

## Hamiltonsche Gruppen.

Von

ERNST WENDT in Bremen.

Nicht kommutative Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, hat Herr Dedekind\*) „*Hamiltonsche*“ genannt. Die kleinste dieser Gruppen ist eine Gruppe achter Ordnung, welcher Herr Dedekind den Namen „*Quaternionengruppe*“ gegeben hat. Ihren Aufbau will ich im folgenden als bekannt voraussetzen. Dagegen will ich hier die Resultate, welche Herr Dedekind in bezug auf die allgemeinsten *Hamiltonschen* Gruppen gewonnen hat, in modifizierter und, wie ich glaube, einfacherer Weise herleiten.

Der eigentlichen Diskussion will ich zwei Sätze vorausschicken, die vielfach Anwendung bei gruppentheoretischen Untersuchungen finden und im folgenden benutzt werden sollen.

Hilfssatz I: *Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Normalteiler einer Gruppe  $\mathfrak{G}$ , und ist ihr größter gemeinsamer Teiler  $\mathfrak{D}$ , so besteht zwischen irgend zwei Elementen  $A$  und  $B$  von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  eine Relation von der Form*

$$B^{-1}AB = AD,$$

*wo  $D$  ein Element in  $\mathfrak{D}$  bedeutet, und die Ordnung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ist  $\frac{a \cdot b}{d}$ , wo  $a, b, d$  die Ordnungszahlen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$  bezeichnen.*

Für  $\mathfrak{D} = 1$  ergibt sich hieraus der

Hilfssatz II: *Haben zwei Normalteiler einer Gruppe außer der Einheit kein Element gemeinsam, so ist jedes Element des einen mit jedem Element des andern vertauschbar.*

Es sei nun  $\mathfrak{G}$  eine Hamiltonsche Gruppe. Sind  $p_1, p_2, \dots$  die verschiedenen in der Ordnung von  $\mathfrak{G}$  aufgehenden Primzahlen und  $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots$  die höchsten darin enthaltenen Potenzen derselben, so besitzt  $\mathfrak{G}$  nach dem

\*) Math. Ann. Bd. 48, S. 548.

Sylowschen Satze Untergruppen von den Ordnungszahlen  $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots$ . Da diese nach der über  $\mathfrak{G}$  gemachten Voraussetzung Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  sein müssen und je zwei derselben außer 1 kein Element gemeinsam haben können, so ist nach Hilfssatz II jedes Element des einen mit jedem Element des andern vertauschbar. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser Gruppen ist daher deren direktes Produkt, dessen Ordnung gleich  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ , also gleich der Ordnung von  $\mathfrak{G}$  ist, und das demnach, da es ja in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist, mit  $\mathfrak{G}$  übereinstimmen muß.

Satz III: *Jede Hamiltonsche Gruppe ist das direkte Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung.*

Es bedeute jetzt  $\mathfrak{G}$  eine Hamiltonsche Gruppe, welche zur Ordnung eine Primzahlpotenz  $p^\alpha$  hat. Die Ordnung jedes in einer solchen Gruppe enthaltenen Elementes ist, da sie in  $p^\alpha$  aufgehen muß, eine Potenz von  $p$ . Es sei  $A$  ein Element von der Ordnung  $p^k$  und  $B$  ein solches von der Ordnung  $p^{k_1}$ , und es sei  $k_1 \geq k$ . Die durch die Potenzen von  $A$  und  $B$  gebildeten zyklischen Gruppen mögen  $\mathfrak{A}$  resp.  $\mathfrak{B}$  heißen; ihre Ordnungen sind dann  $p^k$  resp.  $p^{k_1}$ . Ihr größter gemeinsamer Divisor  $\mathfrak{D}$ , der als Untergruppe einer zyklischen Gruppe selbst zyklisch sein muß und deren Elemente Potenzen von  $A$  und  $B$  zugleich sind, möge die Ordnung  $p^l$  haben. Es handelt sich um die Aufstellung der Bedingungen, unter denen  $A$  nicht mit  $B$  vertauschbar ist. Zunächst ist klar, daß zu dem Ende  $l$  von  $k$  verschieden sein muß, denn im Falle  $l = k$  wäre ja  $\mathfrak{A}$  ein Teiler von  $\mathfrak{B}$ . Es sei demgemäß  $l < k$  vorausgesetzt. Ist  $\mathfrak{C}$  das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , also die durch Komposition von  $A$  und  $B$  erzeugte Gruppe, so ist, da ja  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  sind, nach Hilfssatz I:

$$(1) \quad B^{-1}AB = AD_1,$$

wo  $D_1$  ein Element in  $\mathfrak{D}$  bedeutet, und die Ordnung von  $\mathfrak{C}$  ist gleich  $p^{k_1+k-l}$ . Die niedrigste in  $\mathfrak{D}$  enthaltene Potenz von  $B$  ist die  $p^{k_1-l}$ te. Wird diese mit  $D$  bezeichnet, so kann  $D$  als erzeugendes Element der zyklischen Gruppe  $\mathfrak{D}$  aufgefaßt werden, und es muß, da die  $p^{k-l}$ te, aber keine niedrigere Potenz von  $A$  zu  $\mathfrak{D}$  gehört,  $A^{p^{k-l}} = D^u$  sein, wo  $u$  relativ prim zu  $p$  ist.

Da  $D_1$  als Element von  $\mathfrak{D}$  Potenz von  $A$  und  $B$  zugleich ist, so muß es mit  $A$  und  $B$  vertauschbar sein. Es folgt daher für beliebige positive oder negative ganze Zahlen  $\sigma$  und  $\tau$ :

$$(2) \quad B^{-\tau} A^\sigma B^\tau = A^\sigma D_1^{\sigma \cdot \tau},$$

woraus sich für  $\sigma = p^{k-l}$ ,  $\tau = 1$

$$(3) \quad D_1^{p^{k-l}} = 1$$

ergibt, und weiter für positive ganze Zahlen  $q$ :

$$(4) \quad (B^\tau A^\sigma)^q = B^{q \cdot \tau} A^{q \cdot \sigma} D_1^{\sigma \cdot \tau \cdot \frac{q(q-1)}{2}}.$$

Setzt man hierin

$$\sigma = 1, \quad \tau = -u \cdot p^{k_1-k}; \quad q = p^{k-l},$$

so erhält man, wenn man noch die folgenden Bezeichnungen einführt,

$$(5) \quad A_1 = B^{-u \cdot p^{k_1-k}} A, \quad \text{also} \quad A = B^{u \cdot p^{k_1-k}} A_1,$$

$$v = -\frac{u \cdot (p^{k-l} - 1)}{2}$$

und ferner von den Gleichungen

$$(6) \quad B^{p^{k_1-l}} = D; \quad A^{p^{k-l}} = D^u$$

Gebrauch macht,

$$(7) \quad A_1^{p^{k-l}} = D_1^{p^{k_1-l} \cdot v}.$$

Das Element  $A_1$  gehört zufolge seiner Definition der durch  $A$  und  $B$  erzeugten Gruppe  $\mathfrak{G}$  von der Ordnung  $p^{k_1+k-l}$  an. Weil sich ferner nach (5)  $A$  durch Komposition von  $A_1$  und  $B$  darstellen läßt, so ergibt sich, daß man an Stelle von  $A$  und  $B$  auch  $A_1$  und  $B$  als Erzeugende der Gruppe  $\mathfrak{G}$  ansehen kann. Ihrer Ordnung kann daher auch die Form  $p^{k_1+k'-l'}$  gegeben werden, wo  $p^{k'}$  die Ordnung von  $A_1$  und  $p^{l'}$  die Ordnung des größten gemeinsamen Divisors  $\mathfrak{D}'$  der beiden durch  $A_1$  und  $B$  erzeugten zyklischen Gruppen bedeutet. Infolgedessen ist  $k-l = k'-l'$ , also  $k' \geq k-l$ .

Ist nun  $p$  von 2 verschieden, so ist  $v$  eine ganze Zahl, und es folgt aus Gleichung (7) mit Hilfe von (3)

$$(8) \quad A_1^{p^{k-l}} = 1,$$

weil ja  $k_1-l \geq k-l$  ist. Da hiernach  $k' \leq k-l$  ist, so muß  $k' = k-l$ , also  $l' = 0$  und  $\mathfrak{D}' = 1$  sein. Nach Hilfssatz II ist demnach  $A_1$  mit  $B$  vertauschbar, also  $\mathfrak{G}$  eine Abelsche Gruppe. Die ihr angehörigen Elemente  $A$  und  $B$  müssen daher miteinander vertauschbar sein. Somit gilt der

**Satz IV:** *Hamiltonsche Gruppen, deren Ordnung die Potenz einer von 2 verschiedenen Primzahl ist, existieren nicht.*

Falls  $p = 2$  ist, läßt sich die Gleichung (8) nicht allgemein schließen, weil  $v$  keine ganze Zahl ist, wohl aber in dem Falle, daß  $k_1 > k$  ist, weil dann  $k_1-l-1 > k-l-1$ , also  $k_1-l-1 \geq k-l$  und daher

$$2^{k_1-l} \cdot v = -u \cdot 2^{k_1-l-1} \cdot (2^{k-l}-1)$$

durch  $2^{k-l}$  teilbar ist. In derselben Weise wie vorher im Falle  $p > 2$  ergibt sich dann die Vertauschbarkeit von  $A$  und  $B$  und sonach der folgende

**Satz V:** *In einer Hamiltonschen Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, sind Elemente von ungleicher Ordnung miteinander vertauschbar.*

Um nun noch den Fall  $k_1 = k$  zu erledigen, erhebe man beide Seiten der Gleichung (7) ins Quadrat. Dann findet man mit Hilfe von (3)

$$A_1^{2^{k-l+1}} = D_1^{2^{k-l} \cdot 2v} = 1,$$

weil  $2v$  eine ganze Zahl ist. Ist nun  $l \geq 2$ , also  $k - l + 1 \leq k - 1$ , so folgt aus der letzten Gleichung, daß die Ordnung von  $A_1$  ein Teiler von  $2^{k-1}$  ist. Ist aber  $l = 1$ , also die Ordnung von  $\mathfrak{D}$  gleich 2, und gleichzeitig  $k > 2$ , so ergibt sich aus Gleichung (7)  $A_1^{2^{k-1}} = 1$ , weil dann die Zahl  $2^{k-1} \cdot v = 2^{k-2} \cdot 2v$  noch durch 2 teilbar ist und  $D_1$  als Element von  $\mathfrak{D}$  der Bedingung  $D_1^2 = 1$  genügt. In den vorliegenden Fällen ist also die Ordnung von  $A_1$  kleiner als die von  $B$ , nach Satz V müssen demnach  $A_1$  und  $B$  permutabel sein. Aus der Vertauschbarkeit von  $A_1$  und  $B$  folgt aber, wie vorhin gezeigt wurde, auch die von  $A$  und  $B$ . Ist schließlich  $l = 0$ , so ist  $\mathfrak{D} = 1$ , also auch  $D_1 = 1$  und infolgedessen  $A$  mit  $B$  vertauschbar.

Nach diesen Untersuchungen können also im Falle  $p = 2$  zwei Elemente  $A$  und  $B$  nur dann nicht permutabel sein, wenn gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind:  $k > l$ ,  $k_1 = k$ ,  $l = 1$ ,  $k \leq 2$ , die sich in die einfacheren umgestalten lassen:  $l = 1$ ,  $k_1 = k = 2$ . Da in diesem Falle  $D_1$  mit  $D$  übereinstimmen muß, so läßt sich der Satz aussprechen:

**Satz VI:** *In einer Hamiltonschen Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, müssen zwei nicht vertauschbare Elemente die folgenden Gleichungen befriedigen*

$$(9) \quad \begin{aligned} A^2 &= B^2 = D; \quad D^2 = 1, \\ AB &= BAD, \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichung auch in der Form schreiben kann

$$BA = ABD.$$

Durch zwei auf diese Weise definierte Elemente  $A$  und  $B$  wird nach den Untersuchungen des Herrn Dedekind tatsächlich eine Hamiltonsche Gruppe, nämlich eine *Quaternionengruppe* erzeugt. Es muß also  $\mathfrak{G}$  mindestens eine Quaternionengruppe  $\mathfrak{Q}$  als Teiler besitzen, weil sonst ja alle Elemente in  $\mathfrak{G}$  permutabel wären. Die erzeugenden Elemente von  $\mathfrak{Q}$  mögen  $A$  und  $B$  heißen und den Gleichungen (9) genügen.

Bedeutet jetzt  $R$  ein Element in  $\mathfrak{G}$ , welches mit allen Elementen der Quaternionengruppe  $\mathfrak{Q}$  vertauschbar ist, so muß für das Element  $BR$  die Gleichung bestehen

$$(BR)^{-1}A(BR) = R^{-1}(B^{-1}AB)R = R^{-1}(AD)R = AD,$$

d. h. die Elemente  $BR$  und  $A$  sind nicht permutabel. Das ist aber nach Satz VI nur möglich, wenn  $(BR)^2$  oder  $B^2R^2$  oder  $DR^2 = D$ , also  $R^2 = 1$  ist. Mit allen Elementen von  $\mathfrak{R}$  vertauschbare Elemente können demnach nur die Ordnung 2 haben. Dieselben müssen, da nach Satz VI nicht permutable Elemente die Ordnung 4 haben, auch mit allen Elementen von  $\mathfrak{G}$  vertauschbar sein. Ihre Gesamtheit stellt infolgedessen eine Abelsche Gruppe dar. Zu dieser gehört auch das einzige in  $\mathfrak{R}$  enthaltene Element 2<sup>ter</sup> Ordnung, nämlich  $D$ , aber weiter kein Element in  $\mathfrak{R}$ , und sie kann daher nach bekannten Eigenschaften der Abelschen Gruppen aufgefaßt werden als das direkte Produkt der die Elemente  $D$  und 1 enthaltenden Gruppe  $\mathfrak{D}$  und einer Abelschen Gruppe  $\mathfrak{P}$ , die mit  $\mathfrak{R}$  außer 1 kein Element gemeinsam hat, also ist in  $\mathfrak{G}$  das direkte Produkt von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{P}$  enthalten.

Alle diejenigen Elemente von  $\mathfrak{G}$ , die nicht mit allen Elementen von  $\mathfrak{G}$  vertauschbar sind, dürfen nicht gleichzeitig mit  $A$  und  $B$  vertauschbar sein, denn sonst wären sie ja mit *allen* Elementen der Gruppe  $\mathfrak{R}$  vertauschbar, da diese durch  $A$  und  $B$  erzeugt wird, und müßten also nach Obigem die Ordnung 2 haben, während ihnen nach Satz VI die Ordnung 4 zukommt. Ist nun ein derartiges Element  $G$  etwa mit  $B$  nicht vertauschbar, so muß nach Satz VI  $G^2 = B^2$ , also nach Gleichung (9)  $= D$  sein. Ist  $G$  weder mit  $A$  noch mit  $B$  vertauschbar, so bestehen nach Satz VI die Gleichungen

$$G^2 = A^2 = D; \quad GA = AGD,$$

$$G^2 = B^2 = D; \quad GB = BGD,$$

also ergibt sich

$$G(AB) = (GA)B = (AGD)B = A(GB)D = A(BGD)D = (AB)G,$$

d. h.  $G$  ist mit dem Element  $AB$  vertauschbar. Damit ist die Existenz eines in  $\mathfrak{R}$  enthaltenen von  $D$  verschiedenen Elementes  $K$ , mit welchem  $G$  vertauschbar ist, gesichert. Weil  $K^2 = D$  ist, findet man

$$(KG)^2 = K^2G^2 = D \cdot D = D^2 = 1.$$

Daraus folgt, daß das Element  $KG$  mit allen Elementen von  $\mathfrak{G}$  vertauschbar ist, also dem direkten Produkt der Gruppen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{P}$  angehört und demnach in der Form  $D^\delta P$  darstellbar ist, wo  $P$  ein Element aus  $\mathfrak{P}$  bedeutet, und hieraus ergibt sich weiter, daß  $G = K^{-1}D^\delta P = K'P$  selbst in dem Produkt von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{P}$  enthalten ist und daß die Gruppe  $\mathfrak{G}$ , welche nach Obigem dieses Produkt als Teiler enthält, genau gleich demselben ist.

Faßt man dieses Resultat mit Satz III und Satz IV zusammen, so gelangt man zu folgendem

**Satz VII:** Jede Hamiltonsche Gruppe ist das direkte Produkt einer Quaternionengruppe, einer Abelschen Gruppe, deren sämtliche

*Elemente die Ordnung 2 haben, und einer Abelschen Gruppe von ungerader Ordnung.*

Dieses Ergebnis ist noch weitergehend als das des Herrn Dedekind. Auch die Umkehrung gilt:

*Jedes derartige Produkt ist eine Hamiltonsche Gruppe.*

Denn werden die Faktoren eines solchen Produktes bzw. mit  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{N}$  bezeichnet, so ist jedes demselben angehörige Element in  $G$  in der Form darstellbar  $KPR$ , wo  $K, P, R$  Elemente bzw. von  $\mathfrak{R}, \mathfrak{P}, \mathfrak{N}$  bedeuten, wo ferner  $K, P$  und  $R$  miteinander vertauschbar sind und wo die Ordnung von  $P$  gleich 2, die von  $R$  eine ungerade Zahl  $r$  und die von  $K$  gleich 1, 2 oder 4 ist, jenachdem  $K=1$  oder gleich dem in  $\mathfrak{R}$  enthaltenen Element  $D$  zweiter Ordnung oder ein anderes Element von  $\mathfrak{R}$  ist. Da  $G^\sigma = K^\sigma P^\sigma R^\sigma$  ist, so ist  $G^{2r} = D$ , falls  $K$  vom 4<sup>ten</sup> Grade ist, sonst  $= 1$ . Jede Untergruppe  $\mathfrak{G}_1$  von  $\mathfrak{G}$ , welche nur solche Elemente enthält, die mit allen Elementen von  $\mathfrak{G}$  vertauschbar sind, ist selbstverständlich ein Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ . Gehört aber zu  $\mathfrak{G}_1$  ein nicht mit allen Elementen von  $\mathfrak{G}$  vertauschbares Element  $G = KPR$ , so muß, da dann  $G^{2r} = D$  ist, auch  $D$  in  $\mathfrak{G}_1$  enthalten sein. Ist nun  $G' = K'P'R' = P'R'K'$  irgend ein Element in  $\mathfrak{G}$ , so hat man

$$\begin{aligned} G'^{-1}GG' &= K'^{-1}R'^{-1}P'^{-1}(KPR)P'R'K' = K'^{-1}(KPR)K' \\ &= (K'^{-1}KK')PR = KDPR = (KPR)D = GD. \end{aligned}$$

Alle zu  $G$  konjugierten Elemente sind demnach in  $\mathfrak{G}_1$  enthalten, d. h. aber,  $\mathfrak{G}_1$  ist ein Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ .

Bremen, den 5. Dezember 1903.

---