von x , nur für $x = \xi$ zu unendlich, und zwar ∞^2 wie

$$-\frac{f_c(\xi) \cdot f_c(x)}{(c\xi x)^2},$$

ein in der Grenze $x = \xi$ von den c unabhängiger Ausdruck.

In der That unterscheidet sich $P_{\xi\eta}(x)$ von der Function von ξ :

$$-\frac{f_c(x)}{(xy c)} \frac{(\xi y c)}{(\xi x c)}$$

nur um eine für $\xi = x$ endlich bleibende Function von ξ (§ 6, Nr. 4); daher wird

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} [D_{\xi} P_{\xi\eta}(x)] &= - \lim \left[\frac{f_c(x)}{(xy c)} \cdot D_{\xi} \frac{(\xi y c)}{(\xi x c)} \right] \\ &= - \lim \left[\frac{f_c(x)}{(xy c)} \cdot \frac{f_c(\xi) (xy c)}{(\xi x c)^2} \right] \\ &= - \lim \frac{f_c(x) \cdot f_c(\xi)}{(\xi x c)^2}, \end{aligned}$$

wie behauptet war.

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} [D_{\xi} P_{\xi\eta}(x) \cdot d\omega_x] &= - \frac{f_c(\xi)}{(\xi \eta c)} \cdot \lim \left[D_x \frac{(x \eta c)}{(x \xi c)} d\omega_x \right] \\ &= - \frac{f_c(\xi)}{(\xi \eta c)} \lim \sum_i \frac{d}{dx_i} \frac{(x \eta c)}{(x \xi c)} dx_i \\ &= - \lim \frac{f_c(\xi)}{(x \xi c)^2} (cx dx). \end{aligned}$$

c) $A_{\xi}(x)$ verschwindet für die p Punkte $x = a_1, a_2, \dots, a_p$ je in erster Ordnung.

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition von $A_{\xi}(x)$ als Grenzwert von $P_{\xi\eta}(x)$ in Nr. 1. Die beiden Eigenschaften b) und c) definiren $A_{\xi}(x)$ eindentig (nach § 2, Nr. 3. b).

d) Aus § 6 Nr. 7 folgt:

$$\begin{aligned} D_{\xi} P_{\xi\eta}(x; b_1, \dots, b_p) &= D_{\xi} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) \\ &+ \sum_{i=1}^p D_{\xi} P_{\xi\eta}(a_i; b_1, \dots, b_p) \Phi_i(x). \end{aligned}$$

e) Die mit den festen Punkten a_1, \dots, a_p gebildete Normalform $A_\xi(x)$ von x hat für jeden Werth von ξ die genannten Eigenschaften, ausgenommen, wenn ξ mit einem der Punkte a_κ zusammenfällt, wobei $A_\xi(x)$ für jeden Werth von x zu unendlich wird. In diesem Falle ist, nach § 6, Nr. 3, die Form von x :

$$E_\kappa(x) \equiv D_{a_\kappa} P_{a_\kappa \eta}(x; a_1, \dots, a_{\kappa-1}, a'_\kappa, a_{\kappa+1}, \dots, a_p)$$

zu benutzen.

3. Es mögen noch einige Darstellungsformen von $A_\xi(x)$ entwickelt werden. Aus

$$P_{\xi \eta}(x) = \frac{\Omega_{\xi \eta}(x)}{(x \xi \eta)}$$

ergibt sich nach § 1, Nr. 2:

$$\begin{aligned} A_\xi(x) &= D_\xi P_{\xi \eta}(x) = -\frac{1}{(x \xi \eta)^2} \sum \pm \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial (x \xi \eta)}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3} \\ &= -\frac{1}{(x \xi \eta)^2} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{array} \right\| \\ &= \frac{1}{(x \xi \eta)^2} \left\{ f_x(\xi) \sum \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_i} \eta_i - f_\eta(\xi) \sum \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_i} x_i \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier für die willkürlichen Grössen η die Unterdeterminanten

$$\eta_1 = \kappa_2 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_3} - \kappa_3 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2}, \text{ etc.},$$

wo auch die κ willkürlich sind, so wird wegen $f_\xi(\xi) = 0$:

$$(x \xi \eta) = - \sum \kappa_i \xi_i \cdot f_x(\xi),$$

also

$$A_\xi(x) = \frac{\sum \pm \kappa_i \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_3}}{(\sum \kappa_i \xi_i)^2 \cdot f_x(\xi)},$$

wo erst nach Ausführung der Differentiationen $\frac{\partial \Omega_{\xi \eta}(x)}{\partial \xi_i}$ die η durch die obigen (κf) zu ersetzen sind. Man hat also hier den Ausdruck zweiter Gattung, welcher im Nenner die Tangente des Parameterpunktes ξ enthält.

4. Da die Normalform 2^{ter} Gattung, 1^{ter} Ordnung von x , $D_\xi P_{\xi \eta}(x)$, im Parameter ξ selbst eine algebraische *Form*, aber keine Function 0^{ter} Dimension, ist, so kann man auf dieselbe zur Aufstellung von Normalformen 2^{ter} Gattung und *höherer* Ordnung von x den Ableitungsprocess D_ξ nicht mehr direct weiter anwenden. Man wird vielmehr

jene Form erst durch eine von x unabhängige Form $D_{\xi} X$, wo X irgend eine algebraische Function 0^{ter} Dimension in ξ ist, dividiren und erst von dem Quotienten

$$\frac{D_{\xi} P_{\xi\eta}(x)}{D_{\xi} X} = \sum_i \frac{\partial P_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi_i} d\xi_i : \sum_i \frac{\partial X}{\partial \xi_i} d\xi_i$$

die Differentialableitung D_{ξ} nehmen. Da im Folgenden die Wahl von X gleichgültig ist, so ist auch dieser Process für die ganze Classe, der die Curve $f = 0$ angehört, invariant.

Speciell wähle ich

$$X = \frac{(cx\xi)}{(cy\xi)(cy\xi)}, \quad D_{\xi} X = \frac{f_c(\xi)}{(cy\xi)^2}$$

und bilde die Form in x und ξ :

$$A_{\xi}^{(2)}(x) = D_{\xi} \left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} D_{\xi} P_{\xi\eta}(x) \right] = D_{\xi} \left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} A_{\xi}^{(1)}(x) \right] = \Delta_{\xi} A_{\xi}^{(1)}(x),$$

wobei ich diese Modification des Ableitungsprocesses D_{ξ} als *Process* Δ_{ξ} bezeichne.

Allgemein bilde ich ebenso

$$A_{\xi}^{(v)}(x) = \Delta_{\xi} A_{\xi}^{(v-1)}(x) = D_{\xi} \left[\frac{(cy\xi)^2}{f_c(\xi)} A_{\xi}^{(v-1)}(x) \right],$$

als *Normalform* 2^{ter} Gattung, v ^{ter} Ordnung.

5. $A_{\xi}^{(v)}(x)$ hat, als Form von x , folgende Eigenschaften:

a) Dieser Ausdruck wird, als Form von x , nur für $x = \xi$ zu unendlich, und zwar ∞^{v+1} wie

$$\begin{aligned} -(\nu-1)! f_c(x) (cyx)^{\nu-2} D_{\xi} \frac{(cy\xi)^{\nu}}{(c\xi x)^{\nu}} &= -\nu! f_c(x) f_c(\xi) \cdot \frac{(cyx)^{\nu-1} (cy\xi)^{\nu-1}}{(c\xi x)^{\nu+1}} \\ &= (\nu-1)! f_c(\xi) (cy\xi)^{\nu-2} D_x \frac{(cyx)^{\nu}}{(c\xi x)^{\nu}}, \end{aligned}$$

für $\lim (x - \xi) = 0$ und $\nu \geq 1$.

Denn dieses Verhalten gilt für $\nu = 1$ nach Nr. 2. Nimmt man an, dass $A_{\xi}^{(v-1)}(x)$ sich für $\lim (x - \xi) = 0$ verhalte wie

$$-(\nu-1)! f_c(x) f_c(\xi) \frac{(cyx)^{\nu-2} (cy\xi)^{\nu-2}}{(c\xi x)^{\nu}},$$

so folgt daraus das von $A_{\xi}^{(v)}(x)$ zu

$$-(\nu-1)! f_c(x) (cyx)^{\nu-2} D_{\xi} \frac{(cy\xi)^{\nu}}{(c\xi x)^{\nu}},$$

wie behauptet.

Man folgert daraus noch:

$$\begin{aligned}\lim_{x=\xi} [A_{\xi}^{(\nu)}(x) d\omega_x] &= (\nu-1)! f_c(\xi) \cdot (cy\xi)^{\nu-2} \lim \sum_i \frac{d}{dx_i} \frac{(cyx)^{\nu}}{(c\xi x)^{\nu}} dx_i \\ &= -\nu! \lim f_c(\xi) (cy\xi)^{\nu-1} \frac{(cyx)^{\nu-1} (cx dx)}{(c\xi x)^{\nu+1}}.\end{aligned}$$

b) $A_{\xi}^{(\nu)}(x)$ verschwindet für die p Punkte $x = a_1, a_2, \dots, a_p$ je in erster Ordnung.

c) Die beiden Eigenschaften a) und b) definiren $A_{\xi}^{(\nu)}(x)$ vollständig (nach § 2, Nr. 3, b).

d) Nach § 6, Nr. 7.

$$A_{\xi}^{(\nu)}(x; b_1, \dots, b_p) = A_{\xi}^{(\nu)}(x; a_1, \dots, a_p) + \sum_1^p A_{\xi}^{(\nu)}(a_i; b_1, \dots, b_p) \Phi_i(x)$$

wenn die $A_{\xi}^{(\nu)}(x; b_1, \dots, b_p)$ ebenso aus $P_{\xi\eta}(x; b_1, \dots, b_p)$ abgeleitet werden, wie die $A_{\xi}^{(\nu)}(x)$ aus $P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$.

e) Wenn ξ mit dem Punkte a_x zusammenfallen sollte, wird man, wie in Nr. 2, e, die Form von x benutzen, welche aus $A_{\xi}^{(\nu)}(x)$ durch Ersetzen von a_x durch a'_x hervorgeht. Die weiteren Fälle, in welchen die Form unabhängig von x unendlich wird, werden durch Abänderung des willkürlichen Punktes c weggeschafft.

§ 8.

Die Normalform dritter Gattung als Function der Parameter: Aufstellung der einfachsten algebraischen Functionen.

1. Wie schon in § 7, Nr. 1 bemerkt, ist

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$$

eine homogene Function 0ter Dimension von ξ ; dieselbe verschwindet für $\xi = \eta$ (§ 6, 6) und wird zu ∞^1 für $\xi = x$ wie (§ 6, 4):

$$-\frac{f_c(x)}{(c\xi x)} \quad (\text{unabhängig von } c \text{ und } \eta),$$

also wie die Function von ξ :

$$\frac{(c\xi\xi)}{(cx\xi)} \cdot \frac{f_c(x)}{(c\xi x)}.$$

Das Verhalten dieser Function von ξ in den Punkten a_1, \dots, a_p folgt aus der Relation von § 6, Nr. 7 die für $b_x = x$, $b_i = a_i$ ($i \neq x$) übergeht in

$$\begin{aligned}&P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \dots, a_x, \dots, a_p) \\ &= -P_{\xi\eta}(a_x; a_1, a_2, \dots, a_{x-1}, x, a_{x+1}, \dots, a_p) \Phi_x(x).\end{aligned}$$

Die Function wird also im Punkte $\xi = a_\kappa$ zu ∞^1 wie

$$\frac{f_c(a_\kappa)}{(c\xi a_\kappa)} \Phi_\kappa(x)$$

oder also, wie die Function von ξ und Function von a_κ :

$$\frac{(c\xi\xi)}{(c\xi a_\kappa)} \cdot \frac{f_c(a_\kappa)}{(c\xi a_\kappa)} \Phi_\kappa(x).$$

Weitere Unendlichkeitspunkte existiren für unsere Function $P_{\xi\eta}(x)$ von ξ keine. Denn diese müssen nach der Relation von § 6, 5 alle unabhängig vom Punkte η sein; unter den Nullpunkten des Nenners von $P_{\xi\eta}(x)$, nämlich (§ 6, 2):

$$(x\xi\eta) \cdot \Delta$$

sind aber nur $\xi = x$ und $\xi = a_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \dots, p$) wo η unabhängig. Dies ist für die Factoren $(x\xi\eta)$ und $(a_\kappa\xi\eta)$ des Nenners von selbst klar; das Verschwinden des Factors

$$\sum \pm \Omega^{(1)}(\xi) \dots \Omega^{(m-1)}(\eta)$$

von Δ aber würde aussagen, dass in der Schaar von adjungirten Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\lambda_1 \Omega^{(1)}(x) + \dots + \lambda_{m-1} \Omega^{(m-1)}(x) = 0$$

Curven vorkommen, welche in die Gerade $(x\xi\eta)$ und adjungirte Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen, was in § 6, Nr. 2 ausdrücklich ausgeschlossen ist und zum Beispiel dann sicher nicht stattfindet, wenn man der Schaar vorschreibt, durch p feste durch keine Curve φ verbundene Punkte von f , von denen keiner auf der Geraden $(x\xi\eta) = 0$ liegt, zu gehen.

Da eine algebraische Function, welche in $p+1$ nicht durch eine Curve φ verbundenen Punkten zu ∞^1 wird, noch 2 willkürliche Constanten enthält, so folgt somit:

Die allgemeinste algebraische Function von ξ , welche in den $p+1$ Punkten $\xi = x, a_1, a_2, \dots, a_p$ zu ∞^1 wird, ist

$$\alpha P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \dots, a_p) + \beta$$

wo α und β willkürliche Parameter.

Unter diesen Functionen von ξ ist $P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$ selbst dadurch eindeutig festgelegt, dass dieselbe für $\xi = \eta$ verschwinden und für $\xi = x$ ∞^1 wie $-\frac{f_c(x)}{(c\xi x)}$ werden soll.

2. Um $P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$ als Function des Parameters a_κ zu untersuchen, schreibe ich zuerst.

$$\Phi_\kappa(x) = \frac{\psi_\kappa(x)}{\psi_\kappa(a_\kappa)},$$

wo $\psi_\kappa(x)$ die Curve φ durch $a_1, \dots, a_{\kappa-1}, a_{\kappa+1}, \dots, a_p$ ohne weitere

auf a_x bezügliche Normirung ist; und die Relation von Nr. 1 dementsprechend:

$$\frac{P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)}{\psi_x(x)} = - \frac{P_{\xi\eta}(a_x; a_1, \dots, a_{x-1}, x, a_{x+1}, \dots, a_p)}{\psi_x(a_x)}.$$

Links steht alsdann eine algebraische Function von x , welche ebenfalls in $p + 1$ Punkten je zu ∞^1 wird, nämlich in

$$x = \xi, \eta, a_{x1}, a_{x2}, \dots, a_{x,p-1},$$

wo $a_{x1}, \dots, a_{x,p-1}$ die $p - 1$ weiteren Nullpunkte der durch

$$a_1, \dots, a_{x-1}, a_{x+1}, \dots, a_p$$

gehenden φ -Curve $\psi_x(x) = 0$ sind; ferner wird diese Function in $x = a_x$ zu 0 (und offenbar in p weiteren vom Index x unabhängigen Punkten zu 0). Durch diese Bedingungen und ihr Verhalten in ξ

(wie $\frac{f_c(\xi)}{(c a \xi) \psi_x(\xi)}$) ist die Function *eindeutig* bestimmt.

Die rechte Seite geht aber aus der linken durch Vertauschung von x mit a_x bis auf's Vorzeichen hervor und hat analoge Eigenschaften als Function von a_x . Daher folgt:

Die Normalform

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$$

ist in Bezug auf jeden der Parameter a_1, \dots, a_p homogen von der 0^{ten} Dimension. Als Function von a_x wird sie in $p + 1$ Punkten je zu ∞^1 , nämlich in

$$a_x = \xi, \eta, a_{x1}, a_{x2}, \dots, a_{x,p-1},$$

wo die letzteren $p - 1$ Punkte mit den a_i (ausser a_x) auf einer Curve φ liegen; und zu 0 in $a_x = x$. In $a_x = \xi$ verhält sie sich wie

$$- \frac{f_c(\xi)}{(c a_x \xi)} \Phi_x(x).$$

3. Aus Nr. 1 und 2 folgt noch:

$$\begin{aligned} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) &= - P_{\xi\eta}(a_x; a_1, \dots, a_{x-1}, x, a_{x+1}, \dots, a_p) \Phi_x(x) \\ &= - P_{x,a_x}(\xi; \eta, a_{x1}, \dots, a_{x,p-1}) \frac{\Phi_x(x)}{\Phi_x(\xi)}. \end{aligned}$$

also eine verschiedenartige Darstellung derselben algebraischen Function von ξ oder derselben algebraischen Form von x .

Rückt insbesondere der Punkt x in einen der Punkte $a_{x1}, \dots, a_{x,p-1}$, welche auf der Curve $\Phi_x(x) = 0$ liegen, so werden die beiden letzteren der hier gegebenen Darstellungen der Function $P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p)$ von ξ zu $\frac{0}{0}$. In Wirklichkeit muss diese Function von ξ in den Quotienten zweier φ -Formen von ξ übergehen, welcher nur noch für $\xi = x, a_1, \dots, a_{x-1}, a_{x+1}, \dots, a_p$ zu ∞^1 wird, nicht mehr für $\xi = a_x$ (nach dem „Reductionssatz für algebraische Functionen“, § 2, 2);

dieser Quotient verschwindet ferner für $\xi = \eta$ und muss für $\xi = x + dx$ ∞^1 wie

$$\frac{f_c(x)}{(cx\xi)} = \frac{1}{d\omega_x}$$

werden. Diese Eigenschaften bestimmen den Quotienten völlig und man kann ihn also unmittelbar anschreiben. Da er von a_x unabhängig definiert ist, so ersetze ich, wie in Nr. 2, $\Phi_x(\xi)$ durch $\psi_x(\xi)$, wo $\psi_x(\xi)$ verschwinde für $\xi = a_1, \dots, a_{x-1}, a_{x+1}, \dots, a_p$, also auch für $\xi = x = a_{xi}$. Eine Curve $\varphi(\xi) = 0$, welche für die Restpunkte von $\psi_x(\xi) = 0$:

$$\xi = a_{x1}, \dots, a_{x,i-1}, a_{x,i+1}, \dots, a_{x,p-1}$$

und $\xi = \eta$ verschwindet, sei mit $\psi_{xi}(\xi) = 0$ bezeichnet; sie trifft $f = 0$ in einer Gruppe von p Punkten, die corresidual ist zu

$$a_1, \dots, a_{x-1}, a_{x+1}, \dots, a_p, x,$$

und die η enthält. Dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{x=a_{xi}} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) &= \frac{\psi_{xi}(\xi)}{\psi_x(\xi)} \cdot \lim_{x=a_{xi}} D_x \frac{\psi_x(x)}{\psi_{xi}(x)} \\ &= \left[\frac{(\alpha\psi_x f)}{\sum \alpha_i x_i} \right]_{x=a_{xi}} \cdot \frac{\psi_{xi}(\xi)}{\psi_x(\xi)}. \end{aligned}$$

Dasselbe ergibt die gewöhnliche Auswerthung des unbestimmten dritten Ausdrucks in der ersten Gleichung dieser Nummer.

4. Aus der algebraischen Function von ξ

$$P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p),$$

welche in x und a_1, \dots, a_p je zu ∞^1 wird, lassen sich *algebraische Functionen von ξ* erzeugen, welche in x zu ∞^v , in a_1, \dots, a_p je zu ∞^1 werden.

Zu dem Zwecke wende man den in § 7, Nr. 4 definirten Ableitungsprocess Δ_x auf diese algebraische Form von x $(v-1)$ -mal hintereinander an; und setze

$$P_{\xi\eta}^{(i+1)}(x) = \Delta_x P_{\xi\eta}^{(i)}(x) \equiv D_x \left[\frac{(cyx)^2}{f_c(x)} P_{\xi\eta}^{(i)}(x) \right],$$

$$(i = 1, 2, \dots, v-1)$$

wo

$$P_{\xi\eta}^{(1)}(x) \equiv P_{\xi\eta}(x)$$

sei.

Die Function $P_{\xi\eta}^{(v)}(x)$ von ξ hat das bezeichnete Verhalten.

Denn zunächst in der Nähe von $\xi = x$ verhält sich $P_{\xi\eta}^{(v)}(x)$ wie die Function von ξ :

$$(v-1)! f_c(x) (cyx)^{v-2} \cdot \frac{(cy\xi)^v}{(cx\xi)^v}.$$

In der That gilt das für $\nu = 1$; es verhalte sich aber $P_{\xi\eta}^{(\nu-1)}(x)$ wie

$$(\nu - 2)! f_c(x) (cyx)^{\nu-3} \cdot \frac{(cy\xi)^{\nu-1}}{(cx\xi)^{\nu-1}},$$

so wird $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ in der Nähe von $\xi = x$ zu

$$(\nu - 2)! (cy\xi)^{\nu-1} D_x \frac{(cyx)^{\nu-1}}{(cx\xi)^{\nu-1}} = (\nu - 1)! f_c(x) (cyx)^{\nu-2} \frac{(cy\xi)^\nu}{(cx\xi)^\nu},$$

wie behauptet.

Dass $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ in $\xi = a_x$ zu ∞^1 wird, folgt unmittelbar daraus, dass dasselbe für $\nu = 1$ geschieht. Um das Verhalten genauer anzugeben, wende man den Δ_x -Process auch auf die Form erster Gattung $\Phi_x(x)$ wiederholt an und führe die Bezeichnung ein:

$$\Phi_x^{(i+1)}(x) = \Delta_x \Phi_x^{(i)}(x) = D_x \frac{(cyx)^2}{f_c(x)} \Phi_x^{(i)}(x),$$

wo

$$\Phi_x^{(1)}(x) \equiv \Phi_x(x);$$

so verhält sich $P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x; a_1, \dots, a_p)$ als Function von ξ in $\xi = a_x$ wie

$$\frac{f_c(a_x) \Phi_x^{(\nu)}(x)}{(c\xi a_x)},$$

oder wie

$$\frac{f_c(a_x) \Phi_x^{(\nu)}(x)}{(ca_x y)} \cdot \frac{(c\xi y)}{(c\xi a_x)}.$$

$P_{\xi\eta}^{(\nu)}(x)$ ist durch die genannten Ordnungen des Unendlichwerdens in $\xi = a_1, \dots, a_p$, sowie das Verhalten in $\xi = x$ völlig bestimmt.

§ 9.

Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei den Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung. Kanonische Formen 2^{ter} Gattung.

1. Die Normalform 2^{ter} Gattung erster Ordnung von ξ

$$D_x P_{xy}(\xi; a_1, \dots, a_p) = A_x(\xi)$$

ist, nach dem Früheren (§ 7), auch in x eine Form, die sowohl in $x = \xi$, als in $x = a_1, \dots, a_p$ je zu ∞^2 wird. Und zwar wird diese Form in der Nähe von $x = \xi$ zu (§ 7, Nr. 2, b)

$$-\frac{f_c(\xi) f_c(x)}{(cx\xi)^2},$$

in der Nähe von $x = a_x$ zu (§ 7, N. 2, d)

$$\frac{f_c(a_x) f_c(x)}{(ca_x)^2} \Phi_x(\xi).$$

Durch diese Eigenschaften aber ist der Ausdruck in x nur bis auf eine additive Form $\varphi(x)$ definit.

Die Form von x

$$D_x P_{xy}(\xi)$$

und die Normalform $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$ zweiter Gattung erster Ordnung von x werden in $x = \xi$ in genau gleicher Weise zu unendlich. Entwickelt man also die Differenz

$$D_x P_{xy}(\xi; a_1 \dots a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1 \dots a_p) \equiv F(\xi, x)$$

nach § 3 in die Normalformen von x , so erhält man keine auf ξ bezügliche Normalformen 2^{ter} und 3^{ter} Gattung mehr, sondern nur noch auf die a_κ bezügliche. Damit ist der am Schlusse von § 4 verlangte Nachweis, dass $c_1 = 0$, für den dortigen Fall $\nu = 2$ geliefert. Um auch den Rest dieses Nachweises zu erbringen, führe man den Ableitungsprocess Δ_ξ $(\nu - 2)$ -mal hintereinander auf vorstehende Differenz aus; so erhält man:

$$D_x P_{xy}^{(\nu-1)}(\xi; a_1, \dots, a_p) - A_\xi^{(\nu-1)}(x) = A_\xi^{(\nu-2)} \cdot F(\xi, x),$$

ein Ausdruck, der für $x = \xi$ ebenfalls nicht mehr unendlich wird. Da aber alle algebraischen Functionen von x , welche in $x = \xi$ zu $\infty^{\nu-1}$, in $x = a_1, \dots, a_p$ je zu ∞^1 werden, sich aus einer Constanten und

$$P_{xy}^{(1)}(\xi), P_{xy}^{(2)}(\xi), \dots, P_{xy}^{(\nu-1)}(\xi)$$

linear zusammensetzen lassen, so können in der Entwicklung des § 4, auf ξ bezüglich, nur die

$$A_\xi^{(1)}(x), A_\xi^{(2)}(x), \dots, A_\xi^{(\nu-1)}(x)$$

auftreten, wie dort behauptet.

2. Die in Nr. 1 angedeutete Reduction der Form von x

$$F(\xi, x)$$

auf die Normalformen soll nun im Folgenden ausgeführt werden. Es treten in dieser Entwicklung nach § 4 nur die auf die a_κ bezüglichen Normalformen 2^{ter} Gattung erster Ordnung und die Normalformen erster Gattung von x auf. Für die ersteren sollen die in § 7, Nr. 2, e definirten Formen

$$E_\kappa(x)$$

gewählt werden, für welche

$$E_\kappa(a_i) = 0, \text{ wenn } i \neq \kappa, \quad E_\kappa(a'_\kappa) = 0,$$

$$E_\kappa(a_\kappa) = \infty^2, \text{ wie } -\frac{f_c(a_\kappa) \cdot f_c(x)}{(cx a_\kappa)^2};$$

für die letzteren die Formen $\Phi_\kappa(x)$ des § 2, Nr. 4; und es werde gesetzt:

$$F(\xi, x) = \sum_1^p \chi_\kappa(\xi) E_\kappa(x) + \sum_1^p \psi_\kappa(\xi) \Phi_\kappa(x),$$

wo die $\chi_x(\xi)$, $\psi_x(\xi)$ zu bestimmende Formen von ξ sind. Nun ist aber

$$F(x, \xi) = -F(\xi, x);$$

die rechte Seite muss sich also auch nach Formen $E_x(\xi)$ und $\Phi_x(\xi)$ entwickeln lassen; d. h., da die $2p$ Formen $E_x(x)$ und $\Phi_x(x)$ von einander linear-unabhängig sind:

$$\chi_x(\xi) = \sum_1^p \{ \lambda_{xi} E_i(\xi) + \lambda'_{xi} \Phi_i(\xi) \},$$

$$\psi_x(\xi) = \sum_1^p \{ \mu_{xi} E_i(\xi) + \mu'_{xi} \Phi_i(\xi) \},$$

mit zu bestimmenden Constanten λ_{xi} , λ'_{xi} , μ_{xi} , μ'_{xi} .

Davon bestimmen sich nun die λ_{xi} , λ'_{xi} , μ_{xi} ohne Weiteres, indem man x dem Punkte a_x sich nähern lässt und x mit ξ vertauscht. Denn in der Nähe von $x = a_x$ erhält man (s. Nr. 1 dieses Paragraphen):

$$\frac{f_c(a_x) f_c(x)}{(cx a_x)^2} \Phi_x(\xi) = -\chi_x(\xi) \cdot \frac{f_c(a_x) \cdot f_c(x)}{(cx a_x)^2},$$

also

$$\chi_x(\xi) = -\Phi_x(\xi),$$

und durch Vertauschung von x mit ξ :

$$\psi_x(\xi) = E_x(\xi) + \sum_1^p \mu'_{xi} \Phi_i(\xi), \quad \text{wo} \quad \mu'_{xi} = -\mu'_{ix},$$

$$\text{also} \quad \mu'_{xx} = 0.$$

Lässt man nun auch ξ an a_x rücken, so geht die Relation über in

$$\begin{aligned} & -D_{a_x} P_{a_x \eta}(x; a_1, \dots, a_x', \dots, a_p) \\ &= -D_{a_x} P_{a_x \eta}(x; a_1, \dots, a_{x-1}, a_x', a_{x+1}, \dots, a_p) + \\ &+ \Phi_x(x) D_{a_x} P_{a_x \eta}(a_x; a_1, \dots, a_{x-1}, a_x', a_{x+1}, \dots, a_p) + \\ &+ \sum_1^p \mu'_{ix} \Phi_i(x); \end{aligned}$$

da aber, (nach § 7, Nr. 2, d), indem man dort

$$\begin{aligned} & a_1, \dots, a_{x-1}, a_x', a_{x+1}, \dots, a_p, a_x \\ & \text{für} \quad b_1, \dots, b_{x-1}, b_x, b_{x+1}, \dots, b_p, \xi \end{aligned}$$

setzt:

$$\begin{aligned} & D_{a_x} P_{a_x \eta}(x; a_1, \dots, a_{x-1}, a_x, a_{x+1}, \dots, a_p) + \\ & + \Phi_x(x) \cdot D_{a_x} P_{a_x \eta}(a_x; a_1, \dots, a_{x-1}, a_x', a_{x+1}, \dots, a_p) \end{aligned}$$

gleich der endlichen Grösse

$$D_{a_x} P_{a_x \eta}(x; a_1, \dots, a_{x-1}, a'_x, a_{x+1}, \dots, a_p)$$

ist, so folgt für alle x

$$\sum_i \mu'_{ix} \Phi_i(x) = 0,$$

d. h.

$$\mu'_{ix} = 0, \text{ für alle } i \text{ und } x.$$

Die Entwicklung wird somit

$$\begin{aligned} D_x P_{xy}(\xi; a_1, \dots, a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) = \\ = \sum_1^p \{ E_x(\xi) \cdot \Phi_x(x) - \Phi_x(\xi) E_x(x) \}. \end{aligned}$$

Dass die rechte Seite dieser Gleichung von den in den $E_x(\xi)$, $E_x(x)$ steckenden willkürlichen Punkten a'_1, \dots, a'_p nur scheinbar abhängig ist, ergiebt die Relation § 7, Nr. 2, d.

3. Führt man für den Augenblick die Bezeichnung

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) + \sum_1^p E_x(\xi) \Phi_x(x) = H_\xi(x)$$

ein, so schreibt sich die Relation von Nr. 2:

$$H_\xi(x) = H_x(\xi).$$

Es ist aber $H_\xi(x)$ in x eine Form 2^{ter} Gattung, welche nur in ξ zu ∞^2 wird, genau wie die Normalform $D_\xi P_{\xi\eta}(x)$; und durch dieses Verhalten und durch ihre Werthe $E_x(\xi)$ in $x = a_x$ ($x = 1, 2, \dots, p$) ist sie eindeutig bestimmt. Die Relation stellt daher den Satz von der Vertauschung von Argument x und Parameter ξ vor:

Diejenige völlig bestimmte algebraische Form 2^{ter} Gattung erster Ordnung von x , mit dem Parameter ξ , welche in $x = \xi$ zu

$$-\frac{f_c(\xi) \cdot f_c(x)}{(cx\xi)^2}$$

wird, und in den festen Punkten $x = a_x$ ($x = 1, \dots, p$) bezüglich die Werthe $E_x(\xi)$ annimmt, bleibt durch Vertauschung von x mit ξ unverändert.

4. In die Definition der Form $H_\xi(x)$ treten noch die $2p$ festen Punkte $a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_p$ ein. Der allgemeinste Vertauschungssatz für Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung ist der folgende:

Die allgemeinste algebraische Form 2^{ter} Gattung von x , welche in $x = \xi$ zu ∞^2 wird wie

$$-\frac{f_c(\xi) \cdot f_c(x)}{(cx\xi)^2},$$

und welche durch die Vertauschung des Arguments x mit dem Parameter ξ nicht verändert wird, ist:

$$B_{\xi}(x)^* \equiv H_{\xi}(x) + \sum_{i,x} \alpha_{ix} \Phi_i(\xi) \Phi_x(x),$$

$$\equiv D_{\xi} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) = \sum_x \left\{ E_x(\xi) + \sum_i \alpha_{ix} \Phi_i(\xi) \right\} \Phi_x(x),$$

wo die α_{ix} beliebige, von x und ξ unabhängige, Grössen sind, für welche

$$\alpha_{xi} = \alpha_{ix}$$

ist.

Denn nach der ersten Eigenschaft kann sich $B_{\xi}(x)$ von $H_{\xi}(x)$ nur um ein Glied von der Form

$$\sum_x \Psi_x(\xi) \Phi_x(x)$$

unterscheiden, wo $\Psi_x(\xi)$ noch zu bestimmen ist; die Vertauschung von x mit ξ ergibt dann

$$\sum_x \Psi_x(\xi) \Phi_x(x) = \sum_i \Psi_i(x) \Phi_i(\xi),$$

also für $x = a_x$:

$$\Psi_x(\xi) = \sum_i \Psi_i(a_x) \Phi_i(\xi),$$

was zur obigen Bestimmung führt.

Es liegt im Folgenden kein Grund vor, die $\alpha_{ix} = \alpha_{xi}$ irgendweiter zu specialisiren. Ich werde daher nicht die speciellere Form $H_{\xi}(x)$, sondern gleich die allgemeinste Form

$$B_{\xi}(x)$$

in die Theorie einführen und dieselbe als *kanonische Form zweiter Gattung erster Ordnung* bezeichnen.

Man hat

$$B_{\xi}(x) = B_x(\xi),$$

$$B_{a_x}(x) = E_x(x) + \sum_i \alpha_{xi} \Phi_i(x),$$

also auch

$$B_{\xi}(x) = B_x(\xi) = D_{\xi} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) + \sum_x B_{a_x}(\xi) \Phi_x(x).$$

$$= D_x P_{xy}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \sum_x \Phi_x(\xi) B_{a_x}(x).$$

In dieser Definition und in diesen Formeln ist es wegen der Willkürlichkeit der α_{ix} erlaubt, die *kanonische Form* $B_{\xi}(x)$ als von

*) In der in der Einleitung cit. Note III aus den Erl. Ber. war diese Form von x und ξ mit $D_{\xi} X_{\xi\eta}(x)$ bezeichnet.

den a_x und a'_x gänzlich unabhängig anzunehmen; wie es auch im Folgenden geschehen soll.

Denn bezeichnet man die mit Punkten $b_1, \dots, b_p, b'_1, \dots, b'_p$ statt der a, a' gebildeten Formen mit einem oberen Strich, so wird:

$$\bar{H}_\xi(x) = H'_\xi(x) + \sum_{i,x} \beta_{ix} \Phi_i(\xi) \Phi_x(x), \quad \text{wo} \quad \beta_{ix} = \beta_{xi},$$

und da die rechte Seite von den a, a' unabhängig wird, so braucht man nur in der Definitionsgleichung von $B_\xi(x)$ die α_{ix} durch $\beta_{ix} + \alpha'_{ix}$ zu ersetzen, wo die $\alpha'_{ix} = \alpha'_{xi}$ ebenfalls willkürlich sind. Man berechnet übrigens leicht:

$$\sum_x \beta_{ix} \Phi_x(x) = \sum_i [\bar{E}_i(a_i) - E_i(b_i)] \bar{\Phi}_i(x).$$

5. Als *kanonische Formen zweiter Gattung* von den verschiedenen Ordnungen in x werden angenommen:

$$B_\xi^{(1)}(x) = B_\xi(x), \quad B_\xi^{(2)}(x), \dots, B_\xi^{(v)}(x),$$

wo

$$B_\xi^{(i)}(x) = \Delta_\xi B_\xi^{(i-1)}(x).$$

Dann ist, wenn auch:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(\xi) &= E_x(\xi), & \Phi_x^{(1)}(\xi) &= \Phi_x(\xi), \\ E_x^{(i)}(\xi) &= \Delta_\xi E_x^{(i-1)}(\xi), & \Phi_x^{(i)}(\xi) &= \Delta_\xi \Phi_x^{(i-1)}(\xi) \end{aligned}$$

eingeführt werden, zum Vergleich der $B_\xi^{(v)}(x)$ mit den $A_\xi^{(v)}(x)$ des § 7, Nr. 4:

$$\begin{aligned} B_\xi^{(v)}(x) &= A_\xi^{(v)}(x) + \sum_x \left\{ E_x^{(v)}(\xi) + \sum_i \alpha_{xi} \Phi_i^{(v)}(\xi) \right\} \Phi_x(x) \\ &= A_\xi^{(v)}(x) + \sum_x B_{a_x}^{(v)}(\xi) \Phi_x(x). \end{aligned}$$

Diese Form von x hat noch die Eigenschaften des § 7, Nr. 5, $a)$ in $x = \xi$, bleibt aber, entgegengesetzt der Eigenschaft $e)$, auch noch für $\xi = a_x$ benutzbar. Und zwar wird, indem man $x = a_x$ in die letzte Formel einsetzt:

$$B_{a_x}^{(v)}(x) = B_x^{(v)}(a_x).$$

Die Vertauschungsgleichung von Nr. 4 dieses Paragraphen giebt jetzt:

$$B_\xi^{(v)}(x) = D_x P_{xy}^{(v)}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \sum_x \Phi_x^{(v)}(\xi) B_{a_x}(x),$$

wo die $P_{xy}^{(v)}(\xi)$ in § 8, Nr. 4 definiert sind.

§ 10.

Darstellung von algebraischen Formen.

1. Die Formeln von Nr. 2, bez. Nr. 4 und 5 des vorigen Paragraphen liefern die in § 5, Nr. 1 angezeigte Darstellung der algebraischen Normal- bezüglich kanonischen Formen 2^{ter} Gattung von x

$$A_{\xi}^{(v)}(x), \text{ bez. } B_{\xi}^{(v)}(x),$$

mittels des D_x einer algebraischen Function von x , einer Summe von p auf feste Punkte a_1, \dots, a_p bezüglichen Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung von x und einer Form $\Phi^{(1)}(x)$, in *explíciter Gestalt*. Man hat hiernach

$$A_{\xi}^{(1)}(x) \equiv D_{\xi} P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) = D_x P_{xy}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \\ + \sum_x \Phi_x(\xi) \cdot E_x(x) - \sum_x E_x(\xi) \cdot \Phi_x(x),$$

$$A_{\xi}^{(v)}(x) = D_x P_{xy}^{(v)}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \sum_x \Phi_x^{(v)}(\xi) \cdot E_x(x) - \\ - \sum_x E_x^{(v)}(\xi) \cdot \Phi_x(x),$$

und allgemeiner:

$$B_{\xi}^{(v)}(x) = D_x P_{xy}^{(v)}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \sum_x \Phi_x^{(v)}(\xi) B_{ax}(x),$$

wo die linke Seite von den Punkten a_1, \dots, a_p gar nicht abhängt. Ausführlicher geschrieben lautet diese Gleichung:

$$\begin{vmatrix} B_{\xi}^{(v)}(x) & B_{a_1}(x) & \dots & B_{a_p}(x) \\ \varphi_1^{(v)}(\xi) & \varphi_1(a_1) & \dots & \varphi_1(a_p) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_p^{(v)}(\xi) & \varphi_p(a_1) & \dots & \varphi_p(a_p) \end{vmatrix} = D_x P_{xy}^{(v)}(\xi; a_1, \dots, a_p).$$

2. Sei jetzt zunächst eine algebraische Form

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)}$$

vorgelegt, welche, wie in § 3, Nr. 2, in den von einander endlich verschiedenen Punkten

$$x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

je ∞^1 wird. Und zwar darf man annehmen, dass $\mathfrak{M}(x)$ in diesen Punkten gar nicht, $\mathfrak{N}(x)$ je einfach verschwindet. Man hat dann eine Darstellung (§ 3, Nr. 2):

$$\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)} = \sum_1^r \gamma_i P_{\xi_i \eta}(x; a_1, \dots, a_p) + \sum_1^p \alpha_i \Phi_i(x),$$

wo zunächst, damit die rechte Seite in dem willkürlichen Punkte η nicht mehr unendlich wird,

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

ist (wie schon in § 6, Nr. 8 gesagt; Residuensatz).

Setzt man $x = \xi_i$, so wird:

$$\gamma_i = \lim_{x=\xi_i} \frac{(cx\xi_i)}{f_c(\xi_i)} \cdot \frac{\mathfrak{M}(\xi_i)}{\mathfrak{N}(x)} = -\mathfrak{M}(\xi_i) \lim_{x=\xi_i} \frac{d\omega_x}{d\mathfrak{N}(x)}.$$

Wegen $\mathfrak{N}(\xi_i) = 0$ wird aber

$$\lim_{x=\xi_i} \frac{d\mathfrak{N}(x)}{d\omega_x} = \lim_{x=\xi_i} \frac{(c\mathfrak{N}f)}{\sum_1^s c_i x_i}$$

unabhängig von den c ; und somit

$$\gamma_i = \mathfrak{M}(\xi_i) \frac{\sum c_i \xi_{ii}}{(c\mathfrak{N}f)_{x=\xi_i}}.$$

In dieser Form drückt die Gleichung $\sum_i \gamma_i = 0$ den bekannten

„Jacobi'schen Satz“ (Cr. J. Bd. XIV, pag. 281) aus.

Zur Bestimmung der α_i setze man $x = a_i$, wonach:

$$\alpha_i = \frac{\mathfrak{M}(a_i)}{\mathfrak{N}(a_i)}.$$

3. Ist allgemein eine algebraische Form vorgelegt

$$\frac{M(x)}{N(x)},$$

welche in den Punkten

$$x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$$

bez. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \dots, \infty^{\nu_s}$$

wird, so hat man in den Reductionsformeln des § 3 für einen dieser Punkte, $x = \xi$, eine Gliedersumme

$$S(x) = \beta_{r-1} A_{\xi}^{(r-1)}(x) + \beta_{r-2} A_{\xi}^{(r-2)}(x) + \dots + \beta_1 A_{\xi}^{(1)}(x) + \gamma P_{\xi \eta}(x),$$

deren Coefficienten β, γ nun weiter zu behandeln sind. Zu dem Zwecke muss man das Verhalten von $\frac{M(x)}{N(x)}$ in der Nähe von $x = \xi$ kennen; d. h. aus den in § 7, Nr. 5 benutzten Vergleichsformen von x eine Reihe

$$S'(x) = \beta'_{v-1} D_x \frac{(cyx)^{v-1}}{(c\xi x)^{v-1}} + \beta'_{v-2} D_x \frac{(cyx)^{v-2}}{(c\xi x)^{v-2}} + \dots + \beta'_1 D_x \frac{(cyx)}{(c\xi x)} + \gamma' \frac{(cy\xi) f_c(x)}{(cyx)(cx\xi)}$$

derart bilden, dass $\frac{M(x)}{N(x)} - S'(x)$ in $x = \xi$ nicht mehr unendlich wird; was nach dem successiven Verfahren des § 3 geschehen kann. Nach § 7, Nr. 5, bez. Nr. 2 hat man dann:

$$\beta_i = \frac{\beta'_i}{(i-1)! f_c(\xi) (cy\xi)^{i-2}}, \quad (i = 1, 2, \dots, v-1),$$

$$\gamma = \gamma'.$$

Somit, indem man die auf die verschiedenen Punkte ξ_1, \dots, ξ_s bezüglichen Summen S durch untere Indices unterscheidet:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \sum_1^s S_i(x) + \sum_1^p \alpha_i \Phi_i(x).$$

Dabei wird auch hier, wegen des Punktes η :

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

und, indem man $x = a_i$ setzt:

$$\alpha_i = \frac{M(a_i)}{N(a_i)}.$$

Um die Reduction zu vollenden, wird man in den Summen $S(x)$ alsdann die $A_{\xi}^{(i)}(x)$ durch die aus § 9, Nr. 5 und § 10, Nr. 1 hervorgehenden Ausdrücke

$$D_x P_{xy}^{(i)}(\xi; a_1, \dots, a_p) + \sum_1^p \{ \Phi_{\pi}^{(i)}(\xi) B_{a_{\pi}}(x) - B_{a_{\pi}}^{(i)}(\xi) \Phi_{\pi}(x) \}$$

ersetzen; womit die in § 5 geforderte Reduction geleistet ist.

§ 11.

Darstellung von $D_{\xi} \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ und von $D_{\xi} \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$, wo $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ eine beliebige algebraische Function von ξ ist.

1. Seien $\chi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ zwei ganze Functionen r^{ter} Ordnung der Coordinaten von ξ . Die algebraische Function von ξ :

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

werde in den Punkten x_1, x_2, \dots, x_r , bez. in den Ordnungen

$$v_1, v_2, \dots, v_r$$

unendlich; in den Punkten y_1, y_2, \dots, y_r , bez. in den Ordnungen

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$$

zu 0; wobei also

$$\sum \nu_i = \sum \mu_i$$

ist. Dann wird die algebraische Form von ξ

$$D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)} D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r} \frac{(\psi \chi f)}{\psi(\xi) \chi(\xi)}$$

sowohl in den x , als in den y , je zu ∞^1 . Um das Verhalten daselbst genauer anzugeben, so werde $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in $\xi = x$ zu ∞^v wie (s. § 8, Nr. 4)

$$\frac{A(\xi)}{(c\xi x)^v}$$

wo $A(\xi)$ eine ganze Function v^{ter} Ordnung der Coordinaten von ξ , welche für $\xi = x$ von 0 verschieden ist; so wird

$$\begin{aligned} \lim_{\xi=x} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} &= \frac{(c\xi x)^v}{A(x)} \lim_{\xi=x} D_\xi \frac{A(\xi)}{(c\xi x)^v} = \lim \frac{\sum c_i f_i \cdot \sum A_i(x) \cdot x_i}{A(x) (c\xi x)} \\ &= \frac{v f_c(x)}{(c\xi x)} \end{aligned}$$

und ebenso für $\xi = y$:

$$\lim_{\xi=y} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = -\mu \frac{f_c(y)}{(c\xi y)}.$$

Entwickelt man also nach Normalformen dritter und erster Gattung, so findet sich:

$$D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r \nu_i P_{x_i, z}(\xi) - \sum_1^{r'} \mu_i' P_{y_i, z}(\xi) + \sum_1^p \lambda_i \Phi_i(\xi),$$

wobei die λ_i sich durch die Substitution $\xi = a_i$ ergeben:

$$\lambda_i = \lim_{\xi=a_i} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r} \left[\frac{(\psi \chi f)}{\psi(\xi) \chi(\xi)} \right]_{\xi=a_i}.$$

In dieser Darstellung ist nur vorausgesetzt, dass keiner der willkürlichen festen Punkte a_i mit einem der Punkte x_i, y_i' zusammenfalle.

2. Um die algebraische Form von ξ

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

zu reduciren, führe ich zunächst die algebraische Function von ξ

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

auf die einfachsten, in § 8 Nr. 1 und 4 behandelten algebraischen Functionen von ξ :

$$P_{\xi\eta}^{(i)}(x; a_1, \dots, a_p)$$

zurück. Zuerst sei der Fall betrachtet, dass $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in den Punkten

$$\xi = x_1, x_2, \dots, x_r$$

nur je einfach unendlich werde; Punkte die übrigens zunächst als von den p festen Punkten a_1, \dots, a_p verschieden angenommen werden sollen. Dann kann man setzen:

$$(1) \quad \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_1^r c_i P_{\xi\eta}(x_i).$$

Denn hier kann man zunächst die c_i so bestimmen, dass die Differenz der beiden Ausdrücke für keinen der r Punkte x_i zu unendlich wird; diese Differenz ist aber dann eine algebraische Function von ξ , welche nur für $\xi = a_1, \dots, a_p$ zu je ∞^1 werden soll, d. h. eine Constante, die $= 0$ wird, da beide Seiten für $\xi = \eta$ verschwinden.

Mittels $\xi = x_i$ folgt dabei:

$$(2) \quad \begin{aligned} c_i &= \lim_{\xi=x_i} \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} \frac{(c x_i \xi)}{f_o(\xi)} = \lim_{\xi=x_i} \frac{1}{D_{\xi} \frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}} \\ &= \chi(x_i) \left[\frac{\sum \alpha_i \xi_i}{(\alpha \psi f)} \right]_{\xi=x_i} = \frac{r \chi^2(x_i)}{(\chi \psi f)_{\xi=x_i}}. \end{aligned}$$

In $\xi = a_\kappa$ verhält sich $P_{\xi\eta}(x_i)$, nach § 8 Nr. 1, wie

$$\frac{f_o(a_\kappa)}{(c \xi a_\kappa)} \Phi_\kappa(x_i);$$

und da die rechte Seite der Gleichung (1) daselbst nicht unendlich werden soll, muss sein

$$(3) \quad \sum_1^r c_i \Phi_\kappa(x_i) = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, p),$$

oder, wenn $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ irgend p linear von einander unabhängige Formen erster Gattung sind:

$$(3') \quad \sum_1^r c_i \varphi_\kappa(x_i) = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, p),$$

Diese p Gleichungen sagen aus, dass man auf der rechten Seite von (1) die r Parameter c_1, c_2, \dots, c_r nicht willkürlich annehmen kann, wenn man eine algebraische Function von ξ erhalten will, die höchstens in $\xi = x_1, x_2, \dots, x_r$ zu ∞^1 werden soll. Vielmehr haben die c zu diesem Zwecke die Gleichungen (3), oder (3'), aber auch nur diese, zu erfüllen. (3') stellt, wenn σ linear von einander unabhängige

Curven φ durch die Gruppe x_1, x_2, \dots, x_r hindurchgehen ($\sigma \geq 0$) — d. h. wenn von der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_r) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_p(x_1) & \dots & \varphi_p(x_r) \end{vmatrix}$$

alle $(p - \sigma + 1)$ -reihigen, aber nicht alle $(p - \sigma)$ -reihigen Determinanten verschwinden —, $p - \sigma$ unabhängige lineare Bedingungen für die c_i vor; was, die additive Constante von (1) eingeschlossen, $r - p + \sigma + 1$ linear von einander unabhängige Functionen liefert, die in x_1, \dots, x_r zu ∞^1 werden sollen.

Dieses ist der sogen. „Riemann-Roch'sche Satz“, ausgesprochen für den Fall *einfacher* Unendlichkeitspunkte. Indessen ist damit zugleich der allgemeinste Fall bewiesen, indem man statt $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ nur die Function $\frac{\chi(\xi)}{\lambda\psi(\xi) + \mu\chi(\xi)}$ betrachtet, welche bei genügend allgemeinen λ, μ nur je einfach unendlich wird. Uebrigens ist die Gleichung (3') identisch mit dem Residuensatze

$$\sum_i \gamma_i = 0$$

von § 10, Nr. 2, wenn man für die dortige Form $\frac{\mathfrak{M}(x)}{\mathfrak{N}(x)}$ die Form

$$\frac{\chi(x)}{\psi(x)} \varphi_x(x)$$

setzt. Und da sowohl der Residuensatz als der gewöhnliche Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes (Math. Ann. 7) auf dem „Reductionsatz für algebraische Formen, bez. Functionen“ beruht, so sind beide Beweise des R.-R.'schen Satzes nicht wesentlich von einander verschieden. —

Es ist noch der Fall zu besprechen, dass einer der Punkte x_i mit einem Punkte a_x zusammenfällt. Man sieht dann sofort, dass auch hier Gleichung (1) noch gilt; nur dass das Glied $c_x P_{\xi\eta}(a_x; a_1, \dots, a_p)$ einfach herausfällt, und dass von den Gleichungen (3) die x te zur Bestimmung der übrigen c nichts mehr beiträgt, also ebenfalls weggelassen werden kann.

Aus (1) ergibt sich endlich durch den D_ξ -Process, unter Einführung der § 9, Nr. 4 definirten kanonischen Form 2ter Gattung $B_x(\xi)$, und nach Gleichung (3):

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_i c_i D_\xi P_{\xi\eta}(x_i) = \sum_i c_i D_\xi \left[B_{x_i}(\xi) - \sum_x \Phi_x(x_i) B_{a_x}(\xi) \right],$$

also

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r \chi(x_i) \cdot \left[\frac{\sum \alpha_i \xi_i}{(\alpha \psi f)} \right]_{\xi=x_i} \cdot B_{x_i}(\xi),$$

als Entwicklung des D_{ξ} der algebraischen Function von ξ nach auf die Unstetigkeitspunkte bezüglichen kanonischen Formen 2^{ter} Gattung erster Ordnung von ξ .

Die letzte Gleichung würde sogar noch richtig bleiben, wenn in der Definition von $B_x(\xi)$ in § 9, N. 4 α_{ix} nicht $= \alpha_{xi}$ angenommen wäre.

3. Sei jetzt

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

eine beliebige algebraische Function; die in den Punkten

$$x_1, x_2, \dots, x_r$$

je in den Ordnungen

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$$

unendlich werde. Hier kann man, wie in Nr. 2, setzen:

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_1^r \sum_1^{\nu_i} c_{i,i} P_{\xi\eta}^{(i)}(x_i).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten $c_{i,i}$ bei gegebener Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ dient das § 8, Nr. 4 angegebene Verhalten. Es werde diese Function von ξ in der Nähe von $\xi = x_i$ unendlich wie:

$$\sum_1^{\nu_i} x_{i,i} \frac{(cy\xi)^i}{(cx_i\xi)^i},$$

so wird

$$c_{i,i} = \frac{x_{i,i}}{(i-1)! f'_c(x_i) \cdot (cyx_i)^{i-2}}.$$

Sind nur die Punkte x_1, \dots, x_r und die Ordnungen ν_1, \dots, ν_r gegeben, so sind die $c_{i,i}$ nicht willkürlich; vielmehr ergeben sich wieder p , im Allgemeinen nicht unabhängige, Bedingungsgleichungen, die man mittels $\xi = \alpha_x$, wobei die rechte Seite der Gleichung nicht unendlich werden soll, erhält (§ 8, Nr. 4). Dieselben schreiben sich hier:

$$\sum_1^r \sum_1^{\nu_i} c_{i,i} \Phi_x^{(i)}(x_i) = 0, \quad (x = 1, 2, \dots, p).$$

Wendet man auf obige Gleichung den D_{ξ} -Process an, so wird:

$$\begin{aligned} D_{\xi} \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} &= \sum_i \sum_i c_{i,i} D_{\xi} P_{\xi\eta}^{(i)}(x_i) \\ &= \sum_i \sum_i c_{i,i} B_{x_i}^{(i)}(\xi) \quad (\S 10, \text{Nr. 1}), \end{aligned}$$

als Entwicklung des D_{ξ} der allgemeinsten algebraischen Function von ξ nach auf die Unstetigkeitspunkte bezüglichen kanonischen Formen 2^{ter} Gattung von ξ .

§ 12.

Die Sätze der §§ 9—11 bei Einführung von corresidualen Gruppen von je $p + 1$ Punkten.

1. Drei zu einander corresiduale Gruppen von je $p + 1$ Punkten seien

$$(1) \quad \begin{cases} (x; x_1, x_2, \dots, x_p), \\ (\xi; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p), \\ (\eta; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p). \end{cases}$$

Dabei soll x nicht fest, d. h. x_1, x_2, \dots, x_p nicht durch eine Curve \wp verknüpft sein; ebenso seien ξ, η beweglich gedacht. Die Gruppen gehören einer ∞^1 -Schaar an. Man hat dann zunächst

$$P_{z\eta}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) = c \cdot \frac{P_{z\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{z\xi}(x; x_1, \dots, x_p)},$$

wo c von z unabhängig ist. Denn die linke Seite stellt eine algebraische Function von z vor, welche in der zweiten der obigen 3 Gruppen zu ∞^1 , in der dritten zu 0^1 , in der ersten also zu einer Constanten wird; die rechte Seite ist eine algebraische Function von z , welche in der ersten Gruppe ebenfalls den constanten Werth c annimmt, in der zweiten Gruppe also zu ∞^1 , in der dritten Gruppe zu 0^1 wird, also mit der linken Seite identisch.

Man hat aus $z = x$:

$$c = P_{x\eta}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p);$$

aber auch, aus $z = \xi + d\xi$, wobei die linke Seite zu

$$\frac{f_x(\xi)}{(a\xi z)} = \frac{1}{d\omega_\xi},$$

die rechte Seite zu

$$\frac{c \cdot P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) d\omega_\xi}$$

wird:

$$c = \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p)} = D_\xi \lg P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p).$$

Somit:

Sobald die beiden Gruppen

$$(1') \quad \begin{cases} (x; x_1, \dots, x_p) \\ (\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) \end{cases}$$

einander corresidual sind, hat man, bei beliebigen z, η, ξ die Relationen:

$$(2) \quad P_{x\eta}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) = D_\xi \lg P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) \frac{P_{x\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{x\xi}(x; x_1, \dots, x_p)} = \\ = - D_\xi \lg(\mu - \lambda),$$

wo

$$\mu = \frac{P_{x\xi}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{x\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}, \quad \lambda = \frac{P_{\xi\xi}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p)};$$

$$(3) \quad P_{x\eta}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) \cdot P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) = D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p),$$

also auch, durch Vertauschung der x mit den ξ :

$$(4) \quad D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) = D_x P_{xy}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p).$$

(4) stellt das Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument in neuer und bemerkenswerth einfacher Gestalt dar. Dabei ist aber zu beachten, dass, wenn etwa x, x_1, \dots, x_p, ξ als unabhängige Grössen genommen werden, die Differentialableitung D_x nur nach dem explicit in $P_{xy}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p)$ stehenden x zu nehmen ist, nicht auch nach dem implicit in ξ_1, \dots, ξ_p enthaltenen x .

2. Gleichung (4) soll nun auf den in § 9, Nr. 4 definirten Ausdruck $B_\xi(x)$ angewandt werden, nachdem zuerst die x_1, \dots, x_p , bez. die ξ_1, \dots, ξ_p , aus (1') an Stelle der dortigen a_1, \dots, a_p gesetzt worden, von denen $B_\xi(x)$ unabhängig ist. Man hat:

$$(5) \quad B_\xi(x) = D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) + \sum_1^p \Phi_i(x; x_1, \dots, x_p) B_\xi(x_i),$$

$$(5') \quad B_x(\xi) = D_x P_{xy}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) + \sum_1^p \Phi_i(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) B_x(\xi_i);$$

also wegen (4) und $B_\xi(x) = B_x(\xi)$:

Für zwei corresiduale Gruppen (1') ist auch:

$$(6) \quad \sum_1^p \Phi_i(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) B_x(\xi_i) = \sum_1^p \Phi_i(x; x_1, \dots, x_p) B_\xi(x_i),$$

wo

$$\Phi_i(x; x_1, \dots, x_p) = \sum_1^p \frac{\partial \lg \sum \pm \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_p(x_p)}{\partial \varphi_n(x_i)} \cdot \varphi_n(x),$$

also

$$\Phi_i(x_i; x_1, \dots, x_p) = 1, \quad \Phi_i(x_n; x_1, \dots, x_p) = 0, \quad (n \geq i).$$

Statt (6) kann man auch schreiben:

$$(6') \quad \sum_1^p \Phi_i(x; x_1, \dots, x_p) D_\xi P_{\xi\eta}(x_i; a_1, \dots, a_p) - D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1, \dots, a_p) = \\ = \sum_1^p \Phi_i(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) D_x P_{xy}(\xi_i; b_1, \dots, b_p) - D_x P_{xy}(\xi; b_1, \dots, b_p);$$

bei willkürlichen a und b ; was nur wieder Glch. (4) vermöge § 7, Nr. 2, d) ist.

Nimmt man ferner in Glch. (2) die Ableitung nach z , so ergibt sich, da

$$D_z \frac{P_{z\eta}}{P_{z\xi}} = - \frac{P_{\xi\eta} D_z P_{z\xi}}{P_{z\xi}^2},$$

für zwei corresiduale Gruppen (1') auch die Beziehung:

$$\begin{aligned} (7) \quad D_z P_{z\eta}(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) &= - \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) \cdot D_z P_{z\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{z\xi}^2(x; x_1, \dots, x_p)} \\ &= - D_z D_\xi \lg(\mu - \lambda) \end{aligned}$$

und somit auch, nach der Definition von $B_z(\xi)$:

$$\begin{aligned} (8) \quad \sum_1^p \Phi_i(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) B_z(\xi_i) - B_z(\xi) &= \\ &= \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) \cdot D_z P_{z\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{z\xi}^2(x; x_1, \dots, x_p)}, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} (8') \quad \sum_1^p \Phi_i(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p) D_z P_{z\eta}(\xi_i; b_1, \dots, b_p) - D_z P_{z\eta}(\xi; b_1, \dots, b_p) &= \\ &= \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x; x_1, \dots, x_p) \cdot D_z P_{z\eta}(x; x_1, \dots, x_p)}{P_{z\xi}^2(x; x_1, \dots, x_p)} = \\ &= - D_\xi P_{\xi\eta}(z; z_1, \dots, z_p), \end{aligned}$$

wenn $(z; z_1, \dots, z_p)$ corresidual zu $(\xi; \xi_1, \dots, \xi_p)$.

Dies ist eine Entwicklung einer Normalform 2^{ter} Gattung von z , oder des D_ξ einer algebraischen Function von ξ , die in $p+1$ Punkten z, z_1, \dots, z_p zu ∞^1 wird, von ganz anderem Charakter, als die durch (5) für $x=z$ dargestellte, welche ein specieller Fall der Entwicklungen von § 10 und § 11, Nr. 2 war.

(Fortsetzung folgt.)

Erlangen, Juni 1890.