# Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

---

Bekanntlich hat H. Hankel, dessen scharfsinnige Publicationen den Verlust, welchen die Wissenschaft durch sein frühzeitiges Hinscheiden zu beklagen hat, aufs deutlichste hervortreten lassen, kurze Zeit vor seinem Ende eine Abhandlung veröffentlicht in Form eines Tübinger Universitätsprogramms (zum 6. März 1870): „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt".

Es finden sich in dieser Schrift geistvolle, dem damaligen Standpunkte der betreffenden Fragen vollkommen entsprechende, auf genauer Kenntniss der einschlägigen Literatur beruhende, wenn auch in mancher Beziehung nicht ganz strenge Erörterungen über den Umfang des allgemeinen Functionsbegriffs und die ersten beachtenswerthen Versuche, Unterschiede ausfindig zu machen, auf welche eine naturgemässe Classification der betreffenden Begriffsgebiete gegründet werden könne. Jedenfalls hat diese Arbeit anregend auf die bezügliche Richtung der mathematischen Forschung gewirkt, wie man an vielen später erschienenen Untersuchungen anderer Mathematiker ersehen kann, z. B. an dem verdienstvollen Werke von Herrn Ulisses Dini: „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali".

Dasselbe enthält einzelne Kapitel, welche ausdrücklich der genaueren Untersuchung und Umgrenzung von Fragen gewidmet sind, die H. Hankel, wesentlich angeregt durch Riemann's Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen, zum ersten Mal in obengenannter Abhandlung einer ausführlichen und selbständigen Besprechung unterzogen hat.

Der interessanteste Abschnitt in der Hankel'schen Arbeit, auf dessen völlige Klarstellung die Bestrebungen des Herrn Dini mit Erfolg gerichtet waren, bezieht sich auf eine Methode, welche von

Hankel „*Condensationsprincip der Singularitäten*“ genannt wird und mit welchem es ihm gelingt, aus Functionen $\varphi(x)$, die an einer gegebenen Stelle, $(x = 0)$, irgend eine Singularität (wie etwa eine Unstetigkeit oder den Mangel eines bestimmten Differentialquotienten) darbieten, andere Functionen herzustellen, welche dieselbe Art von Singularität nicht allein an unendlich vielen Stellen zeigen, sondern sogar an einer Mannichfaltigkeit von Stellen, welche, wie ich mich ausdrücke, in jedem Intervalle *überalldicht* ist (s. Mathem. Ann. Bd. XV, pag. 2). Es ist dies die Menge aller Stellen, für welche $x$ eine rationale Zahl ist.

Das besagte Princip besteht einfach in der Bildung folgender Function:

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi\big(\sin(\nu\pi x)\big),$$

wobei durch angemessene Wahl der Reihencoefficienten $c_\nu$ für die Convergenz dieser Reihe sowohl, wie der aus ihr hervorgehenden Reihen, soweit letztere gebraucht werden, gesorgt werden muss. —

Diese von Hankel erfundene Methode der Condensation von gegebenen Singularitäten auf alle rationalen Stellen der Veränderlichen $x$ birgt, so einfach sie scheint und so verdienstlich sie zweifellos auch gewesen ist, doch mancherlei Mängel in sich, die schon in einer kurzen Besprechung hervortreten, welche ich sehr bald nach Erscheinen der Hankel'schen Schrift über dieselbe gegeben habe. (M. s. Literarisches Centralblatt v. 1871, pag. 150, v. 18. Februar).

*Erstens* ist die Untersuchung der Function $f(x)$ dadurch erschwert, dass die auf eine Stelle $x = \frac{p}{q}$ übertragene Singularität an unendlich vielen Gliedern der Reihe gleichzeitig auftritt, nämlich an allen denjenigen Gliedern, in welchen, wenn $p$ und $q$ relativ prim sind, $\nu$ ein ein Vielfaches von $q$ ist; dadurch tritt die Möglichkeit einer gegenseitigen Compensation der Irregularitäten ein und es wird bestenfalls die Mühe gefordert, den Nachweis zu führen, dass diese Eventualität nicht vorliege.

*Zweitens* führt man durch die Anwendung des Sinus unter dem Functionszeichen $\varphi$ Schwankungen herbei, die den Gang der Function $f(x)$ in überflüssiger und mit dem gesetzten Ziele gar nicht zusammenhängender Weise compliciren.

*Drittens* endlich entbehrt die Hankel'sche Methode insofern der *Allgemeinheit*, als die Mannichfaltigkeit der Stellen, auf welche die Singularität von $\varphi(x)$ übertragen wird, die Menge der *rationalen Zahlen* ist und es ist nicht abzusehen, in wie weit sich das Princip auf andere Mengen von Singularitätsstellen verallgemeinern liesse.

Nun bildet aber die Menge aller rationalen Zahlen ebenso wie andere Mannichfaltigkeiten, welche viel umfassender und inhaltreicher sind, wie beispielsweise die Menge *aller algebraischen Zahlen*, wie ich vor acht Jahren gefunden, eine sogenannte *abzählbare Menge*, (m. s. Borchardt's J., Bd. 77, pag. 242, Bd. 84, pag. 250, ferner Math. Ann. Bd. XV, pag. 4); d. h. man kann eine solche Menge, *unerachtet* und trotz ihres *Ueberalldichtseins* in jedem Intervalle, (auf viele Weisen) nach einem bestimmten leicht zu definirenden Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\omega_\nu$, wo $\nu$ ein positiver unbeschränkter ganzzahliger Index ist, bringen, so dass jedes Glied oder Element der Menge an einer bestimmten Stelle $\nu$ dieser Reihe steht und auch umgekehrt jedes Glied $\omega_\nu$ der Reihe ein Element der gedachten Mannichfaltigkeit ist. — Diese Bemerkung führt, worauf mich Herr Weierstrass aufmerksam gemacht hat, zu einer viel einfacheren Methode der *Condensation von Singularitäten* als die Hankel'sche ist, und, was die Hauptsache zu sein scheint, es ist diese Methode zugleich frei von allen Umständen, welche die Anwendung jener älteren zugleich beschränken und erschweren. Ist wiederum $\varphi(x)$ eine gegebene Function mit der einzigen singulären Stelle $x = 0$ und hat man eine beliebige *abzählbare* Menge von Werthen, die wir $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots$ nennen, beispielsweise die Menge aller *algebraischen* Zahlen, so setze man:

$$\text{(II)} \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu),$$

wo durch passende Wahl der Coefficienten für die absolute und gleichmässige Convergenz der Reihe für $f(x)$ und nöthigenfalls auch der aus ihr abgeleiteten oder mit ihr zusammenhängenden Reihen gesorgt werde.

Man erhält auf diese Weise Functionen, welche an *allen* Stellen $x = \omega_\mu$ dieselbe Art der Singularität haben, wie $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$, und an den übrigen Stellen, welche von den Stellen $\omega_\mu$ verschieden sind, wird sich $f(x)$ im Allgemeinen regulär verhalten. Der Vorzug unserer Methode vor der älteren dürfte, neben der einfacheren Bildungsweise, auf den Umstand zurückzuführen zu sein, dass die auf die Stelle $x = \omega_\mu$ übertragene Singularität *ausschliesslich* dem *einen* Gliede der Reihe (II) zu verdanken ist, in welchem $\nu = \mu$ ist, während alle übrigen Glieder, in denen $\nu$ von $\mu$ verschieden ist, sich an der Stelle $x = \omega_\mu$ regulär verhalten und auch ihre Gesammtheit, bei gehöriger Wahl der Coefficienten $c_\nu$, keine fremdartige Complication herbeiführt.

Auf diese Weise scheint, da sowohl die Function $\varphi(x)$ nach Massgabe des jeweiligen Bedürfnisses und desgleichen auch die *abzählbare*

Menge der Singularitätsstellen $\omega_\mu$ *frei* gewählt werden können, ein ziemlich weites Feld für singuläre Functionsbildungen und deren Untersuchung eröffnet, welches denjenigen Fachgenossen vielleicht nicht unwillkommen sein wird, die sich für die Ausbildung der Functionenlehre in der auch von Hankel mit Erfolg betretenen Richtung interessiren.

Indem ich mir vorbehalte, auf diesen Gegenstand ausführlicher zurückzukommen, möchte ich hier nur auf zwei besondere Fälle aufmerksam machen, die ich der Güte meines hochverehrten früheren Lehrers, des Herrn Weierstrass verdanke.

Das erste betrifft die Annahme $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, womit bei passender Wahl der positiven Coefficienten $c_\nu$ eine Function $f(x)$ gewonnen wird, die endlich und stetig für alle endlichen reellen Werthe von $x$ ist, mit $x$ gleichzeitig zu- und abnimmt, und dennoch die Eigenthümlichkeit hat, an allen Stellen $x = \omega_\mu$ einen unendlich grossen Differentialquotienten zu besitzen. Das zweite Beispiel erlaube ich mir wörtlich, abgesehen von unbedeutenden Vereinfachungen, in der Darlegung des grossen Mathematikers zu geben.

Es sei $x$ eine reelle Veränderliche und:

$$(1) \qquad \varphi(x) = x - \frac{1}{2}\, x \sin\left(\frac{1}{2} \log(x^2)\right),$$

wo dem Logarithmus von $x^2$ sein reeller Werth gegeben werden soll; so ist $\varphi(x)$ differentiirbar für jeden von Null verschiedenen Werth der Grösse $x$ und es liegt der Differentialquotient:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(x^2)\right) \end{aligned}$$

beständig in dem durch die beiden Grenzen $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ bezeichneten Intervalle. Sind daher $x_1$, $x_2$ irgend zwei bestimmte Werthe und setzt man:

$$(3) \qquad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\, \varphi(x_1, x_2),$$

so ergiebt sich zunächst für den Fall, wo $x_1$, $x_2$ dasselbe Zeichen haben, dass der Werth von $\varphi(x_1, x_2)$ ebenfalls in dem angegebenen Intervalle liegt. Da aber $\varphi(x)$ eine durchweg stetige Function ist, so gilt das Gesagte auch, wenn eine der Grössen $x_1$, $x_2$ gleich Null ist. Haben endlich diese Grössen verschiedene Zeichen, so hat man:

$$\varphi(x_2) = x_2\,\varphi(0, x_2), \quad \varphi(x_1) = x_1\,\varphi(x_1, 0),$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\left\{\frac{x_2}{x_2 - x_1}\,\varphi(0, x_2) + \frac{-x_1}{x_2 - x_1}\,\varphi(x_1, 0)\right\}$$

und es ist demnach, da $\frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $\frac{-x_1}{x_2 - x_1}$ positive Grössen und die Summe derselben gleich 1 ist, $\varphi(x_1, x_2)$ ein Mittelwerth zwischen $\varphi(0, x_2)$ und $\varphi(x_1, 0)$, also nach dem eben Bemerkten auch jetzt in dem genannten Intervalle enthalten. Man hat daher in allen Fällen:

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dies vorausgeschickt sei nun:

$$(5) \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_\nu, \cdots$$

*irgend eine abzählbare* Mannigfaltigkeit von reellen unter einander verschiedenen Zahlwerthen, ferner:

$$(6) \qquad c_1, c_2, c_3, \cdots, c_\nu, \cdots$$

eine unendliche Reihe *positiver* Grössen, welche nur die Bedingungen zu erfüllen hat, dass die *beiden* Reihen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega_\nu]\, c_\nu$$

convergiren. (Ich bemerke, dass was auch die Reihe (5) sei, die Reihe (6) immer so gewählt werden kann, dass diese beiden Bedingungen zugleich realisirt sind. Besonders einfach lässt sich solches erreichen, wenn (5) aus *allen algebraischen* Zahlen in *derjenigen Anordnung* besteht, welche ich in Borchardt's Journal Bd. 77, pag. 259 aufgestellt habe. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass bei dieser Anordnung sämmtlicher reellen algebraischen Zahlen immer $[\omega_\nu] < \nu$; es genügt also in diesem Falle $c_\nu = k^\nu$ zu setzen, um jenen beiden Bedingungen zu genügen, vorausgesetzt nur $k > 0$ und $< 1$.)

Nun definire man eine Function $f(x)$ mittels der Gleichung:

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi(x - \omega_\nu),$$

so ist $f(x)$ eine continuirliche Function, welche ebenso wie $\varphi(x)$ mit der Veränderlichen $x$ gleichzeitig wächst und abnimmt und über deren Differentiirbarkeit sich folgendes feststellen lässt:

1. Giebt man der Veränderlichen $x$ einen Werth $x_0$, der *nicht* in der Reihe (5) enthalten ist, so nähert sich der Quotient:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wenn die Veränderliche $h$ irgendwie unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze und diese wird erhalten, wenn man in der angegebenen Reihe (7) von jedem einzelnen Gliede die Ableitung bestimmt und dann $x = x_0$ setzt.

Zunächst folgt aus (2) und der über die Grössen $c_\nu$ gemachten Annahme, dass die Reihe:

$$(8) \qquad g(x_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi'(x_0 - \omega_\nu)$$

einen bestimmten endlichen Werth hat. Unter $\mu$ eine beliebige ganze positive Zahl verstehend, sei nun:

$$(9) \qquad \begin{cases} S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \\ S'_\mu = \sum_{\mu+1}^{\infty} c_\nu \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \end{cases}$$

ferner:

$$(10) \qquad \begin{cases} f_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu), \\ F_\mu(x) = f(x) - f_\mu(x) = \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu), \\ C_\mu = \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu, \end{cases}$$

so wird:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} + \frac{F_\mu(x_0+h) - F_\mu(x_0)}{h},$$

und es ist nach dem Obigen für einen beliebigen von Null verschiedenen Werth der Grösse $h$:

$$(11) \qquad C_\mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{F_\mu(x_0+h) - F_\mu(x_0)}{h} \leqq C_\mu\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Man hat also:

$$(12) \qquad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g(x_0) + \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} - S_\mu - S'_\mu + C_\mu \Theta_\mu,$$

wo:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \Theta_\mu \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nun sei $\delta$ eine beliebig klein angenommene positive Grösse, so kann man der Zahl $\mu$ einen so grossen Werth geben, dass für jeden Werth von $h$ der absolute Betrag von

$$- S'_\mu + C_\mu \Theta_\mu$$

kleiner als $\delta$ ist. Da nun ferner:

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} = S_\mu,$$

so folgt aus (12), dass der Werth von $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ stets zwischen $g(x_0) - 2\delta$ und $g(x_0) + 2\delta$ liegt, sobald der absolute Betrag von $h$

unterhalb einer bestimmten Grenze angenommen wird, d. h. dass $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, wenn $h$ unendlich klein wird, sich der bestimmten endlichen Grenze $g(x_0)$ nähert; w. z. b. w.

2. Giebt man dagegen der Veränderlichen $x$ einen in der Reihe (5) enthaltenen Werth $\omega_\lambda$, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$$

keiner bestimmten Grenze, sondern schwankt zwischen zwei verschiedenen endlichen Grenzen in der Art, dass es unter den Werthen von $h$, welche kleiner als eine beliebig angenommene Grösse sind, stets solche giebt, für welche der in Rede stehende Quotient einen zwischen den genannten Grenzen beliebig anzunehmenden Werth hat.

Es giebt nämlich unter den Gliedern der Reihe (7) eines, das dem Werthe $\nu=\lambda$ entspricht; trennt man dasselbe ab und setzt:

$$f(x)=c_\lambda\varphi(x-\omega_\lambda)+F(x), \tag{13}$$

so hat man:

$$\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}=c_\lambda\frac{\varphi(h)}{h}+\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega^\lambda)}{h} \tag{14}$$

$$=c_\lambda\left(1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)\right)+\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}.$$

Der Quotient $\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}$ nähert sich nach dem unter 1. Bewiesenen, wenn $h$ unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze, die mit $G(\omega_\lambda)$ bezeichnet werde. Die Function $1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)$ kann aber, eine wie kleine obere Grenze man auch für den absoluten Betrag von $h$ festsetzen möge, jeden in dem Intervalle

$$\frac{1}{2}\ldots\frac{3}{2}$$

enthaltenen Werth annehmen.

Der Werth des Quotienten $\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$ schwankt also in der angegebenen Weise zwischen den Grenzen;

$$\frac{1}{2}c_\lambda+G(\omega_\lambda) \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}c_\lambda+G(\omega_\lambda),$$

was man auch so ausdrücken kann:

Der in Rede stehende Quotient kann für unendlich kleine Werthe von $h$ jeden zwischen den angegebenen Grenzen liegenden Werth annehmen. Die Function $f(x)$ hat also für die der Reihe $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\lambda, \cdots$ angehörigen Werthe von $x$ keinen bestimmten Differentialquotienten, obwohl der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei gegebenem Werth von $x$ für jeden Werth von $h$ zwischen zwei angebbaren Grenzen bleibt.

Halle a. d. S., den 11. Februar 1882.