

## X. Ueber die Gleichungen der electromagnetischen Kraft; von R. Lamprecht.

In Art. 602 f. seines „Treatise on Electricity and Magnetism“ gibt Maxwell die Gleichungen für diejenige electromagnetische (ponderomotorische) Kraft, welche auf einen stromführenden Leiter, der sich in einem magnetischen Felde bewegt, wirkt. Ueber die Ableitung der Gleichungen macht Maxwell nur Andeutungen. Diese geben aber keinen brauchbaren Weg an und sind, in Verbindung mit einer Ungenauigkeit in der Schreibweise der Formel (4) des angeführten Artikels, geeignet irre zu führen. In der That ist in der deutschen Ausgabe des Werkes ein Beweis nach jenen Andeutungen ausgeführt worden, der in wesentlichen Punkten unhaltbar ist. Ich bemerke nur, dass der Uebergang von Formel (4) zu Formel (6) (nach der Bezifferung des Originales) durch partielle, nicht durch totale Differentiation erfolgen muss, dass hierbei die Bogenlänge  $ds$  als veränderlich anzusehen ist und dass die in der deutschen Ausgabe eingeschobene Gleichung:

$$\frac{d\delta x}{ds} = 0$$

nicht begründet ist und der Voraussetzung widerspricht.

Ich möchte mir erlauben, die folgende Ableitung vorzuschlagen, die ich für einwandfrei halte.

Es seien  $i_1$  und  $i_2$  die Stärken der in zwei Stromringen, welche wir den primären und den secundären nennen wollen, fließenden Ströme,  $M$  eine von den geometrischen Beziehungen der Stromringe abhängige Grösse,  $x_r$  eine der von einander unabhängigen Variablen, welche Gestalt und Lage des secundären Stromringes bestimmen, endlich  $X_r$  diejenige (electromagnetische) Kraft, welche auf den secundären Stromleiter im Sinne einer Vergrösserung von  $x_r$  wirkt. Dann ist nach Art. 583:

$$(1) \quad X_r = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x_r}$$

oder, da die Intensität  $i_1$  des primären Stromes von  $x_r$  unabhängig ist:

$$X_r = i_2 \frac{\partial (Mi_1)}{\partial x_r}.$$

Es ist dann in den Artikeln 585–590 gezeigt worden, dass  $Mi_1$  als ein längs des secundären Stromringes erstrecktes Integral von der Form:

$$(2) \quad \int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds$$

dargestellt werden kann, worin  $F, G, H$  Functionen der Stelle  $xyz$ , aber unabhängig von der Richtung des Elementes  $ds$  sind. Dadurch wird:

$$(3) \quad X_r = i_2 \frac{\partial}{\partial x_r} \int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Der secundäre Stromring werde nun derart verschoben, dass jeder seiner Punkte um eine Strecke  $\delta x$  in der Richtung der  $x$ -Axe sich bewegt. Dabei sollen die verschiedenen Theile des secundären Stromringes sich unabhängig voneinander bewegen, so jedoch, dass der Stromring continuirlich und geschlossen bleibt.  $\delta x$  ist also eine stetige Function der Bogenlänge  $s$ .

Ist ferner  $X$  die gesammte Kraft, welche auf den Theil des Stromringes von  $s = 0$  bis  $s = s$  in der Richtung der  $x$ -Axe wirkt, so ist  $(dX/ds)ds$  der dem Bogenelemente  $ds$  entsprechende Theil. Die während der Verschiebung von der Kraft  $X$  geleistete Arbeit ist dann das längs des Stromringes erstreckte Integral:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dX}{ds} ds \delta x &= i_2 \int \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \right\} \\ &= i_2 \int \left[ \delta x ds \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dz}{ds} + F \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dx}{ds} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dy}{ds} \right) + H \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dz}{ds} \right) \right\} + \delta x \left\{ F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right\} \frac{\partial ds}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierin kann zunächst nach der in Art. 591 eingeführten Bezeichnung:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c + \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} - b$$

gesetzt werden.

Der Anfangspunkt des Elementes  $ds$  möge um  $\delta x$ , der

Endpunkt um  $\delta x + d\delta x$  in der Richtung  $x$  verschoben werden. Der Anfangspunkt hat dann vor der Verschiebung die Coordinaten  $x, y, z$ , nach der Verschiebung die Coordinaten  $x + \delta x, y, z$ , und der Endpunkt hat vorher die Coordinaten  $x + dx, y + dy, z + dz$  und nachher  $x + dx + \delta x + d\delta x, y + dy, z + dz$ . Die Projectionen des Curvelementes  $ds$  auf die Coordinatenachsen sind daher vor der Verschiebung  $dx, dy, dz$  und nach der Verschiebung  $dx + d\delta x, dy, dz$  und ändern sich also durch die Verschiebung um  $d\delta x, 0, 0$ . Folglich ist:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x \cdot \frac{\partial dx}{\partial x} = d\delta x, \quad \delta x \cdot \frac{\partial dy}{\partial x} = 0, \quad \delta x \cdot \frac{\partial dz}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Ferner ist  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , folglich:

$$\delta x \cdot \frac{\partial ds}{\partial x} = \frac{\partial ds}{\partial dx} \cdot \delta x \frac{\partial dx}{\partial x} = \frac{dx d\delta x}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx d\delta x}{ds}.$$

Weiter ist dann:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \cdot \delta x \frac{\partial dx}{\partial x} - \frac{dx}{ds^2} \cdot \delta x \frac{\partial ds}{\partial x} = \frac{d\delta x}{ds} - \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{d\delta x}{ds}, \\ \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dy}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \cdot \delta x \frac{\partial dy}{\partial x} - \frac{dy}{ds^2} \cdot \delta x \frac{\partial ds}{\partial x} = - \frac{dy dx d\delta x}{ds ds ds}, \\ \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \cdot \delta x \frac{\partial dz}{\partial x} - \frac{dz}{ds^2} \cdot \delta x \frac{\partial ds}{\partial x} = - \frac{dz dx d\delta x}{ds ds ds}. \end{array} \right.$$

Macht man hiervon Gebrauch, so wird:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dX}{ds} ds \delta x = i_2 \int \left( c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right) ds \delta x \\ \quad + i_2 \int \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) \delta x + F \frac{d\delta x}{ds} \right\} ds \\ \quad - i_2 \int \left\{ F \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \frac{d\delta x}{ds} + G \frac{dy dx d\delta x}{ds ds ds} + H \frac{dz dx d\delta x}{ds ds ds} \right\} ds \\ \quad + i_2 \int \left\{ F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right\} \frac{dx d\delta x}{ds}. \end{array} \right.$$

Das dritte und das vierte Integral rechter Hand heben sich weg, das zweite aber wird bei weiterer Behandlung:

$$i_2 \int \left\{ \frac{dF}{ds} \delta x + F \frac{d\delta x}{ds} \right\} ds = i_2 \int \frac{d(F\delta x)}{ds} ds,$$

und verschwindet daher bei der Integration um die geschlossene Stromcurve. Da aber die  $\delta x$  beliebige Verschiebungen waren, so müssen die einzelnen Elemente der Integrale gleich sein. So folgt:

$$(7) \quad \frac{dX}{ds} = i_2 \left( c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right).$$

In derselben Weise lassen sich die Kräfte parallel der  $y$ - und der  $z$ -Axe ableiten:

$$(8) \quad \frac{dY}{ds} = i_2 \left( a \frac{dz}{ds} - c \frac{dx}{ds} \right).$$

$$(9) \quad \frac{dZ}{ds} = i_2 \left( b \frac{dx}{ds} - a \frac{dy}{ds} \right).$$

Die Ableitung gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn man die Gleichung (4) in der Form schreibt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dX}{ds} ds \delta x &= i_2 \int \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F dx + G dy + H dz) \\ &= i_2 \int \left\{ \delta x \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial x} dy + \frac{\partial H}{\partial x} dz \right) \right. \\ &\quad \left. + F \delta x \frac{\partial dx}{\partial x} + G \delta x \frac{\partial dy}{\partial x} + H \delta x \frac{\partial dz}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man hierin wiederum:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c + \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} - b$$

und überdies:

$$(5) \quad \delta x \cdot \frac{\partial dx}{\partial x} = d \delta x, \quad \delta x \cdot \frac{\partial dy}{\partial x} = 0, \quad \delta x \cdot \frac{\partial dz}{\partial x} = 0,$$

so wird:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dX}{ds} ds \delta x &= i_2 \cdot \int \delta x (c dy - b dz) \\ &\quad + i_2 \cdot \int \left\{ \delta x \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) + F d \delta x \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das letzte Integral wird:

$$i_2 \cdot \int (\delta x \cdot dF + F \cdot d \delta x) = i_2 \cdot \int d(F \cdot \delta x)$$

und verschwindet daher für die geschlossene Curve. Folglich kommt wieder, wie oben:

$$(7) \quad \frac{dX}{ds} = i_2 \left( c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right).$$

Das Vorstehende soll zugleich zur Vervollständigung der Ableitung dienen, die ich an anderer Stelle<sup>1)</sup> versucht habe.

Zittau, März 1891.

1) R. Lamprecht, Zur Theorie der Electrodynamik. Programm des Gymnasiums zu Zittau. Ostern 1891. p. 29.