This conclusion has been verified for critical cubics and cusped quartics. In the special case, when the cusped quartics unite in a point, $d=-1$, $\kappa=\frac{1}{4}$, $\lambda=1$, the preceding quintic becomes

$$-\frac{1}{27}(\xi-1)^4(4\xi-3).$$

The former factor denotes the foci, which unite and disappear; the latter, the single focus which remains.

13. This memoir is a companion to a paper on a corresponding group of Bicircular Quartics, which was published in Vol. XII., No. 167, of the *Proceedings.**

If the discriminating curves in the two memoirs be compared, the sequence and variation of quartics will be seen to be similar. The spherical stapete of the first of these curves is represented *in plano* by one cusp at a finite, and another at an infinite distance; the node of the stapete also is withdrawn to infinity.

14. Since duality is perfect in spherics, this memoir exhibits also the enumeration of class-quartics, with a quadruple focus and a triple cyclic arc, if the coordinates x, y be interpreted as the cotangents of the arcs intercepted by a tangent arc to the curve on the arcs of coordinates.†

Sur les Surfaces Parallèles. By Prof. A. Mannheim.

[*Read June 9th*, 1881.]

Une droite A, normale en son point a à une surface (S), se déplace en restant constamment normale en ce point à cette surface: ses points ont pour surfaces trajectoires des surfaces parallèles à (S). Les propriétés des trajectoires des points de la normale A, relativement à ces surfaces parallèles, sont des cas particuliers des propriétés générales concernant les trajectoires des points d'une droite mobile quelconque.‡

---

* The case was not considered *in plano*, when d was infinite. The equations of the discriminating curves become

$$256\kappa\lambda^3+27=0,\quad 256\kappa\lambda^3=1.$$

No singular quartic is possible, except in the terminal form of point-quartics.

Moreover, in No. 166, Fig. 6 of the second discriminating curve is incomplete. The omitted portion is found as the locus of (κ, λ) from the equations

$$\kappa u^4=-\lambda=-\tfrac{1}{4}(u^2+ud).$$

† The paragraphs in [ ] have been added since the paper was read.

‡ Voir: "Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace" (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, Tome 1, page 106), et "Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions" (*Journal de Mathématiques de M. Resal*, 3me Série, Tome 1, page 57).

Je n'examinerai pas, dans le cas des surfaces parallèles, ce que deviennent ces propriétés générales, dont quelques unes sont alors illusoires; je ferai seulement quelques remarques relatives à certaines trajectoires particulières, et je passerai tout de suite à l'objet principal de ce travail, qui est d'établir des propriétés nouvelles dépendant des éléments du 3ᵉ ordre.

§ I.

Soient a, a_1, a_2 ... des points arbitraires marqués sur A. Ces points, que nous appellerons *correspondants*, décrivent pendant le déplacement de A les trajectoires *correspondantes* (a), (a_1), (a_2) ... ; nous dirons aussi que les tangentes at, a_1t_1 ... à ces lignes sont des *tangentes correspondantes*.

Pour tous les déplacements de A, à partir d'une position de cette droite, les trajectoires des points correspondants sont normales à A; par suite les surfaces trajectoires de ces points ont, pour normale commune, la droite A. Ceci est vrai, quelle que soit la position de A ; donc :

Les normales à une surface (S) *sont aussi normales aux surfaces* (S_1), (S_2), (S_3) *qui lui sont parallèles.*

De là résulte immédiatement que :

(S) *et ses surfaces parallèles ont les mêmes normalies, les mêmes plans de sections principales et la même développée.*

Et par suite, comme on le sait :

Sur les surfaces parallèles, les lignes de courbure sont des lignes correspondantes.

Si (a) est une ligne asymptotique de (S), elle est la ligne de striction de la normalie à (S), qui a cette courbe pour directrice. Il résulte de là que *les lignes correspondantes à une ligne asymptotique ne sont pas des lignes asymptotiques.*

Il faut pourtant excepter le cas où la ligne asymptotique est plane: alors toutes les lignes correspondantes sont des lignes asymptotiques. Par exemple, la cyclide de Dupin est touchée par des plans suivant des circonférences qui sont des lignes asymptotiques et auxquelles correspondent des circonférences analogues sur les surfaces parallèles, qui sont des cyclides comme la première.

Si (a) est une ligne géodésique de (S), ses plans osculateurs sont normaux à cette surface et par suite ils sont tangents à la normalie à (S) dont (a) est la directrice. Cette courbe (a) est alors une ligne asymptotique de cette normalie, et les normales à (S), génératrices de cette normalie, sont les normales principales de (a). Pour qu'une des lignes correspondantes à cette courbe soit aussi une ligne géodésique sur la surface parallèle qui la contient, elle doit donc avoir les mêmes normales principales que (a). Afin qu'il en soit ainsi, en vertu d'une propriété connue, les courbures de (a) doivent être liées par une relation linéaire. Nous voyons donc que :

Parmi les lignes correspondantes à une ligne géodésique (a), *on aura une ligne géodésique, si entre les courbures de* (a) *il existe une relation linéaire.*

Circonscrivons des surfaces cylindriques à (S) et aux surfaces qui lui sont parallèles. Les lignes de contact (a), (a_1), (a_2) ... des surfaces (S), (S_1), (S_2) ... avec ces cylindres sont des lignes correspondantes. Elles appartiennent à une normalie (A), commune à toutes ces surfaces, et dont les génératrices sont parallèles à un même plan (V), qui est perpendiculaire aux génératrices des cylindres.

Les traces (a'), (a'_1), (a'_2) ... de ces cylindres sur (V) sont les lignes de contour apparent des surfaces parallèles sur ce plan, et ces lignes sont des courbes parallèles.

La génératrice $a\tau$ du cylindre circonscrit à (S), qui passe par le point a, est la tangente conjuguée de la tangente at à (a). De même en a_1, nous avons les tangentes conjuguées a_1t_1, $a_1\tau_1$, et ainsi de suite pour a_2, a_3 ... Les droites $a\tau$, $a_1\tau_1$, $a_2\tau_2$ ... sont dans un même plan (C), qui est le plan central de (A) pour la génératrice A.

Le plan de déviation de (S) relatif à la tangente at, c'est-à-dire le lieu des axes de déviation* des sections faites dans (S) par des plans passant par at, est un plan qui contient $a\tau$ et est perpendiculaire à (V). Sa projection sur (V) est alors une simple droite, issue de a'. Cette droite est l'axe de déviation de la courbe de contour apparent (a') pour le point a'. Ceci peut se répéter pour les plans de déviation de (S_1), (S_2) ... relativement aux tangentes correspondantes à at. Mais les axes de déviation des courbes parallèles (a'), (a'_1), (a'_2) ... pour les points correspondants a'_1, a'_2, ..., passent par un même point;† par conséquent *les plans de déviation, dont ces droites sont les projections, passent par une même droite perpendiculaire à* (V).

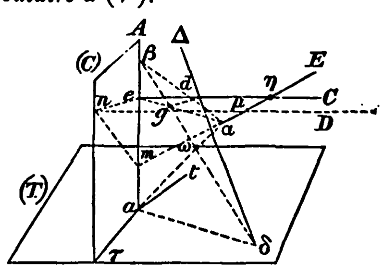

Fig. 1.

Appelons e (Fig. 1) le point central de (A), situé sur A, et C la normale en e à la normalie (A), c'est-à-dire la perpendiculaire au plan central (C).

La projection de e sur (V) est le centre de courbure de la courbe de contour apparent (a'), et le point de convergence des axes de déviation des courbes de contour apparent est sur la projection de C sur (V). Ce point de convergence

---

* Il s'agit ici des droites que le Rev. G. Salmon appelle "Axis of aberrancy" (Voir: *Higher Plane Curves*, 2nd Edition, p. 355).

† Cela résulte de la construction de l'axe de déviation en un point d'une courbe, obtenues en faisant usage du centre de courbure de la développée de cette courbe et de cette remarque que des courbes parallèles ont même développée.

est la projection sur ce plan de la droite E par laquelle passent les plans de déviation des surfaces parallèles pour les tangentes correspondantes à at. Cette droite E, parallèle à ar, rencontre O à angle droit. Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème :

Th. I.—*Les plans de déviation de surfaces parallèles, relatifs à des tangentes correspondantes at, $a_1 t_1$ ... se coupent suivant une même droite E. Cette droite perpendiculaire à la normale commune A à ces surfaces, coupe à angle droit la normale O à la normalie (A), élevée du point central de cette surface situé sur A.*

Menons par at le plan qui coupe (S) suivant une section surosculée par un cercle. Le rayon de ce cercle surosculateur appartient au plan de déviation de (S) relatif à at, il rencontre alors E. Donc :

Th. II.—*Si par des tangentes correspondantes at, a_1t_1, on mène des plans qui coupent des surfaces parallèles suivant des sections qui sont respectivement surosculées par un cercle; les rayons de ces circonférences issues des points correspondants a, a_1, a_2 ..., s'appuient sur une même droite E.*

Dans le cas particulier où le plan, qui coupe l'une des surfaces suivant une section surosculée par un cercle contient la normale A, alors la droite E rencontre cette normale et pour que les rayons des cercles surosculateurs des autres sections rencontrent cette droite, ils doivent se confondre avec A.

Nous voyons ainsi que :

Th. III.—*Si parmi les plans menés par des tangentes correspondantes et qui coupent des surfaces parallèles suivant des sections surosculées par un cercle, l'un d'eux est un plan normal à ces surfaces, il en est de même de tous les autres.**

Reprenons le cas où la droite E ne rencontre pas A. Les rayons des cercles surosculateurs s'appuient sur cette droite E et sont tangents au paraboloïde des normales à la normalie (A), relatif à A.

Comme E est parallèle au plan central (C), qui est un plan directeur de ce paraboloïde des normales, ces rayons appartiennent à un paraboloïde qui contient E, et qui est de raccordement avec le paraboloïde des normales, ou encore qui est normal à (A) le long de A. Nous ajoutons alors :

Th. IV. — *Les rayons des cercles surosculateurs, qui entrent dans l'énoncé du théor. II., appartiennent à un paraboloïde qui contient E et qui est normal à (A) le long de (A).*

---

* Ce théorème, dû à M. Ribaucour, a été l'occasion du présent travail. Il résulte de ce théorème que *les lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles* (considérés par M. de la Gournerie) *se correspondent sur les surfaces parallèles.* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 Mars, 1875.)

Autrement : *Ces rayons rencontrent une infinité de droites parallèles au plan* (C).

Le paraboloïde lieu de ces rayons a pour plan directeur le plan central (C), et, comme C est une de ses génératrices, son second plan directeur est perpendiculaire à (C). Ainsi :

Th. V.—*Les rayons des cercles surosculateurs, qui entrent dans l'énoncé du Th. II., se projettent sur le plan* (C) *suivant des droites parallèles entr'elles.*

Menons par la normale A un plan faisant un angle de 45° avec le plan central (C). Ce plan est normal à la normalie (A) en un point m, qui est à une distance du point central e égale à κ : paramètre de distribution des plans tangents à (A). Ce plan coupe E en un point μ. La droite $m\mu$ est le rayon du cercle surosculateur relatif à la tangente correspondante à at, menée par le point m.

Le plan qui projette orthogonalement $m\mu$, *sur le plan* (C), *est le second plan directeur du paraboloïde des rayons des cercles surosculateurs.*

Ce plan coupe le plan (C, E) suivant une droite D parallèle à C, et il coupe le plan (C) suivant la droite mn. De la construction de mn, il résulte que $en = e\eta$.

Nous connaissons bien maintenant la situation des rayons des cercles surosculateurs et nous allons nous occuper des axes de courbure des sections surosculées par ces cercles.

Construisons l'axe de courbure relatif au point a de la section surosculée par un cercle et qui passe par at. Pour cela, déterminons d'abord le rayon du cercle surosculateur de cette section. Par le point a, je mène un plan parallèle au plan directeur (m, D), il coupe E au point α ; $a\alpha$ est le rayon du cercle surosculateur relatif à at. Le plan $(A, a\alpha)$ est normal à la normalie (A) au point a et tangent à cette normalie au point β, qui est tel que $ea \times e\beta = \kappa^2$. Le point β est le centre de courbure de la section faite dans (S) par le plan (A, at),* l'axe de courbure cherché est alors la perpendiculaire $\beta\delta$, abaissée du point β sur le rayon $a\alpha$.

Appelons g le point où cet axe rencontre $e\alpha$. Dans le triangle $a\alpha\beta$, les droites αe, $\beta\delta$ sont deux hauteurs, on a

$$eg \times e\alpha = ea \times e\beta = \kappa^2.$$

D'après cela, on voit que *pour les points correspondants à* α, *les points, tels que* g, *appartiennent à la circonférence transformée de* E *par rayons vecteurs réciproques.*

Le centre de cette circonférence est sur C puisque cette droite est perpendiculaire à E. En élevant alors la perpendiculaire gd à eg, nous obtenons l'extrémité d du diamètre ed de cette circonférence.

---

* Voir, mon *Cours de Géométrie descriptive*, page 279.

Le plan de l'axe de courbure $\beta\delta$ et de la droite gd contient la normale en β à la normalie (A), il coupe alors le paraboloïde des normales à (A) suivant une autre droite. Mais il coupe déjà la normale C au point δ, donc il rencontre le paraboloïde des normales suivant la génératrice Δ de cette surface qui passe par d. On voit de là que $\beta\delta$ est la projection de Δ sur le plan normal en a à (a). Ainsi :

TH. VI.—*Les sections surosculées par des cercles tangentes en a_1, a_2, aux traces de (A) sur les surfaces parallèles, ont pour axes de courbure des droites qu'on obtient en projetant une droite Δ sur les plans respectivement normaux en ces points à ces traces.*

De là résulte tout de suite que :

TH. VII.—*Le lieu des axes de courbure des sections surosculées par des cercles, qui entrent dans l'énoncé précédent, est un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont respectivement perpendiculaires à A t à Δ.*

La circonférence qui a ed pour diamètre est l'une de ces sections, et comme l'on a

$$ed \times e\eta = \kappa^2,$$

nous pouvons dire :

TH. VIII.—*Le produit des distances du point central e aux droites Δ et E est égal au carré du paramètre de distribution des plans tangents à la normalie (A).*

L'axe de courbure $\beta\delta$, qui est perpendiculaire sur $a\alpha$, rencontre ce rayon en un point ω, qui est le centre du cercle surosculateur tangent à at. Pour trouver le lieu des points tels que ω, nous n'avons qu'à chercher la ligne d'intersection du paraboloïde des rayons tels que $a\alpha$ et de l'hyperboloïde lieu des axes tels que $\beta\delta$.

Ces deux surfaces ont en commun la droite A, et la partie restante de leur intersection est alors une cubique gauche. Ainsi :

TH. IX.—*Le lieu des centres des cercles surosculateurs relatifs aux tangentes correspondantes at, a_1t_1, a_2t_2 ... est une cubique gauche.*

L'axe de courbure $\beta\delta$ rencontre Δ au point δ de la droite $a\delta$ normale à (A). Ce point δ, qui est dans le plan tangent en a à (S), est alors le centre de courbure géodésique de la section surosculée par un cercle dont le plan est ωat. Comme le point a est arbitraire nous voyons que :

TH. X.—*Les courbes surosculées par des cercles, tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles entr' elles, ont leurs centres de courbure géodésique sur une même droite.*

La droite Δ, génératrice du paraboloïde des normales à (A), se projette sur le plan tangent (T) suivant une parallèle à la trace du plan central (C) sur le même plan (T). Le segment $a_1\delta_1$* analogue à $a\delta$ étant parallèle à (T) se projette sur ce plan sans altération de grandeur. Au moyen de cette projection on voit que ces segments sont inversement proportionnels aux cosinus des angles qu'ils font avec le plan qui touche (A) au point à l'infini sur A.

La droite A, et la génératrice de (A) qui lui est infiniment voisine, déterminent sur (a) et sur la ligne correspondante (a_1) des arcs infiniment petits qui sont dans le même rapport. De là ce théorème :

TH. XI.—*Les sections surosculées par des cercles, tangentes en* a_1, a_2... *aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles, ont, en ces points correspondants, des angles de contingence géodésique égaux entr'eux.*

§ II.

Les théorèmes que nous venons de démontrer ne sont pas particuliers aux sections surosculées par des cercles tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles. Nous allons trouver des théorèmes analogues pour d'autres courbes en suivant une route absolument inverse de celle suivie jusqu'à présent.

Commençons par déterminer les centres de courbure géodésique de ces courbes. Pour cela, j'ai besoin de rappeler la construction de certaines droites dont j'ai eu déjà l'occasion de faire voir l'utilité pour démontrer des propriétés qui dépendent des éléments du 3ᵉ ordre.†

Soient b et c (Fig. 2) les centres de courbure principaux des surfaces (S), (S_1) ... situés sur la normale A. Toutes les normalies, dont les directrices sont tangentes en a à (a) sont osculatrices entr'elles aux points b et c. En ces points, les indicatrices de ces normalies ont les mêmes asymptotes : l'une de ces droites est A, et les autres sont bb', cc'. Ce sont ces deux droites dont je vais faire usage.

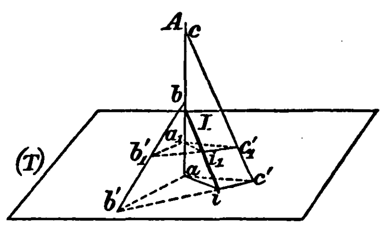

FIG. 2.

Les courbes dont je parlerai d'abord et dont voici la définition sont les *courbes à courbure normale constante*.‡ Appelons les Σ. La courbe Σ est telle que les plans normaux à (S), qui lui sont tangents, déterminent dans cette surface des sections pour lesquelles les rayons de courbure sont égaux ; ces rayons de courbure étant relatifs aux points où les plans normaux à (S) touchent Σ.

Traçons sur (S) une courbe Σ tangente en a à at. Pour déterminer

---

* Ce segment n'est pas représenté sur la figure.

† *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Séances du 22 Mars, 1875, et du 6 Mars, 1876.

‡ Voir, Ribaucour: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* Séance du 15 Mars, 1875.

le centre de courbure géodésique de Σ au point a, on a la construction suivante :*

On prend sur le plan tangent (T) les traces b', c' des droites bb', cc' ; on joint les points b' et c' par une droite; cette droite coupe en i la normale ai à (a), le point i est le centre de courbure géodésique de Σ.

Traçons sur (S_1) une courbe Σ tangente en a_1 à a_1t_1, et construisons, au moyen d'une droite $b_1'c_1'$, le centre de courbure géodésique i_1 de cette courbe.

Pour toutes les surfaces parallèles à (S) nous aurons de la même manière des points tels que i, i_1 ... *Je dis que tous ces points sont en ligne droite.*

Les droites ai, a_1i_1 sont normales à la normalie (A) et appartiennent alors au paraboloïde des normales à cette normalie. Ce paraboloïde a pour plan directeur le plan (T) et le plan central (C).

Les droites $b'c'$, $b_1'c_1'$ ... appartiennent aussi à un paraboloïde ; celui-ci a pour plan directeur le plan (T) et pour directrices les droites bb', cc'.

Ces deux paraboloïdes, qui ont un plan directeur commun, ont aussi en commun les normales en b et c aux nappes de la développée de (S).

La partie restante de leur intersection est donc une simple droite. Nous l'appellerons I. On a ce théorème :

Th. XII.—*Les centres de courbure géodésique des courbes à courbure normale constante, tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles entr'elles, sont en ligne droite.*

Dans le cas particulier où l'un des centres de courbure géodésique est à l'infini, la droite I est toute entière à l'infini et nous avons comme conséquence un théorème analogue au théorème III.

Comme précédemment on démontre que :

Th. XIII.—*Les angles de contingence géodésique des courbes à courbure normale constante, qui sont tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles, sont égaux entr'eux.*

Le plan (A, ai), (Fig. 3), qui est normal en a à Σ, est tangent à la normalie (A) au point β, centre de courbure de la section faite dans (S) par le plan (A, at). La droite βi est alors l'axe de courbure de Σ relatif au point a. Mais puisque I est une génératrice du paraboloïde des normales à (A) cette droite est rencontrée non seulement par ai, mais aussi par la normale au point β à cette

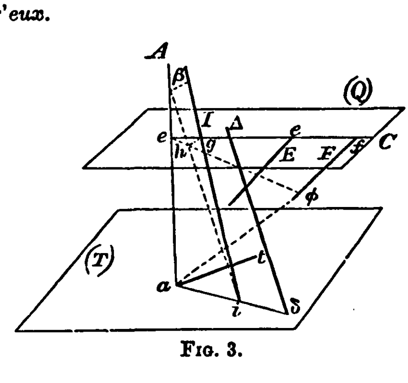

Fig. 3.

* Voir, Ribaucour : *loc. cit.*

surface, c'est à dire par la perpendiculaire élevée du point β au plan (Aai). On voit ainsi que βi est la projection de I.* Ceci est vrai pour les courbes Σ relatives aux lignes correspondantes (a), (a_1) ... Donc:

TH. XIV. — *Le lieu des axes de courbure des courbes à courbure normale constante, tangentes aux traces d'une normalie sur des surfaces parallèles, est un hyperboloïde dont les plans des sections circulaires sont respectivement perpendiculaires à A et I.*

La normale principale de Σ au point a est la perpendiculaire abaissée de ce point sur βi. Appelons ϕ le point où cette perpendiculaire rencontre le plan (Q) perpendiculaire à A au point central e, et appelons h le point où βi rencontre le même plan. Les points e, h, ϕ sont en ligne droite, et l'on a $eh \times e\phi = ea \times e\beta = \kappa^2$;

mais les points tels que h appartiennent à la section circulaire suivant laquelle le plan (Q) coupe l'hyperboloïde des axes de courbure des courbes Σ: donc le lieu des points tels que ϕ est une droite, transformée par rayons vecteurs réciproques de cette circonférence. Cette droite que nous appellerons F est perpendiculaire au diamètre eg de la circonférence transformée. Elle est donc parallèle à la droite E, dont nous avons parlé précédemment.

Les normales principales des courbes Σ relatives aux points correspondants a, a_1, a_2, sont donc des droites qui s'appuient sur une droite F et qui sont tangentes au paraboloïde des normales à A. Comme F est parallèle au plan directeur de ce paraboloïde, nous pouvons dire:

TH. XV.—*Pour les points correspondants a, a_1, a_2, les normales principales des courbes à courbure normale constante, menées tangentiellement aux traces d'une normalie sur les surfaces parallèles, appartiennent à un paraboloïde hyperbolique.*

Les plans directeurs de ce paraboloïde sont le plan central (C) et un plan perpendiculaire à I. Rapprochons ce que nous venons de trouver de ce que nous avons établi précédemment pour les sections surosculées par des cercles.

En vertu d'un beau théorème dû à M. Ribaucour,† on sait que:

$$ai = \frac{2}{3} a\delta.$$

On en conclut facilement que:

$$\text{Tang}\,(A, I) = \frac{2}{3}\,\text{Tang}\,(A, \Delta).$$

* On peut remarquer que la projection de I sur le plan (A, C) est parallèle à A et que cette projection contient le point de rencontre des projections sur le même plan des droites bb', cc' représentées (Fig. 2).

† *Loc. cit.*

Comme les droites A, I, Δ sont parallèles au plan (C), on a :

$$\frac{ej}{ed} = \frac{ai}{a\delta} = \frac{2}{3}.$$

Mais $$ej = \frac{\kappa^2}{ef}, \quad ed = \frac{\kappa^2}{e\eta},$$

on a donc aussi : $$\frac{e\eta}{ef} = \frac{2}{3}.$$

Telle est la relation de position des droites E, F.

On sait que $3e\eta$ est égal au rayon de courbure de la développée des courbes de contour apparent (a'), (a'_1) ... des surfaces parallèles ; nous voyons donc que *ce rayon de courbure est aussi égal à* $2ef$.*

§ III.

On voit, par ce que nous venons de dire des courbes Σ, qu'il nous a suffi de démontrer le Th. XII., pour arriver à tous les théorèmes analogues à ceux que nous avions trouvés précédemment dans le § 1er.

On a encore des théorèmes analogues à ceux-ci pour les lignes dont je vais parler maintenant.

Traçons sur (S) et tangentiellement à (a) en a une courbe qui coupe sous des angles égaux les lignes de courbure de l'un des systèmes de (S). Nous appellerons cette courbe *une ligne trajectoire des lignes de courbure de* (S). Nous aurons de même sur (S_1), tangentiellement à (a_1) en a, une ligne trajectoire des lignes de courbure de (S_1), et ainsi de suite pour les surfaces parallèles à (S).

Le centre de courbure géodésique de la ligne trajectoire tracée sur (S) tangentiellement à (a) en a, s'obtient en prenant sur le plan (T) le point de rencontre l de la normale al à cette courbe avec la trace du paraboloïde des huit droites relatif à (S).† Ce paraboloïde est le même pour toutes les surfaces parallèles à (S), et les droites telles que al appartiennent au paraboloïde des normales à la normalie (A).

Ces deux paraboloïdes ont en commun : les normales élevées des centres de courbure principaux b et c aux nappes de la développée de (S), et comme ils ont un plan directeur commun la partie restante de leur ligne d'intersection est une droite. On a donc ce théorème :

Th. XVI.—*Les lignes trajectoires des lignes de courbure des surfaces parallèles, qui sont menées tangentiellement aux traces d'une normalie sur ces surfaces, ont leur centre de courbure géodésique sur une même droite.*

De là, on peut déduire, comme au § II., toute une suite de théorèmes.

---

* Ce rayon de courbure est aussi égal à $\frac{2\kappa^2}{ej}$. Je montrerai, dans une autre occasion, comment on peut établir directement cette relation.

† *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences.* Séance du 2 Avril, 1877.