

## UNA ESTENSIONE DEI NUMERI BERNOULLIANI.

Memoria di **Luigi Sinigallia** (Ferrara).

---

Adunanza del 28 luglio 1907.

---

Quella specie di reciprocità che esiste, come ho recentemente dimostrato <sup>1)</sup>, fra i numeri euleriani e pseudoeuleriani, ha pure luogo più generalmente fra le funzioni razionali intere  $f_r(\tau)$  di grado  $r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) e le funzioni  $f_r(-\tau)$  quando le  $f_r(\tau)$  soddisfanno ad una certa legge di ricorrenza.

Anzi, se è data una qualsiasi funzione razionale intera  $f_n(\tau)$ , potremo sempre determinare le  $n - 1$  funzioni  $f_r(\tau)$  ( $r = 1, 2, \dots, n - 1$ ) in modo che la detta legge di ricorrenza sia soddisfatta. E questa determinazione si effettua risolvendo un'equazione binomia ed  $n$  equazioni lineari.

Tali speciali funzioni comprendono le espressioni  $B_{p,n}^{(\tau)}$  che qui considero, espressioni le quali alla loro volta contengono come caso particolare i numeri bernoulliani e per le quali stabilisco una relazione che non è che la estensione di una notevole equazione dimostrata dal sig. LUCAS <sup>2)</sup> in un suo interessante lavoro sui numeri bernoulliani ed euleriani.

Mi occupo poi specialmente delle espressioni  $B_{p,n}^{(\tau)}$  nel caso  $p = 1$ , mostrando come per mezzo di esse possa semplicemente esprimersi la somma di una certa serie e costruendo una funzione che relativamente ad esse può considerarsi come l'analoga della funzione di BERNOULLI rispetto ai numeri bernoulliani. Da ultimo stabilisco alcune leggi cui soddisfanno le espressioni  $B_{p,n}^{(\tau)}$  quando  $p = 1$ ,  $\tau = -1$  e trovo le relazioni che legano questi numeri ai numeri euleriani, pseudoeuleriani, bernoulliani ed ai numeri che chiamo *pseudobernoulliani*.

---

<sup>1)</sup> *Sui nuovi numeri pseudo-euleriani del prof. PASCAL* [questi Rendiconti, tomo XXIV (2° semestre 1907), pp. 223-228].

<sup>2)</sup> LUCAS, *Théorie nouvelle des nombres de BERNOULLI et d'EULER* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo VIII (1877), pp. 56-79].

## § I.

I. Se

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sono delle quantità arbitrarie, formiamo le funzioni

$$A_n(\tau) = \begin{vmatrix} a_1 & \tau & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & \tau & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & \tau \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

e poniamo  $A_0(\tau) = 1$ . Abbiamo poi  $A_1(\tau) = a_1$  e, svolgendo il determinante secondo gli elementi della prima colonna,

$$(1) \quad A_n(\tau) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i \tau^{i-1} A_{n-i}(\tau).$$

Cerchiamo ora di esprimere  $A_n(\tau)$  in funzione dei valori che le  $A_i$  prendono corrispondentemente ad un altro valore  $\tau_i$  dell'argomento. A tale scopo dimostriamo la relazione

$$(2) \quad \tau^n A_{n-1}(\tau_i) - \tau_i^n A_{n-1}(\tau) = (\tau - \tau_i) \sum_{r=0}^{n-1} \tau^{n-r-1} \tau_i^r A_r(\tau) A_{n-r-1}(\tau_i)$$

che per  $n = 1$  si riduce alla identità

$$\tau - \tau_i = (\tau - \tau_i) A_0(\tau) A_0(\tau_i).$$

Perciò dalla (1) deduciamo

$$(2') \quad \tau^{n+1} A_n(\tau_i) - \tau_i^{n+1} A_n(\tau) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i (\tau \tau_i)^{i-1} [\tau^{n-i+2} A_{n-i}(\tau_i) - \tau_i^{n-i+2} A_{n-i}(\tau)];$$

ma se supponiamo soddisfatta la (2) per  $n = 1, 2, 3, \dots, n$  avremo

$$\tau^{n-i+2} A_{n-i}(\tau_i) - \tau_i^{n-i+2} A_{n-i}(\tau) = (\tau - \tau_i) \left[ \tau_i^{n-i+1} A_{n-i}(\tau) + \sum_{r=0}^{n-i} \tau^{n-r-i+1} \tau_i^r A_r(\tau) A_{n-r-i}(\tau_i) \right]$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ );

con ciò la (2') diviene

$$\begin{aligned} \tau^{n+1} A_n(\tau_i) - \tau_i^{n+1} A_n(\tau) &= (\tau - \tau_i) \tau_i^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i \tau^{i-1} A_{n-i}(\tau) \\ &\quad + (\tau - \tau_i) \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^{i+1} a_i \tau^{n-r} \tau_i^{i+r-1} A_r(\tau) A_{n-r-i}(\tau_i), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \tau^{n+1} A_n(\tau_i) - \tau_i^{n+1} A_n(\tau) &= (\tau - \tau_i) \tau_i^n A_n(\tau) \\ &\quad + (\tau - \tau_i) \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_i \tau^{n-r} \tau_i^{i+r-1} A_r(\tau) A_{n-r-i}(\tau_i) \end{aligned}$$

ed infine per la (1)

$$\tau^{n+1} A_n(\tau_i) - \tau_i^{n+1} A_n(\tau) = (\tau - \tau_i) \sum_{r=0}^n \tau^{n-r} \tau_i^r A_r(\tau) A_{n-r}(\tau_i).$$

Dunque la (2) sussiste ancora quando vi si muti  $n$  in  $n+1$ ; ma essa è vera per  $n = 1$ , dunque lo sarà anche per ogni valore di  $n$ .

Possiamo porre l'ultima equazione scritta sotto la forma seguente

$$(3) \quad \tau^n \tau_1 A_n(\tau_1) + (\tau_1 - \tau) \sum_{r=1}^{n-1} \tau^{n-r} \tau_1^r A_r(\tau) A_{n-r}(\tau_1) = \tau \tau_1^n A_n(\tau);$$

se ora risolviamo il sistema di equazioni che si ha ponendo successivamente nella (3)  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ , otteniamo

$$(4) \quad A_n(\tau_1) = \left( \frac{\tau - \tau_1}{\tau} \right)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} A_1(\tau) & \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau} & 0 & \dots \\ A_2(\tau) & A_1(\tau) & \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau} & \dots \\ A_3(\tau) & A_2(\tau) & A_1(\tau) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1}(\tau) & A_{n-2}(\tau) & A_{n-3}(\tau) & \dots & A_1(\tau) & \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau} \\ A_n(\tau) & A_{n-1}(\tau) & A_{n-2}(\tau) & \dots & A_2(\tau) & A_1(\tau) \end{vmatrix};$$

ed è appunto questa la formola che cercavamo.

2. È particolarmente interessante a considerarsi il caso in cui  $\tau_1 = -\tau$ ; allora la (3) diviene

$$A_n(\tau) + (-1)^n A_n(-\tau) = 2 \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} A_{n-r}(\tau) A_r(-\tau) \quad (n > 1)$$

e dalla (4) si ricava

$$(5) \quad A_n(-\tau) = 2^{n-1} \begin{vmatrix} A_1(\tau) & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ A_2(\tau) & A_1(\tau) & \frac{1}{2} & \dots \\ A_3(\tau) & A_2(\tau) & A_1(\tau) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1}(\tau) & A_{n-2}(\tau) & A_{n-3}(\tau) & \dots & A_1(\tau) & \frac{1}{2} \\ A_n(\tau) & A_{n-1}(\tau) & A_{n-2}(\tau) & \dots & A_2(\tau) & A_1(\tau) \end{vmatrix},$$

ossia, mutando  $\tau$  in  $-\tau$ ,

$$(5') \quad A_n(\tau) = 2^{n-1} \begin{vmatrix} A_1(-\tau) & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ A_2(-\tau) & A_1(-\tau) & \frac{1}{2} & \dots \\ A_3(-\tau) & A_2(-\tau) & A_1(-\tau) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1}(-\tau) & A_{n-2}(-\tau) & A_{n-3}(-\tau) & \dots & A_1(-\tau) & \frac{1}{2} \\ A_n(-\tau) & A_{n-1}(-\tau) & A_{n-2}(-\tau) & \dots & A_2(-\tau) & A_1(-\tau) \end{vmatrix}.$$

Vediamo così che come nel caso dei numeri euleriani e pseudoeuleriani, così pure fra i polinomi  $A_n(\tau)$ ,  $A_n(-\tau)$  esiste una specie di reciprocità, perchè le espressioni

che danno i valori dei polinomi  $A_n(-\tau)$  in funzioni dei polinomi  $A_n(\tau)$  sono identiche alle espressioni che danno il valore di questi ultimi polinomi in funzione dei primi <sup>3)</sup>.

3. Si può facilmente vedere che un polinomio di grado  $n-1$

$$P_{n-1}(\tau) = p_1 \tau^{n-1} + p_2 \tau^{n-2} + \dots + p_{n-1} \tau + p_n$$

può sempre ed in infiniti modi porsi sotto forma di un determinante ricorrente di ordine  $n$

$$\Delta_n(-\tau) = \begin{vmatrix} a_{11} & -\tau & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & -\tau & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & -\tau \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

ma può sempre e solo in un unico modo porsi sotto forma di un determinante ricorrente  $\Delta_n(-\tau)$  tale che i suoi elementi  $a_{i,h}$  corrispondenti ad uno stesso valore di  $i-h$  siano tutti uguali fra loro (quando  $p_n \neq 0$ ).

Infatti si avrà

$$\Delta_n(-\tau) = Q_1 \tau^{n-1} + Q_2 \tau^{n-2} + \dots + Q_{n-1} \tau + Q_n,$$

ove

$$Q_r = \sum a_{n,i_1+1} a_{i_1,i_2+1} \dots a_{i_{r-2},i_{r-1}+1} a_{i_{r-1},1} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

essendo il sommatorio esteso a tutti i possibili valori dei numeri  $i$  tali che

$$n > i_1 > i_2 > \dots > i_{r-1} \geq 1.$$

<sup>3)</sup> Parimenti, se tra le  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ed  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sussistono le relazioni

$$y_1 = x_1,$$

$$y_h + (-1)^h x_h = a \sum_{i=1}^{h-1} (-1)^{i+1} x_i y_{h-i} \quad (h = 2, 3, \dots, n),$$

sarà

$$y_h = a^{h-1} \begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{a} & 0 & \dots \\ x_2 & x_1 & \frac{1}{a} & \dots \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{h-1} & x_{h-2} & x_{h-3} & \dots & x_1 & \frac{1}{a} \\ x_h & x_{h-1} & x_{h-2} & \dots & x_2 & x_1 \end{vmatrix} \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_h = a^{h-1} \begin{vmatrix} y_1 & \frac{1}{a} & 0 & \dots \\ y_2 & y_1 & \frac{1}{a} & \dots \\ y_3 & y_2 & y_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{h-1} & y_{h-2} & y_{h-3} & \dots & y_1 & \frac{1}{a} \\ y_h & y_{h-1} & y_{h-2} & \dots & y_2 & y_1 \end{vmatrix} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Segue subito di qui che in  $Q_r$  non può comparire alcun elemento  $a_{i,t}$  in cui  $i > n - r + 1$  e che in esso l'elemento  $a_{n-r+1,1}$  compare solo nel termine

$$a_{n,n} a_{n-1,n-1} \dots a_{n-r+2,n-r+2} a_{n-r+1,1}.$$

Perciò se nel determinante  $\Delta_n(-\tau)$  prendiamo ad arbitrio tutti gli elementi  $a_{i,b}$  in cui  $b > 1$  colla sola condizione che si abbia

$$a_{i,i} \neq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

le equazioni

$$Q_r = p_r \quad (r = n, n-1, \dots, 2, 1)$$

determineranno successivamente  $a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}$  in modo che il polinomio  $P_{n-1}(\tau)$  risulterà uguale al determinante ricorrente  $\Delta_n(-\tau)$ . In particolare, prendendo

$$a_{i,i} = 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$a_{i,b} = 0 \quad (i \neq b, b > 1),$$

avremo  $a_{n-1+1,1} = p_1$ , cioè, come è noto,

$$P_{n-1}(\tau) = \begin{vmatrix} p_n & -\tau & 0 & & \dots \\ p_{n-1} & 1 & -\tau & 0 & \dots \\ p_{n-2} & 0 & 1 & -\tau & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_2 & 0 & 0 & & \dots 0 & 1 & -\tau \\ p_1 & 0 & 0 & & \dots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Invece, per porre il polinomio  $P_{n-1}(\tau)$  sotto forma del determinante ricorrente  $A_n(-\tau)$  del numero precedente, notiamo che

$$A_n(-\tau) = q_1 \tau^{n-1} + q_2 \tau^{n-2} + \dots + q_{n-1} \tau + q_n,$$

ove

$$q_r = \sum a_{b_1} a_{b_2} \dots a_{b_r} \quad (b_1, b_2, \dots, b_r = 1, \dots, n),$$

essendo il sommatorio esteso a tutte le combinazioni con ripetizione degli  $r$  indici  $b_i$  tali che

$$b_1 + b_2 + \dots + b_r = n.$$

Perciò i termini di  $q_r$  che contengono  $a_{n-r+1}$  avranno tutti la espressione  $a_1^{r-1} a_{n-r+1}$ , cioè in  $q_r$  non può comparire alcun elemento  $a_i$  coll'indice maggiore di  $n - r + 1$  e se  $r < n$  l'elemento  $a_{n-r+1}$  compare in  $q_r$  linearmente. Ora se, dopo avere determinato  $a_1$  per mezzo della equazione binomia

$$q_n = a_1^n = p_n$$

colle equazioni

$$q_r = p_r \quad (r = n-1, n-2, \dots, 2, 1)$$

rispettivamente lineari nelle  $a_2, a_3, \dots, a_n$ , determiniamo successivamente queste quantità, avremo reso il determinante  $A_n(-\tau)$  uguale al polinomio  $P_{n-1}(\tau)$ . E gli elementi del determinante  $A_n(-\tau)$  saranno determinati in modo unico, se ci limitiamo a con-

siderare determinanti ad elementi reali e nel caso di  $n$  pari conveniamo di prendere la radice reale positiva della equazione  $a_i^n = p_n$  (potendosi sempre supporre  $p_n > 0$ ). Quindi se si ha una successione di funzioni razionali intere  $f_i(\tau)$  tali che fra esse sussista la formola di ricorrenza

$$(6) \quad f_n(\tau) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i \tau^{i-1} f_{n-i}(\tau),$$

essendo le  $a_i$  delle quantità determinate, potremo applicare a queste funzioni i risultati precedentemente ottenuti ed in particolare esisterà fra le  $f_i(\tau)$ ,  $f_i(-\tau)$  quella specie di reciprocità sopra osservata. Inoltre se è data una funzione qualunque razionale intera  $f_n(\tau)$  di grado  $n$  sapremo sempre determinare le  $f_i(\tau)$ , ( $i < n$ ) tali che sia verificata la (6) purchè  $f_n(0) \neq 0$ .

In particolare, se

$$A_n(\tau) = a(a - \tau)^{n-1},$$

avremo per la (5)

$$(a + \tau)^n = 2^n a^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2a} & 0 & \dots \\ (a - \tau) & 1 & \frac{1}{2a} & \dots \\ (a - \tau)^2 & (a - \tau) & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a - \tau)^{n-1} & (a - \tau)^{n-2} & (a - \tau)^{n-3} & \dots & (a - \tau) & 1 & \frac{1}{2a} \\ (a - \tau)^n & (a - \tau)^{n-1} & (a - \tau)^{n-2} & \dots & (a - \tau)^2 & (a - \tau) & 1 \end{vmatrix},$$

e, se  $a = 1$ ,  $\tau = 1 - k$ ,

$$(k - 2)^n = (-1)^n 2^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ k & 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ k^2 & k & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^{n-1} & k^{n-2} & k^{n-3} & \dots & k & 1 & \frac{1}{2} \\ k^n & k^{n-1} & k^{n-2} & \dots & k^2 & k & 1 \end{vmatrix}.$$

## § II.

4. Poniamo, nel determinante che dà il valore di  $A_n(\tau)$ ,

$$a_i = \frac{1}{(p - i + 1)!};$$

se

$$B_{p,n}^{(\tau)} = (-1)^n n! A_n(\tau),$$

avremo

$$(7) \quad B_{p,n}^{(\tau)} = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{p!} & \tau & 0 & \dots \\ \frac{1}{(p+1)!} & \frac{1}{p!} & \tau & \dots \\ \frac{1}{(p+2)!} & \frac{1}{(p+1)!} & \frac{1}{p!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(p+n-2)!} & \frac{1}{(p+n-3)!} & \frac{1}{(p+n-4)!} & \dots & \frac{1}{p!} & \tau \\ \frac{1}{(p+n-1)!} & \frac{1}{(p+n-2)!} & \frac{1}{(p+n-3)!} & \dots & \frac{1}{(p+1)!} & \frac{1}{p!} \end{vmatrix}.$$

Le espressioni  $B_{p,n}^{(\tau)}$  non sono che i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione

$$(7') \quad \psi_p(x, \tau) = \frac{\tau^p x^{p-1}}{e^{\tau x} - \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\tau^h x^h}{h!} + \tau^p x^{p-1}} = B_{p,0}^{(\tau)} + B_{p,1}^{(\tau)} \frac{x}{1!} + B_{p,2}^{(\tau)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Infatti, essendo

$$\psi_p(x, \tau) = \frac{1}{1 + \frac{x}{p!} + \frac{\tau x^2}{(p+1)!} + \frac{\tau^2 x^3}{(p+2)!} + \dots},$$

si ha  $B_{p,0}^{(\tau)} = 1$  e tra i coefficienti  $B_{p,n}^{(\tau)}$  sussiste la formola di ricorrenza

$$(8) \quad \frac{(n+p-1)!}{n!} B_{p,n}^{(\tau)} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{p+n-1}{r+p} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r = 0;$$

donde si deduce facilmente per  $B_{p,n}^{(\tau)}$  la espressione (7).

Per  $p=2$ ,  $\tau=1$  i coefficienti  $B_{p,n}^{(\tau)}$  coincidono in valore assoluto coi numeri bernoulliani e, tenendo conto dei risultati del paragrafo precedente, dalle espressioni di una qualsiasi funzione per mezzo dei coefficienti  $B_{p,n}^{(\tau)}$  sapremo subito dedurre il valore della stessa in funzione dei coefficienti  $B_{p,n}^{(-\tau)}$  o  $B_{p,n}^{(1)}$ , e viceversa.

Cerchiamo di trasformare la formola di ricorrenza; perciò scriviamo simbolicamente

$$(B_p^{(\tau)} + \tau)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r,$$

convenendo cioè nello sviluppo di  $(B_p^{(\tau)} + \tau)^n$  di porre gli esponenti di  $B_p^{(\tau)}$  come indici. Se  $n \geq p$  abbiamo

$$(B_p^{(\tau)} + \tau)^n - B_{p,n}^{(\tau)} = \sum_{r=1}^{p-1} \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r + \sum_{r=p}^n \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r;$$

ma per la (8)

$$\sum_{r=p}^n \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r = \tau^p \sum_{r=0}^{n-p} \binom{n}{r+p} B_{p,n-r-p}^{(\tau)} \tau^r = - \frac{n!}{(n-p+1)!} B_{p,n-p+1}^{(\tau)} \tau^p,$$

sicchè

$$(9) \quad (B_p^{(\tau)} + \tau)^n - B_{p,n}^{(\tau)} = \sum_{r=1}^{p-1} \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r - \frac{n!}{(n-p+1)!} B_{p,n-p+1}^{(\tau)} \tau^p \quad (n \geq p).$$

Invece, se  $n < p$ ,

$$(9') \quad (B_p^{(\tau)} + \tau)^n - B_{p,n}^{(\tau)} = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r \quad (n < p).$$

Sia ora  $f(x)$  una funzione cui è applicabile lo sviluppo in serie di TAYLOR, sicchè

$$f(x + B_p^{(\tau)} + \tau) - f(x + B_p^{(\tau)}) = \tau f'(x) + \sum_{n=2}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} [(B_p^{(\tau)} + \tau)^n - B_{p,n}^{(\tau)}] \\ + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} [(B_p^{(\tau)} + \tau)^n - B_{p,n}^{(\tau)}],$$

avremo per le (9), (9')

$$(10) \quad \begin{cases} f(x + B_p^{(\tau)} + \tau) - f(x + B_p^{(\tau)}) = \tau f'(x) + \sum_{n=2}^{p-1} \sum_{r=1}^n \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r \\ + \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r - \tau^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-p+1)!} B_{p,n-p+1}^{(\tau)}. \end{cases}$$

Ma se  $f(x + H)$  è sviluppabile in serie di TAYLOR, anche  $f^{(r)}(x + h)$  se  $h < H$  ammetterà tale sviluppo, cioè

$$f^{(r)}(x + B_p^{(\tau)}) = f^{(r)}(x) + \sum_{n=r+1}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \quad (r = 1, 2, \dots, p-2) \\ f^{(p-1)}(x + B_p^{(\tau)}) = f^{(p-1)}(x) + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)};$$

donde

$$\sum_{r=1}^{p-1} \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(x + B_p^{(\tau)}) = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(x) + \sum_{r=1}^{p-2} \sum_{n=r+1}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r \\ + \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{p-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r + \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{f^{(n)}(x)}{r!(n-r)!} B_{p,n-r}^{(\tau)} \tau^r \\ = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\tau^r}{r!} [f^{(r)}(x + B_p^{(\tau)}) - f^{(r)}(x)];$$

con ciò la (10) diviene

$$f(x + B_p^{(\tau)} + \tau) - f(x + B_p^{(\tau)}) = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(x + B_p^{(\tau)}) - \tau^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-p+1)!} B_{p,n-p+1}^{(\tau)}.$$

Ancora

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-p+1)!} B_{p,n-p+1}^{(\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+p-1)}(x)}{n!} B_{p,n}^{(\tau)} = f^{(p-1)}(x + B_p^{(\tau)}) - f^{(p-1)}(x),$$

sicchè

$$(11) \quad f(x + B_p^{(\tau)} + \tau) - f(x + B_p^{(\tau)}) - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(x + B_p^{(\tau)}) + \tau^p f^{(p-1)}(x + B_p^{(\tau)}) = \tau^p f^{(p-1)}(x).$$

È questa la formola cui volevamo giungere e che contiene come caso particolare quella data dal LUCAS e relativa ai numeri bernoulliani. Ponendo nella (11)  $f(x) = e^{\tau x}$  si ottiene

$$e^{B_p^{(\tau)} \tau} \left( e^{\tau x} - \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\tau^r x^r}{r!} + \tau^p x^{p-1} \right) = \tau^p x^{p-1},$$



che è appunto la relazione che può servire di definizione dei coefficienti  $B_{p,n}^{(\tau)}$ . Se facciamo nella (11) successivamente  $x = 0, \tau, 2\tau, \dots, (k-1)\tau$  e sommiamo, abbiamo

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} f(k\tau + B_p^{(\tau)}) - f(B_p^{(\tau)}) - \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(s\tau + B_p^{(\tau)}) + \tau^p \sum_{s=0}^{k-1} f^{(p)}(s\tau + B_p^{(\tau)}) \\ = \tau^p \sum_{s=0}^{k-1} f^{(p)}(s\tau). \end{aligned} \right.$$

In particolare, se  $f(x) = x^m$ , le (11), (12) divengono

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} (x + B_p^{(\tau)} + \tau)^m - (x + B_p^{(\tau)})^m - \sum_{r=1}^{p-1} \binom{m}{r} (x + B_p^{(\tau)})^{m-r} \tau^r \\ + \frac{m!}{(m-p+1)!} \tau^p (x + B_p^{(\tau)})^{m-p+1} = \frac{m!}{(m-p+1)!} \tau^p x^{m-p+1}, \end{aligned} \right.$$

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} (k\tau + B_p^{(\tau)})^m - B_{p,m}^{(\tau)} - \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{m}{r} (s\tau + B_p^{(\tau)})^{m-r} \tau^r \\ + \frac{m!}{(m-p+1)!} \tau^p \sum_{s=0}^{k-1} (s\tau + B_p^{(\tau)})^{m-p+1} = \frac{m!}{(m-p+1)!} \tau^p \sum_{s=0}^{k-1} (s\tau)^{m-p+1}. \end{aligned} \right.$$

5. Se  $p = 2$ ,  $\tau = -1$ , i coefficienti corrispondenti possono dirsi *numeri pseudobernoulliani*, analogamente a quanto ha fatto il prof. PASCAL per i numeri pseudoeuleriani. I numeri pseudobernoulliani sono i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione

$$\frac{x}{e^{-x} + 2x - 1}$$

e, ponendo per brevità di scrittura

$$B_{2,n}^{(-1)} = B'_n,$$

la loro formola di ricorrenza è

$$B'_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n+1}{r} B'_r,$$

sicchè

$$B'_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & -\binom{2}{1} & 0 & \dots \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{2} & -\binom{3}{1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \dots & \binom{n}{2} & -\binom{n}{1} \\ \binom{n+1}{n+1} & \binom{n+1}{n} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{n+1}{3} & \binom{n+1}{2} \end{vmatrix}.$$

Di qui si vede subito che i numeri pseudobernoulliani ad indice pari sono positivi e gli altri negativi. I primi di questi numeri hanno i valori seguenti

$$\begin{aligned} B'_0 &= 1; & B'_1 &= -\frac{1}{2}; & B'_2 &= \frac{5}{6}; & B'_3 &= -2; \\ B'_4 &= \frac{191}{30}; & B'_5 &= -\frac{76}{3}; & B'_6 &= \frac{5081}{42}; & B'_7 &= -674. \end{aligned}$$

Da quanto abbiamo dimostrato (n° 2) segue anche che ad ogni relazione che contiene i numeri bernoulliani, ne corrisponde un'altra che contiene i pseudobernoulliani e viceversa; ricordando poi che i numeri bernoulliani ad indice impari sono tutti nulli, abbiamo, per la (5'), che fra i numeri pseudobernoulliani sussiste l'identità

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} B'_1 & \frac{1}{2!} & 0 & \dots \\ \frac{1}{2!} B'_2 & \frac{1}{1!} B'_1 & \frac{1}{2!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} B'_{2n} & \frac{1}{(2n-1)!} B'_{2n-1} & \dots & \frac{1}{1!} B'_1 & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{(2n+1)!} B'_{2n+1} & \frac{1}{(2n)!} B'_{2n} & \dots & \frac{1}{2!} B'_2 & \frac{1}{1!} B'_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (n > 0).$$

La (11) in questo caso diviene

$$(13) \quad f(x+B'-1) - f(x+B') + 2f'(x+B') = f'(x),$$

donde, ponendo successivamente  $x = k, k-1, \dots, 2, 1$  e sommando, si deduce

$$f(B') - f(k+B') + 2 \sum_{r=1}^k f'(B'+r) = \sum_{r=1}^k f'(r);$$

e, se  $f(x) = x^m$ ,

$$B'_m - (k+B')^m + 2m \sum_{r=1}^k (B'+r)^{m-1} = m \sum_{r=1}^k r^{m-1}.$$

Invece, se

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)},$$

poichè

$$f(x+B'-1) - f(x+B') = \frac{n+1}{(x+B'-1)(x+B') \dots (x+B'+n)}$$

$$f'(x) = - \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)} \sum_{r=0}^n \frac{1}{x+r},$$

avremo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+B'-1)(x+B') \dots (x+B'+n)} \left[ 2(x+B'-1) \sum_{r=0}^n \frac{1}{x+B'+r} - (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)} \sum_{r=0}^n \frac{1}{x+r} \end{aligned}$$

e per  $x=1$

$$\frac{1}{B'(B'+1) \dots (B'+n+1)} \left[ 2B' \sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{B'+r} - (n+1) \right] = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{r}.$$

### § III.

6. Occupiamoci in questo paragrafo del caso  $p=1$  e poniamo

$$B_{1,n}^{(\tau)} = C_n^{(\tau)};$$

sicchè le espressioni  $C_n^{(\tau)}$  sono i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione

$$\frac{\tau}{e^{\tau k} + \tau - 1}.$$

In questo caso la (11) diviene

$$(14) \quad f(x + C^{(\tau)} + \tau) + (\tau - 1)f(x + C^{(\tau)}) = \tau f(x).$$

Per quanto abbiamo visto al n° 1 possiamo limitarci a considerare un valore speciale di  $\tau$ , perchè da una relazione qualunque che contiene le  $C$  con un valore speciale di  $\tau$  sapremo subito passare ad un'altra formola contenente i coefficienti  $C$  relativi ad un valore qualunque della stessa  $\tau$ .

Prima però facciamo vedere come la somma di una certa serie possa esprimersi per mezzo dei numeri  $C^{(\tau)}$ .

Supponiamo dapprima  $\tau > 2$  e rammentiamo <sup>4)</sup> che pei valori di  $x$  pei quali

$$(14') \quad (\tau - 1)^{\frac{1}{\tau}} > e^x > \left(\frac{1}{\tau - 1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

la serie doppia

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n \tau^n x^n}{n! (\tau - 1)^m}$$

è convergente. In tal caso, pei valori di  $x$  che soddisfanno alla (14') si ha

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{e^{\tau x} + \tau - 1} &= \frac{\tau}{\tau - 1} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{e^{m\tau x}}{(\tau - 1)^m} \right] \\ &= 1 + \frac{\tau}{\tau - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^n \tau^n x^n}{(\tau - 1)^m \cdot n!}; \end{aligned}$$

ma

$$\frac{\tau}{e^{\tau x} + \tau - 1} = C_0^{(\tau)} + C_1^{(\tau)} \frac{x}{1!} + C_2^{(\tau)} \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

dunque

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^n}{(\tau - 1)^m} = \frac{\tau - 1}{\tau^{n+1}} C_n^{(\tau)} \quad (\tau > 2, n > 0).$$

Sia invece  $2 > \tau > 1$ ; pei valori di  $x$  pei quali

$$\left(\frac{1}{\tau - 1}\right)^{\frac{1}{\tau}} > e^x > (\tau - 1)^{\frac{1}{\tau}}$$

la serie doppia

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - 1)^{m+1} (m + 1)^n \tau^n x^n}{n!}$$

è convergente, dunque pei detti valori di  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{e^{\tau x} + \tau - 1} &= \tau e^{-\tau x} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\tau - 1)^m e^{-m\tau x} \right] \\ &= 1 + \frac{\tau}{\tau - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (\tau - 1)^{m+1} (m + 1)^n \tau^n x^n}{n!} \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\tau - 1)^m \cdot m^n = (-1)^{n+1} \frac{\tau - 1}{\tau^{n+1}} C_n^{(\tau)} \quad (2 > \tau > 1, n > 0).$$

<sup>4)</sup> Nota citata <sup>1)</sup>, pp. 227-228.

Analogamente, se  $1 > \tau > 0$ , pei valori di  $x$  pei quali

$$\left(\frac{1}{1-\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} > e^x > (1-\tau)^{\frac{1}{\tau}},$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{e^{\tau x} + \tau - 1} &= \tau e^{-\tau x} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\tau)^m e^{-m\tau x} \right] \\ &= 1 + \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\tau)^{m+1} (m+1)^n \tau^n x^n}{n!}; \end{aligned}$$

sicchè

$$\sum_{m=1}^{\infty} (1-\tau)^m m^n = (-1)^n \frac{1-\tau}{\tau^{n+1}} C_n^{(\tau)} \quad (1 > \tau > 0, n > 0).$$

Infine, se  $\tau$  è negativo, poniamo  $\tau = -\sigma$  ( $\sigma > 0$ ), pei valori di  $x$  pei quali

$$(\sigma + 1)^{\frac{1}{\sigma}} > e^x > \left(\frac{1}{\sigma + 1}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

sarà

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{e^{\tau x} - (1-\tau)} &= \frac{\sigma}{\sigma + 1 - e^{-\sigma x}} = \frac{\sigma}{\sigma + 1} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\sigma x}}{(\sigma + 1)^m} \right] \\ &= 1 + \frac{\sigma}{\sigma + 1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n m^n \sigma^n x^n}{n! (\sigma + 1)^m} \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n}{(\sigma + 1)^m} = (-1)^n \frac{\sigma + 1}{\sigma^{n+1}} C_n^{(-\sigma)} \quad (\sigma > 0, n > 0).$$

7. La funzione di BERNOULLI è, come è noto, un polinomio, i cui termini contengono una potenza della variabile moltiplicata per dei coefficienti binomiali e per dei numeri bernoulliani: tale polinomio pei valori interi e positivi della variabile è uguale alla somma delle potenze uguali dei primi numeri naturali. Per avere una funzione simile relativa ai numeri  $C_n^{(\tau)}$  consideriamo la somma

$$\Omega(x, \tau, n) = \sum_{h=1}^{x-1} (h\tau)^n (1-\tau)^{x-h-1}$$

e, poichè

$$(h\tau)^n = \left( \frac{d^n}{d\chi^n} e^{h\tau\chi} \right)_{\chi=0},$$

avremo

$$\Omega(x, \tau, n) = \left\{ \frac{d^n}{d\chi^n} \left[ \sum_{h=0}^{x-1} (1-\tau)^{x-h-1} e^{h\tau\chi} \right] \right\}_{\chi=0} = \left[ \frac{d^n}{d\chi^n} \frac{e^{x\tau\chi} - (1-\tau)^x}{e^{\tau\chi} - (1-\tau)} \right]_{\chi=0}.$$

Ma

$$e^{x\tau\chi} - (1-\tau)^x = 1 - (1-\tau)^x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x\tau\chi)^r}{r!},$$

dunque, osservando che

$$\left[ \frac{d^n}{d\chi^n} \frac{\chi^r}{e^{\tau\chi} - (1-\tau)} \right]_{\chi=0} = 0, \quad \text{se } r > n,$$

sarà

$$\Omega(x, \tau, n) = \sum_{r=1}^n \frac{x^r \tau^r}{r!} \left[ \frac{d^n}{d\chi^n} \frac{\chi^r}{e^{\tau\chi} - (1-\tau)} \right]_{\chi=0} + [1 - (1-\tau)^x] \left[ \frac{d^n}{d\chi^n} \frac{1}{e^{\tau\chi} - (1-\tau)} \right]_{\chi=0}.$$

Ancora, se  $n \geq r$

$$\left[ \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{\tau^r}{e^{\tau} - (1-\tau)} \right]_{\tau=0} = \binom{n}{r} r! \left[ \frac{d^{n-r}}{d\tau^{n-r}} \frac{1}{e^{\tau} - (1-\tau)} \right]_{\tau=0} = \binom{n}{r} \frac{r!}{\tau} C_{n-r}^{(\tau)};$$

dunque

$$\Omega(x, \tau, n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} C_{n-r}^{(\tau)} \tau^{r-1} x^r - \frac{(1-\tau)^x}{\tau} C_n^{(\tau)}.$$

Naturalmente qui si è supposto  $\tau \neq 1$ . Per  $\tau = -1$  si deduce che la funzione

$$\sum_{r=0}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} C_r^{(-1)} x^{n-r} + (-1)^n 2^x C_n^{(-1)}$$

è pei valori interi positivi di  $x$  uguale a

$$\sum_{h=1}^{x-1} 2^{x-h-1} h^n.$$

8. I numeri  $C_n^{(1)}$  sono i coefficienti dello sviluppo in serie di  $e^{-x}$ , dunque

$$C_n^{(1)} = (-1)^n,$$

e si ritrova così la formola dimostrata dal prof. D'OVIDIO <sup>5)</sup>

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}.$$

Consideriamo invece il caso  $\tau = -1$  e poniamo  $C_n^{(-1)} = C_n$ ; la formola di ricorrenza pei numeri  $C_n$ , che sono i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione

$$\frac{1}{2 - e^{-x}}, \text{ è }$$

$$C_n = \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{n}{r} C_{n-r}.$$

I primi numeri  $C_n$  hanno questi valori

$C_0 = 1$ ,  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 3$ ,  $C_3 = -13$ ,  $C_4 = 75$ ,  $C_5 = -541$ ,  $C_6 = 4683$ ; i numeri  $C_n$  sono dunque tutti interi,  $C_{2n}$  è positivo,  $C_{2n+1}$  è negativo e tra essi per la (5) sussiste la relazione

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} C_1 & \frac{1}{2!} & 0 & \dots \\ \frac{1}{2!} C_2 & \frac{1}{1!} C_1 & \frac{1}{2!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} C_n & \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1} & \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2} & \dots & \frac{1}{1!} C_1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1} n!}.$$

<sup>5)</sup> D'OVIDIO, *Due teoremi di determinanti* [Giornale di Matematiche, vol. I (1863), pp. 135-139].

Possiamo dimostrare che

$$(15) \quad \begin{cases} C_{4m} \equiv 5 \\ -C_{4m+1} \equiv 1 \\ C_{4m+2} \equiv 3 \\ -C_{4m+3} \equiv 3 \end{cases} \pmod{10}; \quad (m \neq 0)$$

queste congruenze infatti sussistono per  $C_r$  in cui  $r = 1, 2, 3, 4$ ; supponiamole vere per tutti gli  $r < 4m$  e dimostriamo che esse avranno luogo anche per  $r = 4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3$ .

Intanto, poichè

$$C_{4m} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} C_{4r} - \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} C_{4r+1} + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} C_{4r+2} - \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} C_{4r+3},$$

sarà per le (15)

$$C_{4m} \equiv 5 \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} + 3 \left[ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} \right] + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} - 4 \pmod{10};$$

ma <sup>6)</sup>

$$(16) \quad \begin{cases} \sum_{r=0}^{2m-1} \binom{8m}{4r} = 2^{8m-2} + 2^{4m-1} - 1 \equiv 1 \\ \sum_{r=0}^{2m} \binom{8m+4}{4r} = 2^{8m+2} - 2^{4m+1} - 1 \equiv 1 \\ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} = 2^{4m-2} \equiv 4 \pmod{10}, \\ \sum_{r=0}^{2m-1} \binom{8m}{4r+2} = 2^{8m-2} - 2^{4m-1} \equiv 6 \\ \sum_{r=0}^{2m} \binom{8m+4}{4r+2} = 2^{8m+2} + 2^{4m+1} \equiv 6 \end{cases}$$

dunque

$$C_{4m} \equiv 5 \pmod{10}.$$

Dalla formola di ricorrenza delle  $C$  poichè

$$\binom{4m+1}{r} = \binom{4m}{r} + \binom{4m}{r-1} \quad \text{se} \quad 4m+1 > r > 0,$$

deduciamo poi

$$\begin{aligned} -C_{4m+1} &= \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} (C_{4r} - C_{4r+1}) + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} (-C_{4r+1} + C_{4r+2}) \\ &+ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} (C_{4r+2} - C_{4r+3}) + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} (-C_{4r+3} + C_{4r+4}) + C_{4m}; \end{aligned}$$

ma per le (15)

$$\begin{aligned} -C_{4m+1} &\equiv 6 \left[ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} \right] + 4 \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} \\ &+ 8 \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} + 1 \pmod{10}, \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> PASCAL, *I determinanti ricorrenti e i nuovi numeri pseudo-euleriani* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XL (1907), pp. 461-475], pp. 468-469.

dunque per le (16)

$$-C_{4m+1} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Ancora, essendo

$$\binom{4m+2}{r} = \binom{4m}{r} + 2\binom{4m}{r-1} + \binom{4m}{r-2} \quad (4m+1 > r > 1),$$

avremo

$$\begin{aligned} C_{4m+2} &= \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} (C_{4r} - 2C_{4r+1} + C_{4r+2}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} (-C_{4r+1} + 2C_{4r+2} - C_{4r+3}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} (C_{4r+2} - 2C_{4r+3} + C_{4r+4}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} (-C_{4r+3} + 2C_{4r+4} - C_{4r+5}) + C_{4m} - 2C_{4m+1} \end{aligned}$$

e per le (15), (16)

$$C_{4m+2} \equiv 4 \left[ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} \right] + 3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Infine, essendo

$$\begin{aligned} \binom{4m+3}{r} &= \binom{4m}{r} + 3\binom{4m}{r-1} + 3\binom{4m}{r-2} + \binom{4m}{r-3} \quad (4m+2 > r > 2), \\ \binom{4m+3}{2} &= \binom{4m}{2} + 3\binom{4m}{1} + 3\binom{4m}{0}, \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} -C_{4m+3} &= \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r} (C_{4r} - 3C_{4r+1} + 3C_{4r+2} - C_{4r+3}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} (-C_{4r+1} + 3C_{4r+2} - 3C_{4r+3} + C_{4r+4}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} (C_{4r+2} - 3C_{4r+3} + 3C_{4r+4} - C_{4r+5}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} (-C_{4r+3} + 3C_{4r+4} - 3C_{4r+5} - C_{4r+6}) + C_{4m} - 3C_{4m+1} + 3C_{4m+2}; \end{aligned}$$

di qui per le (15) deduciamo

$$-C_{4m+3} \equiv 4 \left[ \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+1} + \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+3} \right] + 8 \sum_{r=0}^{m-1} \binom{4m}{4r+2} + 3 \pmod{10}$$

e per le (16)

$$-C_{4m+3} \equiv 3 \pmod{10}.$$

9. Vogliamo da ultimo trovare le relazioni che legano i numeri  $C$  ai numeri bernoulliani  $B_n$ , pseudobernoulliani  $B'_n$ , euleriani  $E_n$ , pseudoeuleriani  $E'_n$ .

Notiamo a tale scopo che, ponendo simbolicamente

$$e^{Bx} = \frac{x}{e^x - 1}, \quad e^{B'x} = \frac{x}{e^{-x} + 2x - 1}, \quad e^{Ex} = \frac{1}{\cos x},$$

$$e^{Cx} = \frac{1}{2 - e^{-x}}, \quad e^{E'x} = \frac{1}{2 - \cos hx},$$

si ha

$$e^{-Bx}(1 - e^{Cx}) = xe^{Cx},$$

$$e^{B'x}[(1 + 2x)e^{Cx} - 1] = xe^{Cx},$$

$$2e^{iCx} \cdot e^{-iCx} = (4e^{iCx} \cdot e^{-iCx} - e^{iCx} - e^{-iCx})e^{Ex},$$

$$(e^{Cx} + e^{-Cx})e^{E'x} = 2e^{Cx} \cdot e^{-Cx};$$

dalle quali equazioni si deduce

$$C_{2n} + 3nC_{2n-1} = \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{2n}{2r} B_{2r} C_{2(n-r)} \quad (n > 0),$$

$$C_{2n+1} + \frac{3}{2}(2n+1)C_{2n} = \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{2n+1}{2r} B_{2r} C_{2(n-1)+1} \quad (n > 0),$$

$$C_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left( \frac{1}{r+1} C_{r+1} + 2C_r \right) B'_{n-r},$$

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} C_i C_{2n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{2n}{2i} \left[ 2 \sum_{r=0}^{2(n-i)} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} C_r C_{2(n-i)-r} - C_{2(n-i)} \right] E_{2i},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} C_{2i} E'_{2(n-i)} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} C_i C_{2n-i}.$$

Queste relazioni potrebbero anche dimostrarsi per induzione.

Milano, luglio 1907.

L. SINIGALLIA.