Ueber die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale erster Ordnung.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Als Integrale dritter Gattung bezeichnen wir Integrale algebraischer Functionen, welche für gewisse Werthe der Variabeln, oder, in *Riemann*scher Ausdrucksweise, in bestimmten Punkten der Fläche T logarithmisch unendlich sind. Diese Fläche stellt die Verzweigungsart der betrachteten algebraischen Functionen dar, und wir wollen jetzt speciell die Integrale untersuchen, für welche diese Fläche T fünffach zusammenhängend, oder $p=2$ ist. Die Bezeichnungsweise, welche *Riemann* in seiner Abhandlung über *Abel*sche Functionen (Bd. 54 dieses Journals) eingeführt, soll hier auch festgehalten und diese Abhandlung selbst soll, der Kürze wegen, einfach als „Abhandlung" citirt werden.

Für die folgenden Entwicklungen sind einige Sätze über endlich bleibende Integrale und ϑ-Functionen nöthig, welche hier, da sie in der Abhandlung bewiesen sind, nur kurz aufgeführt zu werden brauchen.

Es existiren für $p=2$ zwei linear von einander unabhängige endlich bleibende Integrale, welche in der Form enthalten sind:

$$u = \int \frac{(az+b)\,dz}{\sqrt{(z.1-z.1-k^2z.1-l^2z.1-m^2z)}},$$

oder durch rationale Transformationen immer in diese Form gebracht werden können. Dieselbe ist schon durch die Arbeit *Rosenheim*s als canonische Form eingeführt, und soll auch hier beibehalten werden. Das Radical bezeichnen wir kürzer:

$$\sqrt{(z.1-z.1-k^2z.1-l^2z.1-m^2z)} = \sqrt{(z,k,l,m)}.$$

Den Zähler im Integrale bezeichnen wir durch

$$az+b = \varphi(z).$$

Alle Functionen φ können linear durch zwei ausgedrückt werden

$$\varphi_1(z) = a_1z+b_1,$$
$$\varphi_2(z) = a_2z+b_2,$$

und daher sind alle Integrale u linear durch zwei ausdrückbar.

Die Fläche T besteht, wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel, aus zwei Blättern, welche in sechs Verzweigungspunkten zusammenhängen $\left(z=0,1,\frac{1}{k^2},\frac{1}{l^2},\frac{1}{m^2},\infty\right)$. Jeder Punkt ist daher in der Fläche T eindeutig bestimmt durch Angabe des z und des Vorzeichens der algebraischen Function $s=\sqrt{(z,k,l,m)}$; daher kann ein solcher Punkt durch (s,z) bezeichnet werden.

Ueber die Lage der Querschnitte braucht hier nichts angeführt zu werden; eine der vielen möglichen Anordnungen lernt man aus der Abhandlung von *Prym:* theoria nova funct. ultraellipticarum, Druck bei *Schade,* Berlin, kennen. Wir bezeichnen die 4 Querschnitte mit (a_1), (a_2), (b_1), (b_2). Jedes endlich bleibende Integral u kann man bis auf eine additive Constante bestimmen, indem man die Periodicitätsmoduln an zweien dieser Querschnitte, z. B. (a_1), (a_2) angiebt. Es werden nun zwei Integrale u_1, u_2 bestimmt, so dass

$$u_1=\int\frac{\varphi_1(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}},\qquad \varphi_1(z)=a_1z+b_1$$

an (a_1) den Modul πi, an (a_2) den Modul Null hat; und dass

$$u_2=\int\frac{\varphi_2(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}},\qquad \varphi_2(z)=a_2z+b_2$$

an (a_1) den Modul 0, an (a_2) den Modul πi hat. Dann sind die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten (b) bestimmt, nämlich $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ für u_1 und $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ für u_2. Hierbei ist $a_{1,2}=a_{2,1}$ (s. Abhandlung §. 20). Diese Gleichung $a_{1,2}=a_{2,1}$ entspricht ganz der von *Rosenhain* (sur les fonctions ultraellipt. de deux var. et à quatre pér., pg. 435):

$$\begin{aligned}0 = &\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}-\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\\ &-\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}+\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}.\end{aligned}$$

Diese Integrale u_1, u_2 werden nun als Argumente der ϑ-Function benutzt:

$$\vartheta(u_1,u_2)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, e^{m^2a_{1,1}+2mna_{1,2}+n^2a_{2,2}+2mu_1+2nu_2},$$

$a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ die vorhin erwähnten Periodicitätsmoduln.

Eine solche ϑ-Function ist, da u_1, u_2 eine gemeinsame obere Grenze haben, Function dieser Grenze, und als solche in zwei Punkten der Fläche T

gleich Null (Abhandlung §. 22). Die Lage dieser Punkte hängt von den in u_1, u_2 noch willkürlichen additiven Constanten ab; es seien α_1', α_2' die Werthe von u_1, u_2 in einem Punkte $(s_1 z_1)$, α_1'', α_2'' die Werthe in $(s_2 z_2)$. In der Folge wollen wir jeden solchen Punkt kurz als Punkt α', oder α'' bezeichnen; der Punkt (s, z) ist hiernach soviel wie der Punkt u. Die Function

$$\vartheta(u_1 - \alpha_1' - \alpha_1'', u_2 - \alpha_2' - \alpha_2'')$$

wird dann, bei geeigneter Wahl der Anfangswerthe der Integrale u_1, u_2 in den beiden Punkten α', α'' verschwinden.

Hieraus folgt, dass bei dieser Bestimmung:

$$\vartheta(-\alpha_1', -\alpha_2') = \vartheta(-\alpha_1'', -\alpha_2'') = 0.$$

Die ϑ-Function ist gerade, d. h. sie erlangt denselben Werth, wenn gleichzeitig beide Argumente ins Entgegengesetzte verwandelt werden; also ist auch

$$\vartheta(\alpha_1', \alpha_2') = \vartheta(\alpha_1'', \alpha_2'') = 0,$$

oder, da die Punkte α', α'' beliebige sind, so ist

$$\vartheta(u_1, u_2) = 0,$$

sobald die Argumente u_1, u_2 eine gemeinsame obere Grenze haben. Die letzte Gleichung ist also als Auflösung der Differentialgleichungen

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{\varphi_1(z)}{\sqrt{(z, k, l, m)}}, \qquad \frac{du_2}{dz} = \frac{\varphi_2(z)}{\sqrt{(z, k, l, m)}}$$

anzusehen.

Jede Function $\varphi = az + b$ wird in zwei übereinanderliegenden Punkten der Fläche T gleich Null; bei der vorhin genannten Bestimmung der Anfangswerthe haben die additiven Constanten in den Integralen u_1, u_2 solche Werthe, dass

$$(\alpha_1' + \alpha_1'', \alpha_2' + \alpha_2'') \equiv (0, 0),$$

wenn α', α'' solche über einander liegende, d. h. zu demselben Werthe von z gehörige Punkte sind (s. §. 23). Ferner haben dann die Integrale in den 6 Verzweigungspunkten Werthe

$$(u_1, u_2) \equiv \left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1' \pi i + \varepsilon_1 a_{1,1} + \varepsilon_2 a_{1,2}), \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2' \pi i + \varepsilon_1 a_{2,1} + \varepsilon_2 a_{2,2})\right),$$

wo ε, ε' Null oder 1 und

$$\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

(s. *Prym,* theoria nova etc. p. 36, oder meinen Aufsatz über Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung). Der Kürze wegen soll die ϑ-Function

$$\vartheta(u_1 - \alpha_1' - \alpha_1'', u_2 - \alpha_2' - \alpha_2''),$$

da hier nie von elliptischen ϑ-Functionen (solchen mit einem Argumente) die Rede ist, mit

$$\vartheta(u-\alpha'-\alpha'')$$

bezeichnet werden. Die Function $\vartheta(u+\alpha'+\alpha'')$ ist dann Null in den beiden Punkten $-\alpha'$, $-\alpha''$, oder, nach dem Früheren, in den Punkten, welche mit α', α'' respective dasselbe z gemeinschaftlich haben.

Dies sind neben den bekannten Eigenschaften der ϑ-Function (Abhandlung §. 17) die Sätze, die wir in den folgenden Entwicklungen nöthig haben werden.

Untersuchen wir nun den Quotienten

$$Q = \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)}.$$

Derselbe ist, als Function des Punktes u betrachtet, nur Null in α und unendlich in β; $\lg Q$ ist daher in beiden Punkten logarithmisch unendlich. Zu beiden Seiten der Querschnitte (a_1), (a_2) haben die ϑ-Functionen gleiche Werthe; dagegen ist am Querschnitte (b_1):

$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\alpha) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\alpha).e^{-2(u_1+u'_1-\alpha_1)-a_{1,1}},$$
$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\beta) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\beta).e^{-2(u_1+u'_1-\beta_1)-a_{1,1}},$$

wenn wir durch die unter ϑ angebrachten Zeichen $+$, $-$ die Werthe der ϑ auf positiver oder negativer Seite des Querschnittes unterscheiden. Am Querschnitte (b_2) finden die Beziehungen statt

$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\alpha) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\alpha).e^{-2(u_2+u'_2-\alpha_2)-a_{2,2}},$$
$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\beta) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\beta).e^{-2(u_2+u'_2-\beta_2)-a_{2,2}}.$$

Daher hat $\log Q$, wenn wir von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ absehen, an den Querschnitten (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) respective die Periodicitätsmoduln:

$$0,\ 0,\ +2(\alpha_1-\beta_1),\ +2(\alpha_2-\beta_2).$$

Dieselben sind von der Lage des Punktes u' unabhängig; ist Q_1 der Werth von Q für eine andere Lage, etwa u'', dieses Punktes, so hat daher $\lg Q - \lg Q_1$ an allen vier Querschnitten die Periodicitätsmoduln Null; ferner ist diese Differenz, oder $\lg\frac{Q}{Q_1}$, als Function von u betrachtet, überall endlich, da Q und Q_1 nur gleichzeitig, und dann von derselben Ordnung, Null oder unendlich werden, mithin ist $\lg Q - \lg Q_1$ von u ganz unabhängig; $\lg Q$ muss, da es von

u' gerade so abhängt wie von u, die Summe zweier symmetrisch gebauten Ausdrücke sein, deren einer nur von u, der andere nur von u' abhängt; sei z_1 der in u' stattfindende Werth von z, so ist $\lg Q$ die Summe zweier Integrale dritter Gattung, mit den oberen Grenzen z und z_1, welche wie $\sqrt{(z, k, l, m)}$ verzweigt sind und es muss eine Gleichung geben von der Form:

$$(1.)\qquad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \int_{\zeta}^{z}\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \text{Const.}$$

Wir bestimmen nun zunächst die rationale Function $f(z)$. Der Ausdruck:

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \frac{f(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}}$$

ist von z_1 unabhängig. Wir wählen, um ihn zu bestimmen, z_1 so, dass

$$(u_1+u_1', u_2+u_2') \equiv (0, 0).$$

Dann sind Zähler und Nenner von Q gleich Null und es muss:

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)}$$

$$= \frac{\vartheta(u+u'-\beta)\dfrac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz} - \vartheta(u+u'-\alpha)\dfrac{d\vartheta(u+u'-\beta)}{dz}}{\vartheta(u+u'-\alpha)\,\vartheta(u+u'-\beta)}$$

nach der Regel behandelt werden, wie der Werth von Brüchen von der Form $\frac{0}{0}$ bestimmt wird. Wird Zähler und Nenner zweimal nach z differentiirt, da nach einmaliger Differentiation noch beide Null sind, so entsteht:

$$(2.)\qquad \frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{d^2\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz^2}}{\dfrac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz}} - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{d^2\vartheta(u+u'-\beta)}{dz^2}}{\dfrac{d\vartheta(u+u'-\beta)}{dz}}.$$

Hier ist rechts $u_1+u_1' = u_2+u_2' = 0$ zu setzen,

$$(3.)\qquad \frac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz} = \left(\vartheta_1'(-\alpha)\,\varphi_1(z) + \vartheta_2'(-\alpha)\,\varphi_2(z)\right)\frac{1}{\sqrt{(z,k,l,m)}},$$

wenn

$$\frac{d\vartheta(v_1, v_2)}{dv_1} = \vartheta_1'(v), \qquad \frac{d\vartheta(v_1, v_2)}{dv_2} = \vartheta_2'(v)$$

gesetzt wird. Ferner

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz^2} \\ &= \left(\vartheta_{1,1}''(-\alpha)\,\varphi_1^2(z) + 2\vartheta_{1,2}''(-\alpha)\,\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) + \vartheta_{2,2}''(-\alpha)\,\varphi_2^2(z)\right)\frac{1}{\sqrt{(z,k,l,m)}^2} \\ &\quad + \vartheta_1'(-\alpha)\frac{d}{dz}\frac{\varphi_1(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \vartheta_2'(-\alpha)\frac{d}{dz}\frac{\varphi_2(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}}. \end{aligned}\right.$$

Dies liefert den Werth für $f(z)$, welcher in (1.) einzuführen ist. Hier bezeichnen $\vartheta''_{1,1}(v)$, etc. die Werthe $\frac{d^2\vartheta(v_1, v_2)}{dv_1^2}$, etc. Bemerkenswerth wird diese Formel, wenn der Punkt β mit dem Punkte α ein gemeinsames z hat, also

$$(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) \equiv (0, 0)$$

ist. Hierfür soll auch allein die fertige Formel hingeschrieben werden, zumal bei den analogen Entwicklungen für mehr als vierfach periodische Functionen der dieser Annahme entsprechende Fall zugleich der allgemeinste ist.

Wir betrachten dann den Quotienten $Q = \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}$, und schreiben:

$$(5.)\qquad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \int_{\zeta}^{z}\frac{f(z, a)\,dz}{\sqrt{(z, k, l, m)}} + \int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{f(z, a)\,dz}{\sqrt{(z, k, l, m)}} + \text{Const.}$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\vartheta'_1(-\alpha) = -\vartheta'_1(\alpha), \qquad \vartheta_2(-\alpha) = -\vartheta'_2(\alpha),$$
$$\vartheta''_{1,1}(-\alpha) = \vartheta''_{1,1}(\alpha), \qquad \vartheta''_{1,2}(-\alpha) = \vartheta''_{1,2}(\alpha), \qquad \vartheta''_{2,2}(-\alpha) = \vartheta''_{2,2}(\alpha),$$

so entsteht aus (2.), (3.), (4.):

$$(6.)\qquad f(z, a) = -\frac{\vartheta''_{1,1}(\alpha)\varphi_1^2(z) + \vartheta''_{1,2}(\alpha)2\varphi_1(z)\varphi_2(z) + \vartheta''_{2,2}(\alpha)\varphi_2^2(z)}{\vartheta'_1(\alpha)\varphi_1(z) + \vartheta'_2(\alpha)\varphi_2(z)}.$$

In der That ist der Nenner von $f(z, a)$ Null für $z = a$; denn da $\vartheta(\alpha) = 0$, so ist auch $\frac{d\vartheta(\alpha)}{da}$ oder

$$\vartheta'_1(\alpha)\varphi_1(a) + \vartheta'_2(\alpha)\varphi_2(a) = 0.$$

Wir kommen nun zur Bestimmung der additiven Constanten in (5.).

Hierzu machen wir von folgender Eigenschaft der ϑ-Function Gebrauch, die sofort aus ihren bekannten Eigenschaften (Abhandlung §. 17) hervorgeht; sind nämlich m_1, m_2 ganze Zahlen, so ist:

$$\vartheta(v_1+m_1a_{1,1}+m_2a_{1,2}, v_2+m_1a_{2,1}+m_2a_{2,2})$$
$$= e^{-2(m_1v_1+m_2v_2)-(m_1^2a_{1,1}+2mna_{1,2}+n^2a_{2,2})}\vartheta(v_1, v_2).$$

Sind ζ und ζ_1 zwei Verzweigungswerthe von $\sqrt{(z, k, l, m)}$, und werden z, z_1 gleich ζ und ζ_1 gemacht, so ist:

$$(7.)\qquad \begin{cases} u_1+u'_1 = \frac{1}{2}(m'_1\pi i+m_1a_{1,1}+m_2a_{1,2}), \\ u_2+u'_2 = \frac{1}{2}(m'_2\pi i+m_1a_{1\,2}+m_2a_{2,2}), \end{cases}$$

m'_1, m'_2, m_1, m_2 ganzen Zahlen. Daher ist für diese Werthe von z und z_1:

$$\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \frac{\vartheta(\alpha-u-u')}{\vartheta(\alpha+u+u')}$$
$$= e^{2(m_1(\alpha_1-u_1-u'_1)+m_2(\alpha_2-u_2-u'_2))+m_1^2a_{1,1}+2m_1m_2a_{1,2}+m_2^2a_{2,2}}$$

oder mit Benutzung der Werthe für $u+u'$:

$$\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = 2m_1\alpha_1+2m_2\alpha_2-(m_1m_1'+m_2m_2')\pi i.$$

Die vollständige Formel (5.) lautet daher:

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned}&\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}\\ &=\int_\zeta^z\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+2m_1\alpha_1+2m_2\alpha_2-(m_1m_1'+m_2m_2')\pi i;\end{aligned}\right.$$

hierbei müssen ζ und ζ_1 zwei von einander verschiedene Verzweigungspunkte sein. Sobald nämlich $\zeta=\zeta_1$, ist für $z=\zeta$, $z_1=\zeta$;

$$(u_1+u_1',\ u_2+u_2') \equiv (0,0);$$

haben jetzt im Verzweigungspunkte ζ u_1 und u_2 die Werthe:

$$(9.)\quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1'\pi i+\varepsilon_1 a_{1,1}+\varepsilon_2 a_{1,2}),\qquad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2'\pi i+\varepsilon_1 a_{1,2}+\varepsilon_2 a_{2,2}),$$

so sind $\vartheta(u+u'-\alpha)=\vartheta(u+u'+\alpha)=0$; der Quotient beider Grössen muss nach der Regel behandelt werden für Brüche von der Form $\frac{0}{0}$, und hat jetzt den Werth

$$-e^{4\varepsilon_1\alpha_1+4\varepsilon_2\alpha_2}.$$

Wird $\lg(-1)=\pi i$ gesetzt, so lautet jetzt die vollständige Formel (5.):

$$(10.)\quad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}=\int_\zeta^z\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+\int_\zeta^{z_1}\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+4\varepsilon_1\alpha_1+4\varepsilon_2\alpha_2+\pi i.$$

Aus den Formeln (8.) und (10.) kann man die Werthe der ganzen Integrale dritter Gattung entnehmen; als ganze Integrale sollen die von einem Verzweigungspunkte ζ bis zu einem andern erstreckten Integrale bezeichnet werden.

Aus (10.) folgt, wenn $z=z_1=\eta$ gesetzt wird, und η einen von ζ verschiedenen Verzweigungswerth bezeichnet, in welchem u_1, u_2 die Werthe haben:

$$(11.)\quad \tfrac{1}{2}(\eta_1'\pi i+\eta_1 a_{1,1}+\eta_2 a_{1,2}),\qquad \tfrac{1}{2}(\eta_2'\pi i+\eta_1 a_{2,1}+\eta_2 a_{2,2}),$$

$$(12.)\quad 2\int_\zeta^\eta\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} = 4(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1+4(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2.$$

In der Nähe von $z=a$ ist

$$\int\frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}=\int\frac{dz}{z-a}.$$

Unser Integral kann daher um ganze Vielfache von $2\pi i$ verschiedene Werthe erlangen; dasselbe gilt für $\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}$, und es können daher auf der rechten Seite von (12.) auch solche Vielfache addirt werden. Durch Division mit 2 würde dann unser ganzes Integral in (12.) möglicher Weise um πi andere Werthe erlangen, und dies darf, wenn das Vorzeichen von $\sqrt{(z, k, l, m)}$ fixirt ist, nicht stattfinden. Die genauere Bestimmung wäre durch die Formel (8.) möglich, indess werden wir später auf anderem Wege kürzer hierzu gelangen.

Ist $z = a$ selbst der Verzweigungswerth ζ, so haben α_1, α_2 die Werthe (9.) und es ist:

$$(13.) \quad \begin{cases} \lg \dfrac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} \\ = 2\varepsilon_1(u_1+u_1'-\alpha_1)+2\varepsilon_2(u_2+u_2'-\alpha_2)+\varepsilon_1(\varepsilon_1 a_{1,1}+\varepsilon_2 a_{1,2})+\varepsilon_2(\varepsilon_1 a_{2,1}+\varepsilon_2 a_{2,2}) \\ = \pi i+2\varepsilon_1(u_1+u_1')+2\varepsilon_2(u_2+u_2'), \end{cases}$$

von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ abgesehen. Daher ist jetzt

$$(14.) \qquad f(z, a) = 2\varepsilon_1\varphi_1(z)+2\varepsilon_2\varphi_2(z).$$

Wir haben bis jetzt den Ausdruck

$$\lg \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \log \frac{\vartheta(\alpha-u-u')}{\vartheta(\alpha+u+u')}$$

als Function von z und z_1 betrachtet. Derselbe hat, als Function von a angesehen, ganz ähnliche Eigenschaften. Er ist dann ein Integral dritter Gattung, aber nach a integrirt, welches in den vier Punkten logarithmisch unendlich wird, die zu $a = z$, $a = z_1$ in der Fläche T gehören. Dies Integral hat an den Querschnitten (a_1), (a_2) die Periodicitätsmoduln Null (oder ganze Vielfache von $2\pi i$), an (b_1), (b_2) die Periodicitätsmoduln:

$$4(u_1+u_1'), \qquad 4(u_2+u_2').$$

Das Integral kann daher als eine Summe zweier Integrale angesehen werden, von denen das erste nur in $a = z$ logarithmisch unendlich wird, und an den vier Querschnitten (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) respective die Periodicitätsmoduln hat:

$$0, \quad 0, \quad 4u_1, \quad 4u_2.$$

Das zweite Integral muss dann in $a = z_1$ logarithmisch unendlich werden, und die Periodicitätsmoduln

$$0, \quad 0, \quad 4u_1', \quad 4u_2'$$

haben. Jedes dieser Integrale hat also genau die Eigenschaften, wie die vorhin entwickelten Integrale, nur a und z, oder respective a und z_1 mit einander vertauscht. Setzen wir (nach (6.)):

$$(15.) \qquad f(a, z) = -\frac{\vartheta_{1,1}''(u)\varphi_1^2(a)+2\vartheta_{1,2}''(u)\varphi_1(a)\varphi_2(a)+\vartheta_{2,2}''(u)\varphi_2^2(a)}{\vartheta_1'(u)\varphi_1(a)+\vartheta_2'(u)\varphi_2(a)},$$

so muss sein:

$$\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \int^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \int^a \frac{f(a,z_1)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \text{Const.}$$

Der Werth der Constanten bestimmt sich einfach, wenn wir als Anfang der Integration den Verzweigungswerth ζ nehmen, in welchem α_1, α_2 die Werthe (9.) haben. Dann ist der Werth der linken Seite nach (13.) gleich

$$\pi i + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2');$$

die vollständige Formel ist folglich:

$$(16.)\quad \left\{\begin{aligned} &\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} \\ &= \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \int_\zeta^a \frac{f(a,z_1)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2') + \pi i.\end{aligned}\right.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (8.) oder (10.) giebt die Vertauschung von Parameter und Argument für Integrale dritter Gattung. Man kann aber, und dies ist bemerkenswerth, die Gleichheit von nur zwei Integralen herstellen, statt der Gleichheit von Summen zweier Integrale. Legen wir in (10.) den Punkt z_1 nach ζ, so wird nach (14.):

$$f(a,z_1) = 2\varepsilon_1\varphi_1(a) + 2\varepsilon_2\varphi_2(a)$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\int_\zeta^z \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + 4\varepsilon_1\alpha_1 + 4\varepsilon_2\alpha_2 \\ &= \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + 2\int_\zeta^a \frac{\varepsilon_1\varphi_1(a)+\varepsilon_2\varphi_2(a)}{\sqrt{(a,k,l,m)}}\,da + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2').\end{aligned}$$

Rechts fallen die Werthe von u_1', u_2' heraus, da z_1 gleich ζ ist, und es entsteht:

$$(17.)\quad \int_\zeta^z \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} - 2\varepsilon_1 u_1 - 2\varepsilon_2 u_2 = \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} - 2\varepsilon_1\alpha_1 - 2\varepsilon_2\alpha_2.$$

Diese Formel liefert jetzt auch die genauen Werthe der ganzen Integrale. Legen wir nämlich z nach dem Verzweigungspunkte η, in welchem u_1, u_2 die Werthe (11.) besitzen, so ist, analog (14.):

$$f(a,z) = 2\eta_1\varphi_1(a) + 2\eta_2\varphi_2(a)$$

und die Ausführung der Formel (17.) ergiebt:

$$(18.)\quad \int_\zeta^\eta \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} = 2(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1 + 2(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2 + \big((\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_1'\eta_1)+(\varepsilon_2\eta_2'+\varepsilon_2'\eta_2)\big)\pi i.$$

Wie schon erwähnt, ist:

$$\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv \eta_1\eta_1' + \eta_2\eta_2' \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2);$$

die Integrale können nun immer um beliebige ganze Vielfache von $2\pi i$ geändert werden; addiren wir, was daher erlaubt ist, auf der rechten Seite von (18.) den Werth

$$\pi i(\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'+\eta_1\eta_1'+\eta_2\eta_2'),$$

so geht (18.) über in:

$$(19.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\zeta^\eta \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} \\ = 2(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1+2(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2+((\varepsilon_1+\eta_1)(\varepsilon_1'+\eta_1')+(\varepsilon_2+\eta_2)(\varepsilon_2'+\eta_2'))\pi i. \end{cases}$$

Der Factor von πi ist congruent 1 oder 0 nach dem Modul 2, je nachdem

$$\sqrt{\frac{z-\eta}{z-\zeta}}$$

eine gerade oder eine ungerade Charakteristik hat, mit Charakteristik nach *Riemann* den Complex bezeichnet:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\eta_1 & \varepsilon_2+\eta_2\\ \varepsilon_1'+\eta_1' & \varepsilon_2'+\eta_2'\end{pmatrix} = \left(\sqrt{\frac{z-\eta}{z-\zeta}}\right).$$

Aus diesen jetzt entwickelten Formeln kann man die Darstellung der Integrale zweiter Gattung entnehmen. Hiermit, sowie mit den Ausdrücken der Integrale dritter Gattung der allgemeinsten algebraischen Functionen will ich mich ein anderes Mal beschäftigen.

Halle, 1865.