

FENOMENI DI RIFLESSIONE CRISTALLINA INTERPRETATI SECONDO LA
TEORIA ELETTROMAGNETICA DELLA LUCE; PEL PROF. GIUSEPPE
BASSO ¹⁾.

IV.

Le cose sin qui accennate preparano allo studio della propagazione, attraverso ad un mezzo coibente isotropo, di una perturbazione elettrica qualunque avente origine in un punto (x, y, z) . Questo punto, centro della perturbazione, si consideri pure come centro di una sfera di raggio r arbitrario. Si moltiplichino ambi i membri della prima equazione (3) per $dx dy dz$ e si integri quindi per tutto il volume della sfera applicando il teorema di Green. Si otterrà:

$$4 \pi \epsilon \frac{d^2}{dt^2} \iiint F dx dy dz = \iint \frac{dF}{dr} dS .$$

dove dS è l'elemento della superficie sferica di raggio r . Prendendo un elemento di volume alla distanza ρ dal centro e ponendo:

$$dS = r^2 d\omega$$

si potrà anche scrivere:

$$4 \pi \epsilon \frac{d^2}{dt^2} \iiint d\omega \int_0^r F \rho^2 d\rho = r^2 \frac{d}{dr} \iint F d\omega .$$

Si indichi ancora con \bar{F} il valor medio che la funzione F assume sulla superficie sferica di raggio r , cosicchè si abbia:

$$\bar{F} = \frac{1}{4 \pi} \iint F d\omega .$$

Dalla precedente equazione si passa subito alla seguente:

$$4 \pi \epsilon \frac{d^2(\bar{F} r)}{dt^2} = \frac{d^2(\bar{F} r)}{dr^2} .$$

la cui integrale, ponendo:

$$U^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon} ,$$

1) *Continuazione o fine*. Vedi pag. 84.

ha la forma:

$$\overline{F}r = f(r - U t) + \psi(r + U t) .$$

Ne risulta che il valor medio di F , quale si trova sulla sfera di raggio r alla fine del tempo t , si va propagando colla velocità U a guisa di onda sferica avente il centro nel punto (x, y, z) . Considerazioni analoghe si possono fare per le funzioni G e H . Perciò, nel propagarsi di una perturbazione elettrica da un punto del mezzo ad un altro distante dal primo di $U t$, la condizione della perturbazione in quest'ultimo alla fine del tempo t dipende da quella in cui si trovava il primo punto al principio dello stesso tempo t .

Designando sempre con e il numero delle unità elettrostatiche di elettricità contenute in un'unità elettromagnetica ed intendendo che entrambe queste unità siano determinate per l'aria, si dimostra facilmente che si ha:

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = c^2 ,$$

dove ϵ_0 rappresenta la costante di polarizzazione dielettrica dell'aria. Donde la conseguenza che la velocità con cui si propagano le perturbazioni elettriche, la quale non è altro che la velocità della luce, coincide col numero c ; il che è confermato dall'esperienza.

Quando poi si consideri il passaggio del movimento di propagazione delle perturbazioni elettriche da un mezzo isotropo ad un altro, in virtù della relazione $U^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$, si scorge che il quadrato dell'indice di rifrazione di un mezzo riferito a quello dell'aria è uguale al rapporto della sua costante di polarizzazione dielettrica a quella dell'aria.

In seno ad un mezzo coibente isotropo e alla fine del tempo t , s'immagini una superficie piana d'onda, cioè un piano passante per gli elementi del mezzo che contemporaneamente si trovano nella stessa condizione di perturbazione elettrica. Se i flussi elettrici che attraversano, con periodiche variazioni d'intensità, questi elementi sono fra loro paralleli e costituiscono così altrettante oscillazioni elettriche, ossia correnti lineari d'intensità

periodicamente variabile le quali hanno tutte direzioni fra loro parallele, l'onda si dice polarizzata. Inoltre fa d'uopo ammettere che il piano di polarizzazione sia normale alla direzione comune delle oscillazioni elettriche se si vuol conciliare l'interpretazione delle proprietà birifrangenti dei mezzi anisotropi colle determinazioni sperimentali delle tre costanti dielettriche che per alcuni di tali mezzi, e specialmente per lo zolfo cristallizzato, vennero eseguite da Boltzmann ¹⁾.

Prendasi ora come asse delle z la normale al piano d'onda considerato e prendasi come piano delle y z il piano di polarizzazione, cosicchè le oscillazioni elettriche siano parallele all'asse delle x . In tal caso sono nulle le componenti v , w del flusso normali all'asse delle x e dal modo con cui vennero trovate le funzioni F , G , H risulta immediatamente:

$$G = 0, \quad H = 0.$$

Perciò le tre equazioni (3) si riducono all'unica:

$$U^2 \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{d^2 F}{dt^2},$$

nella quale la F dipende dalle sole variabili z e t . Fra le soluzioni particolari di quest'equazione che soddisfano nello stesso tempo alla necessaria condizione di periodicità sceglierò, come del resto propone lo stesso Maxwell, la seguente:

$$F = C \sin \frac{z - Ut}{U}$$

dove C è una costante proporzionale al flusso elettrico u e che corrisponderebbe, nella teoria meccanica della luce, alla velocità massima di vibrazione delle particelle eteree. Indicando con L la lunghezza d'onda relativa alla propagazione della perturbazione elettrica e con T il periodo di tale perturbazione o la durata della oscillazione elettrica, cosicchè si abbia:

$$L = UT,$$

possiamo anche scrivere:

$$(4) \quad F = C \sin \left(\frac{z}{L} T - t \right)$$

1) *Annali di Poggendorff*, 1874.

V.

Se il mezzo coibente è anisotropo e si prendono di nuovo come assi coordinati le sue tre direzioni principali, le equazioni relative alla propagazione di perturbazioni elettriche attraverso di esso vengono da Maxwell ¹⁾ presentate sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 F}{d y^2} + \frac{d^2 F}{d z^2} - \frac{d^2 G}{d x d y} - \frac{d^2 H}{d z d x} &= 4 \pi \epsilon_1 \left(\frac{d^2 F}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{d x d t} \right) \\ \frac{d^2 G}{d z^2} + \frac{d^2 G}{d x^2} - \frac{d^2 H}{d y d z} - \frac{d^2 F}{d x d y} &= 4 \pi \epsilon_2 \left(\frac{d^2 G}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{d y d t} \right) \\ \frac{d^2 H}{d x^2} + \frac{d^2 H}{d y^2} - \frac{d^2 F}{d z d x} - \frac{d^2 G}{d y d z} &= 4 \pi \epsilon_3 \left(\frac{d^2 H}{d t^2} - \frac{d^2 \phi}{d z d t} \right)\end{aligned}$$

Si consideri ora una superficie piana d'onda la quale si propaghi colla velocità B e si trovi, alla fine del tempo t , rappresentata dall'equazione:

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu - B t = d,$$

dove λ, μ, ν sono gli angoli che la sua normale fa cogli assi e d è la sua distanza dall'origine delle coordinate all'origine del tempo. Siano inoltre a, b, c le velocità di propagazione lungo le tre direzioni principali, cosicchè si abbia:

$$a^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_1}, \quad b^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_2}, \quad c^2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_3}.$$

Se si formano le derivate seconde di F, G, H, ϕ rispetto alla variabile d e queste si designano con F'', G'', H'', ϕ'' , si ottiene la seguente terna di equazioni:

$$\begin{aligned}F'' \left(\cos^2 \mu + \cos^2 \nu - \frac{B^2}{a^2} \right) - G'' \cos \lambda \cos \mu - H'' \cos \nu \cos \lambda - \\ \frac{B \cos \lambda}{a^2} \phi'' = 0 \\ - F'' \cos \lambda \cos \mu + G'' \left(\cos^2 \nu + \cos^2 \lambda - \frac{B^2}{b^2} \right) - H'' \cos \mu \cos \nu - \\ \frac{B \cos \mu}{b^2} \phi'' = 0\end{aligned}$$

1) *Electricity and magnetism*, vol. 2, art. 794.

$$- F'' \cos \nu \cos \lambda - G'' \cos \mu \cos \nu + H'' \left(\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu - \frac{B^2}{c^2} \right) - \frac{B \cos \nu}{c^2} \phi'' = 0 .$$

Questa terna di equazioni si può trasformare ancora nella seguente:

$$B W (B F'' - \phi'' \cos \lambda) = 0$$

$$B W (B G'' - \phi'' \cos \mu) = 0$$

$$B W (B H'' - \phi'' \cos \nu) = 0$$

purché si ponga:

$$W = \frac{\cos^2 \lambda}{B^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{B^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{B^2 - c^2} .$$

Ora le equazioni dell'ultima terna non possono essere soddisfatte né non dalla condizione:

$$W = 0 ;$$

infatti non può essere nulla la velocità B di propagazione dell'onda e, per altra parte, non possono annullarsi i fattori binomi per la ragione che la periodicità della perturbazione esige che ogni volume elementare del mezzo contenga costantemente la stessa quantità di elettricità e quindi che sia:

$$\phi'' = 0 .$$

Ciò equivale a ritenere che si abbia:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{B^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{B^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{B^2 - c^2} = 0 .$$

Questa è appunto l'equazione di elasticità di Fresnel, dalla quale è noto che scaturisce come conseguenza diretta l'equazione della superficie d'onda. Perciò la superficie d'onda della perturbazione elettrica in un mezzo coibente qualunque coincide con quella data dalla teoria meccanica della luce.

Oltre a ciò, se si indicano con α, β, γ gli angoli che fa coi tre assi la direzione della oscillazione elettrica, in virtù delle equazioni (2) si trova:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{F''}{a^2} : \frac{G''}{b^2} : \frac{H''}{c^2} ,$$

da cui risulta ancora che l'oscillazione ha luogo tangenzialmente alla superficie dell'onda, cioè che si ha:

$$\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma = 0 .$$

Se ne deduce pure che la direzione dell'oscillazione elettrica nel piano tangente alla superficie d'onda è determinata dall'equazione:

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \alpha} (b^2 - c^2) + \frac{\cos \mu}{\cos \beta} (c^2 - a^2) + \frac{\cos \nu}{\cos \gamma} (a^2 - b^2) = 0 .$$

Questa formula coincide con quella che Fresnel dedusse dalla teoria meccanica della luce, quando s'intenda che la direzione dell'oscillazione elettrica tenga il posto della linea di vibrazione dell'etere per la luce polarizzata rettilineamente.

Quanto venne fin qui sommariamente ricordato rende agevole la trattazione di un caso molto particolare, che forma il principale argomento di questo lavoro.

Si consideri cioè il passaggio d'un raggio luminoso, polarizzato rettilineamente, dall'aria in un mezzo cristallizzato uniasse, essendo la faccia rifrangente del cristallo normale all'asse ottico. La superficie d'onda è in questo caso costituita da una superficie sferica di raggio a e da una concentrica ellissoide di rivoluzione di raggio equatoriale b e di semiasse polare a , essendo a e b rispettivamente le velocità di propagazione della perturbazione elettrica lungo l'asse ottico del cristallo e lungo una direzione qualunque normale a questo asse; la velocità di propagazione nell'aria è assunta come unità.

Dalla nota costruzione di Huyghens e dalle cose precedentemente esposte risultano immediatamente queste conseguenze:

1° Ogni raggio incidente entrando nel cristallo sotto l'angolo d'incidenza i dà luogo a due raggi rifratti, ordinario l'uno e l'altro straordinario, che giacciono entrambi nel piano d'incidenza e fanno rispettivamente coll'asse ottico gli angoli r e ρ dati dalle relazioni:

$$\sin r = a \sin i ,$$

$$\sin \rho = \frac{b^2 \sin i}{\sqrt{a^2 - b^2 (a^2 - b^2) \sin^2 i}} .$$

2^a Il raggio rifratto ordinario coincide colla normale al rispettivo elemento d'onda ordinaria; il raggio rifratto straordinario fa colla normale al suo elemento d'onda l'angolo ω dato da:

$$(5) \cos \omega = \frac{a}{\sqrt{[1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i][a^2 - b^2 (a^2 - b^2) \sin^2 i]}}$$

3^a Preso come piano delle xy il piano d'incidenza, come asse delle x l'asse ottico (positivo nell'interno del cristallo) o come origine delle coordinate il punto d'incidenza, di guisa che sarà piano delle yz la faccia rifrangente del cristallo, gli angoli λ, μ, ν che la normale all'onda elementare ordinaria fa cogli assi coordinati sono rispettivamente determinati da:

$$\cos \lambda = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}, \quad \cos \mu = a \sin i, \quad \cos \nu = 0 :$$

mentre per gli angoli λ', μ', ν' fatti cogli assi dalla normale all'onda straordinaria si ha:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda' = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}{\sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}}, \quad \cos \mu' = \frac{a \sin i}{\sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}} \\ \cos \nu' = 0 . \end{array} \right.$$

4^a Le oscillazioni elettriche costituenti l'onda ordinaria hanno luogo normalmente al piano d'incidenza, e perciò i coseni degli angoli che la loro direzione fa coi tre assi sono 0, 0, 1. Le oscillazioni elettriche dell'onda straordinaria sono parallele al piano d'incidenza e la loro direzione è tangente alla sezione meridiana dell'elissoide di Huyghens; perciò tale direzione fa coi tre assi angoli, i cui coseni sono:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a \sin i}{\sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}} = \cos \mu' , \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}{\sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}} = \cos \lambda' , \\ \cos \gamma &= \cos \nu' = 0 . \end{aligned}$$

VI.

Il raggio incidente, d'intensità *uno*, sia polarizzato in un piano formante l'angolo θ col piano xy d'incidenza. Il piano dell'onda incidente può essere rappresentato dall'equazione:

$$x \cos i + y \sin i = p ,$$

dove p è la sua distanza dal punto d'incidenza alla fine del tempo qualunque t . Per altra parte si è già notato che il flusso elettrico dell'onda incidente, che qui assumeremo come unità, è generalmente rappresentato dalla quantità C della formola (4); esso ha per componenti secondo i tre assi i valori:

$$- \sin \theta \sin i , \quad \sin \theta \cos i , \quad - \cos \theta .$$

Quindi per ogni punto (x, y, z) appartenente all'onda incidente le funzioni F, G, H si possono scrivere:

$$F = - \sin \theta \sin i \sin \left(\frac{p}{L} T - t \right) ,$$

$$G = \sin \theta \cos i \sin \left(\frac{p}{L} T - t \right) ,$$

$$H = - \cos \theta \sin \left(\frac{p}{L} T - t \right) .$$

Per l'onda riflessa considerata alla distanza p' dall'origine l'equazione del suo piano è:

$$- x \cos i + y \sin i = p' .$$

Inoltre sia V il flusso elettrico proprio di tale onda; le componenti del flusso secondo gli assi saranno :

$$V \sin i \sin \psi , \quad V \cos i \sin \psi , \quad - V \cos \psi ,$$

intendendo che ψ designi l'angolo che il piano di polarizzazione del raggio riflesso fa col piano d'incidenza. Perciò le funzioni F, G, H per un punto qualunque dell'onda riflessa avranno i valori:

$$F' = V \sin i \sin \psi \sin \left(\frac{p'}{L} T - t \right)$$

$$G' = V \cos i \sin \psi \sin \left(\frac{p'}{L} T - t \right) ,$$

$$H' = - V \cos \psi \sin \left(\frac{p'}{L} T - t \right) .$$

L'onda rifratta ordinaria essendo polarizzata nel piano d'incidenza, il flusso elettrico u , che la costituisce, è diretto normalmente a tale piano e sono perciò nulle le sue componenti secondo gli assi delle x e delle y . Considerato il piano di quest'onda alla distanza q dall'origine, la sua equazione è:

$$x \cos r + y \sin r = q ,$$

dove giova ricordare che:

$$\cos r = \cos \lambda = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 i} , \quad \sin r = \cos \mu = a \sin i .$$

E chiamando L , la lunghezza d'onda del moto rifratto ordinario, i valori delle solite tre funzioni saranno per ogni punto del piano di quest'onda:

$$F_i = 0 , \quad G_i = 0 , \quad H_i = u_i \sin \left(\frac{q}{L_i} T - t \right) .$$

In modo analogo si vede che il piano dell'onda rifratta straordinaria distante di q' dall'origine delle coordinate ha per equazione:

$$x \cos \lambda' + y \sin \lambda' = q' ,$$

dove λ' si può esprimere pure in funzione di i in virtù delle formole precedentemente scritte. Inoltre, tenendo conto della direzione già avvertita che qui possiede l'oscillazione elettrica, vedesi che il flusso elettrico u_s relativo all'onda straordinaria ha per componenti:

$$u_s \cos \alpha , \quad u_s \sin \alpha , \quad 0 .$$

Chiamando dunque L_s la lunghezza d'onda straordinaria si potrà scrivere per le solite funzioni:

$$F_2 = u_2 \cos \alpha \sin \left(\frac{q'}{L_2} T - t \right)$$

$$G_2 = u_2 \sin \alpha \sin \left(\frac{q'}{L_2} T - t \right)$$

$$H_2 = 0 .$$

Ogni perturbazione elettrica si trasmette in modo continuo dall'aria nel cristallo attraversando in parte la faccia rifrangente di questo ed in parte riflettendosi su di essa; da ciò scaturisce il cosiddetto principio di continuità, analogo a quello di cui Fresnel fece pur uso nella sua teoria. Si considerino due punti infinitamente vicini fra di loro e alla faccia rifrangente, ma tali che l'uno di essi si trovi nell'aria e perciò prenda parte alla propagazione dei moti incidente e riflesso, mentre l'altro punto sia nel cristallo e partecipi così alla propagazione dei due moti rifratti. Non essendovi differenza finita fra i flussi elettrici che attraversano due elementi quando la distanza fra questi elementi è infinitesima, la somma $F + F'$ dei valori che la funzione F ha per il primo dei due punti considerati differirà infinitamente poco dalla somma $F_1 + F_2$ dei valori che la stessa funzione ha per il secondo punto. Questa condizione deve pur essere verificata per le derivate parziali prime delle F rispetto alle coordinate x e y e relazioni analoghe collegano i valori di ciascuna delle due altre funzioni G e H ed i valori delle loro derivate prime. Più chiaramente, quando si ponga nel nostro caso:

$$x = 0 .$$

si hanno le seguenti tre terne di equazioni:

$$(7) \quad \begin{cases} F + F' = F_2 \\ G + G' = G_2 \\ H + H' = H_1 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dx} + \frac{dF'}{dx} = \frac{dF_2}{dx} \\ \frac{dG}{dx} + \frac{dG'}{dx} = \frac{dG_2}{dx} \\ \frac{dH}{dx} + \frac{dH'}{dx} = \frac{dH_1}{dx} \end{cases}$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{dy} + \frac{dF'}{dy} = \frac{dF_2}{dy} \\ \frac{dG}{dy} + \frac{dG'}{dy} = \frac{dG_2}{dy} \\ \frac{dH}{dy} + \frac{dH'}{dy} = \frac{dH_2}{dy} \end{array} \right.$$

Queste nove equazioni non esprimono punto altrettante condizioni distinte e ciò si scorge facilmente se si tiene conto delle note leggi relative alle direzioni dei due raggi rifratti. Così, esaminando la seconda equazione della terna (7), essa si può scrivere:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta \cos i \text{ sen } \left(\frac{p}{L} T - t \right) + V \cos i \text{ sen } \psi \text{ sen } \left(\frac{p'}{L} T - t \right) \\ = u_2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \left(\frac{q'}{L_2} T - t \right) . \end{aligned}$$

Ora, per qualunque valore di t , le lunghezze p , p' , q' sono spazi percorsi in egual tempo dalle tre onde, incidente, riflessa e rifratta straordinaria; perciò si ha:

$$\frac{p}{L} = \frac{p'}{L} = \frac{q'}{L_2} .$$

Dunque l'equazione precedente si riduce a:

$$(10) \quad \text{sen } \theta \cos i + V \text{ sen } \psi \cos i = u_2 \text{ sen } \alpha .$$

Per altra parte, la seconda equazione della terna (9), quando vi si eseguiscano le operazioni indicate e vi si faccia $x = 0$, si presenta sotto la forma:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta \cos i \text{ sen } i \frac{T}{L} \cos \left\{ \frac{y \text{ sen } i}{L} T - t \right\} + \\ V \text{ sen } \psi \cos i \text{ sen } i \frac{T}{L} \cos \left(\frac{y \text{ sen } i}{L} T - t \right) = u_2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \lambda' \frac{T}{L_2} \cos \left(\frac{y \text{ sen } \lambda'}{L_2} T - t \right) \end{aligned}$$

Ora, osservando che i e λ' sono gli angoli che colla normale alla faccia rifrangente fanno rispettivamente la normale all'onda incidente e la normale all'onda elementare straordinaria, una nota legge stabilisce:

$$\frac{\text{sen } i}{L} = \frac{\text{sen } \lambda'}{L_2} .$$

Introducendo questa condizione, vedesi che l'ultima equazione coincide colla (10).

Si consideri parimenti la terza equazione della terna (7), la quale è:

$$-\cos \theta \text{ sen } \left(\frac{p}{L} T - t \right) - V \cos \psi \text{ sen } \left(\frac{p'}{L} T - t \right) = u_1 \text{ sen } \left(\frac{q}{L_1} T - t \right) ,$$

ossia ancora:

$$\cos \theta + V \cos \psi = -u_1 .$$

Questa coincide coll'ultima della terna (9) che è:

$$\begin{aligned} -\cos \theta \text{ sen } i \frac{T}{L} \cos \left(\frac{y \text{ sen } i}{L} T - t \right) - V \cos \psi \text{ sen } i \frac{T}{L} \cos \left(\frac{y \text{ sen } i}{L} T - t \right) \\ = u_1 \text{ sen } r \frac{T}{L_1} \cos \left(\frac{y \text{ sen } r}{L_1} T - t \right) \end{aligned}$$

poichè si ha:

$$\frac{\text{sen } i}{L} = \frac{\text{sen } r}{L_1} .$$

Mediante considerazioni analoghe estese alle altre equazioni si riconosce che le relazioni distinte, alle quali in appresso si dovrà ricorrere, si possono ridurre alle tre seguenti:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos i (\text{sen } \theta + V \text{sen } \psi) = u_1 \text{ sen } \alpha \\ \cos \theta + V \cos \psi = -u_1 \\ \cos \theta - V \cos \psi = -u_1 \frac{\text{tang } i}{\text{tang } r} \end{array} \right.$$

VII.

La determinazione di tutti gli elementi da cui dipendono le leggi della riflessione cristallina esige ancora che si applichi al caso che ora si studia il principio della conservazione dell'energia. Cioè si deve esprimere la condizione che, non essendovi assorbimento o trasformazione in altra forma di energia, l'energia

propria dell'onda luminosa incidente si ripartisce integralmente fra l'onda riflessa e le due rifratte. A tale principio anche Fresnel ricorse esaminando il passaggio del moto vibratorio etereo da un mezzo isotropo in un altro pure isotropo, ed io stesso cercai, nel mio lavoro già citato, di estenderlo pure a certi casi in cui il moto rifratto si propaga in un mezzo anisotropo.

Assumendo ora come guida la teoria elettrica della luce, l'applicazione di questo principio non esige ragionamenti d'indole differente da quelli che s'incontrano nella teoria fresneliana. Corre tuttavia questa diversità, che in quest'ultima teoria l'energia per ogni fascetto luminoso è rappresentata dalla somma delle forze vive animanti, in un istante qualunque, le particelle eterree racchiuse in una porzione prismatica del fascetto la quale abbia per altezza la lunghezza d'onda. Nella nuova teoria invece si deve prenderè in considerazione l'energia potenziale elettrodinamica posseduta dal sistema di correnti che occupà il volume del detto prisma e si deve calcolare il potenziale elettrodinamico di tale sistema su se stesso ricorrendo alla sua espressione generale già data:

$$-\frac{1}{2} \iiint dx dy dz (Fu + Gv + Hw) .$$

Prendasi perciò sulla superficie rifrangente del cristallo una porzione d'area σ piccolissima e la si consideri come base comune di quattro fascetti luminosi, aventi le direzioni dei quattro raggi incidente, riflesso e due rifratti. Limitando le lunghezze dei fascetti in modo che esse rappresentino le relative lunghezze d'onda L, L, L_1, L_2 , ne risultano quattro prismi per ciascuno dei quali si deve esprimere il potenziale elettrodinamico corrispondente. Per ciò che riguarda il prisma appartenente al fascetto incidente le oscillazioni elettriche su di ogni sua sezione retta (d' area $\sigma \cos i$) distante della variabile s da una delle basi del prisma giacciono sul piano della stessa sezione; quindi, indicando con u il flusso elettrico nella direzione stessa delle oscillazioni si avrà per le direzioni normali a questa:

$$v = 0 \quad , \quad w = 0 \quad .$$

Così l'espressione del potenziale per uno straterello del prisma

d'altezza ds si riduce a

$$-\frac{1}{2} F u \sigma \cos i \, ds .$$

e per tutto il prisma si ha:

$$P = -\frac{1}{2} \sigma \cos i \int_0^L F u \, ds$$

Ricorrendo alla terna (2) di equazioni, essa si riduce nel nostro caso alla sola:

$$\Delta F = 4 \pi u ,$$

od ancora a:

$$\frac{d^2 F}{ds^2} = 4 \pi u .$$

E siccome la (4) ora diventa:

$$F = \text{sen} \left(\frac{s}{L} T - t \right) ,$$

perchè si è già preso come unità il valore della costante C per la luce incidente, si avrà:

$$u = \frac{1}{4 \pi} \frac{d^2 F}{ds^2} = -\frac{T^2}{4 \pi L^2} \text{sen} \left\{ \frac{s}{L} T - t \right\} ;$$

epperò:

$$P = -\frac{1}{2} \sigma \cos i \int_0^L F u \, ds = \frac{1}{2} \frac{T^2 \sigma \cos i}{4 \pi L^2} \int_0^L ds \text{sen}^2 \left(\frac{s}{L} T - t \right) .$$

Riguardo al prisma appartenente al fascetto riflesso si fanno considerazioni assolutamente analoghe e, avvertendo che per esso il valore della costante C è V , si ha per il suo potenziale elettrodinamico P' :

$$P' = \frac{1}{2} \frac{T^2 \sigma \cos i}{4 \pi L_1^2} u_1^2 \int_0^{L_1} ds \text{sen}^2 \left(\frac{s}{L_1} T - t \right) .$$

Si consideri infine il potenziale P , relativo al moto rifratto straordinario. Qui le oscillazioni elettriche giacciono ancora nel piano dell'onda, ma non sono più normali al raggio corrispondente, poichè questo raggio fa colla normale al piano d'onda l'angolo ω dato dalla (5). E siccome la s devesi contare lungo la normale

al piano d'onda affinchè si possano ritenere soddisfatte le condizioni $v = 0$, $w = 0$, si dovrà sostituire al prisma di sezione retta $\sigma \cos \rho$ appartenente al fascetto rifratto straordinario un altro prisma la cui sezione retta $\sigma \cos \lambda'$ sia parallela al piano d'onda straordinaria, avvertendo inoltre che le altezze di questi due prismi, i quali sono percorsi dal moto straordinario nello stesso tempo T stanno fra loro nel rapporto: $1 : \cos \omega$. Da ciò si deduce:

$$P_2 = \frac{1}{24\pi} \frac{T^2 \sigma' \cos \lambda'}{L_2^2 \cos \omega} u_2^2 \int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t \right).$$

Così l'equazione esprime la conservazione dell'energia si può scrivere:

$$\frac{\cos i (1 - V^2)}{L^2} \int_0^L ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L} T - t \right) = \\ \frac{u_1^2 \cos r}{L_1^2} \int_0^{L_1} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_1} T - t \right) + \frac{u_2^2 \cos \lambda'}{L_2^2 \cos \omega} \int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t \right).$$

Ponendo nell'integrale del primo membro di questa equazione:

$$s = Lz$$

si ha:

$$\int_0^L ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L} T - t \right) = L \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t).$$

E ponendo rispettivamente: $s = L_1 z$ e $s = L_2 z$ nei due integrali del secondo membro, si ottiene:

$$\int_0^{L_1} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_1} T - t \right) = L_1 \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t).$$

$$\int_0^{L_2} ds \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{L_2} T - t \right) = L_2 \int_0^1 dz \operatorname{sen}^2 (Tz - t).$$

Sostituendo nell'equazione esprime la conservazione dell'energia, essa si riduce subito alla forma:

$$\frac{\cos i (1 - V^2)}{L} = \frac{u_1^2 \cos r}{L_1} + \frac{u_2^2 \cos \lambda'}{L_2 \cos \omega}$$

od anche, per essere:

$$\frac{\sin i}{L} = \frac{\sin r}{L_1} = \frac{\sin \lambda'}{L_2} ,$$

$$(12) \quad \cos i (1 - V^2) = \frac{\sin i \cos r}{\sin r} u_1^2 + \frac{\sin i \cos \lambda'}{\sin \lambda' \cos \omega} u_2^2 .$$

VIII.

Le tre equazioni (11) prese insieme alla (12) valgono a determinare pienamente la intensità V^2 e l'azimut ψ di polarizzazione del raggio riflesso per qualunque incidenza e per qualunque posizione del piano di polarizzazione del raggio incidente, la cui intensità è *uno*. Però le espressioni che se ne ricavano non coincidono in generale con quelle che io aveva ottenute nella mia prima Memoria. Ciò del resto è naturale, dacchè io dovetti allora ammettere certi postulati intorno alla propagazione nei cristalli del moto vibratorio etereo, i quali postulati non hanno i loro equivalenti nella teoria elettromagnetica della luce. Così la così detta legge di Malus alla quale ricorsi per ottenere una relazione fra le velocità vibratorie dei due moti rifratti non si può ritenere come esatta in generale ed avvertii allora che la si può accogliere come prossima al vero soltanto in virtù della debole birifrangenza dei cristalli esistenti in natura ¹⁾.

I casi particolari più importanti, nei quali si verifica in modo completo la coincidenza fra i risultati della teoria meccanica della luce e quelli della nuova teoria, sono i due seguenti:

1° Se il piano di polarizzazione della luce incidente coincide col piano d'incidenza, cioè se si pone $\theta = 0$ nelle equazioni (11), (12), se ne ricava:

$$\psi = 0 , \quad u_1 = 0 , \quad V = - \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

cioè il raggio rifratto straordinario sparisce, la luce riflessa è

1) Vedi i miei già citati *Studi sulla riflessione cristallina*, pag. 20.

anch'essa polarizzata nel piano d'incidenza ed ha l'intensità determinata dalla legge di Fresnel pei corpi isotropi;

2° Se l'incidenza è normale, qualunque sia lo stato di polarizzazione della luce incidente, si ha per l'intensità V^2 della luce riflessa il valore

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2$$

e per l'intensità dell'unico raggio rifratto allora esistente:

$$\frac{4a^2}{(1+a)^2}.$$

La coincidenza assoluta fra i risultati delle due teorie non ha più luogo per valori qualunque di θ e di i ; tuttavia le differenze fra i valori numerici che se ne ricavano per ogni caso speciale sono sempre assai lievi per i mezzi birifrangenti naturali, essendo per questi sempre molto piccole le frazioni $\frac{a-b}{a}$, $\frac{a-b}{b}$.

Le maggiori discrepanze s'incontrano quando la luce incidente è polarizzata normalmente al piano d'incidenza. Allora entrambe le teorie prevedono che resta estinto il raggio rifratto ordinario e che, per il raggio riflesso, non è alterato il piano di polarizzazione; ma l'intensità V_1^2 della luce riflessa si trovò, nel mio lavoro precedente, pag. 30, determinata dalla relazione:

$$V_1 = - \frac{\cos i \cos^2 \nu - a \cos \mu}{\cos i \cos^2 \nu + a \cos \mu}.$$

essendo: $\cos \mu = \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}$, $\cos \nu = \sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}$;

invece dalle equazioni (11) e (12) si ricava:

$$V = - \frac{\sin i \cos i - \sin \lambda' \cos \lambda' \cos \omega}{\sin i \cos i + \sin \lambda' \cos \lambda' \cos \omega}.$$

Ora quest'espressione di V non coincide con quella precedente di V_1 , se non per il caso di un mezzo monorifrangente, cioè per a eguale a b , poichè allora entrambe assumono il valore

$$- \frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)},$$

cioè quel valore che la teoria di Fresnel assegna per mezzi isotropi.

Se si ricordano le già trovate espressioni (5) e (6) per $\cos \lambda'$ e per $\cos \omega$ si vede che l'espressione ora ottenuta di V si può anche scrivere sotto la forma seguente che si può più comodamente confrontare con quella di V_1 :

$$V = - \frac{\cos i \cos^3 \nu - a \cos \mu \cos \omega \cos^2 \nu}{\cos i \cos^3 \nu + a \cos \mu \cos \omega \cos^2 \nu} ,$$

dove si ha:

$$\cos \omega \cos^2 \nu = \frac{\sqrt{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} (a^2 - b^2) \sin^2 i}}$$

I valori numerici di V e di V_1 differiranno l'un dall'altro tanto meno in ogni caso speciale, quanto più il valore di $\cos \omega \cos^2 \nu$, a cagione della piccolezza di $a^2 - b^2$, si accosterà all'unità.



SULLE CONDIZIONI DI RESISTENZA DEI CORPI ELASTICI;
NOTA DEL PROF. E. BELTRAMI.

Nella versione francese della *Teoria dell'elasticità* di Clebsch, riveduta e commentata dall'illustre De Saint-Venant, il quale ha recato con tale pubblicazione un nuovo e segnalato servizio agli studiosi di quell'importantissima teoria, si trova riassunto in una nota finale al § 31 (p. 252-282), il metodo già da lungo tempo proposto dallo stesso de Saint-Venant per la ricerca dei limiti di resistenza dei corpi elastici. Questo metodo differisce da quello generalmente seguito, ed accettato anche da Clebsch, per il principio sul quale esso si fonda e che consiste nell'assegnare un limite massimo alle *dilatazioni*, anzichè alle *tensioni*.

Per giustificare questo nuovo principio, De Saint-Venant cita in particolare il caso semplicissimo d'un parallelepipedo rettangolo stirato, con una stessa forza unitaria, secondo una, o secondo due, o secondo tutte tre le direzioni dei suoi assi di figu-