Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die grundlegende Bedeutung des vorliegenden Themas für die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen brauche ich wohl kaum hervorzuheben. Geht doch diese Theorie von der graphisch über der complexen Zahlenebene construirten Riemann'schen Fläche aus, um erst sodann die Functionen, welche durch diese Fläche bestimmt sind, zu untersuchen.

Auch ist die hier behandelte Aufgabe in den an Riemann anknüpfenden Arbeiten vielfach theils gestreift, theils — freilich in sehr speciellen Fällen — eingehend untersucht worden. Vor allen habe ich hier die Arbeiten von J. Thomae zu nennen, insbesondere die im 75sten Bande von Crelle's Journal veröffentlichte Abhandlung: „Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen", in welcher ausführlich erörtert wird, dass dieselbe Riemann'sche Fläche durch Abänderung der Verzweigungsschnitte in die verschiedensten Gestalten gebracht werden kann und dass bei einem Umlauf eines der Verzweigungspunkte die Fläche möglicher Weise in eine wesentlich verschiedene Fläche übergeht. Den speciellen Fall der dreiblättrigen Flächen behandelt die Dissertation von H. Kasten (Göttingen 1876). Hier wird die Anzahl der wesentlich verschiedenen dreiblättrigen Flächen mit n gegebenen Verzweigungspunkten auf $\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$ bestimmt, wobei der Verfasser diese Zahl indessen seltsamer Weise nur für eine obere Grenze der zu bestimmenden Anzahl hält.

Sodann habe ich die Arbeiten von F. Klein über die Transformation der elliptischen Functionen*), die sich hieran anschliessenden Abhandlungen von W. Dyck über die Aufstellung und Untersuchung

*) Vgl. insbesondere: „Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen", Mathem. Annalen, Bd. 15, pag. 533 ff.

von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen*) zu erwähnen, sowie die Schrift von F. Klein: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale“ (Leipzig 1882), in welcher auf pag. 64 die Aufgabe, alle Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungsstellen zu bestimmen, berührt wird.

Weiter mir bekannt gewordene Arbeiten, welche das vorliegende Thema berühren oder in mehr oder minder nahem Zusammenhange mit demselben stehen, sind die folgenden:

J. Lüroth: „Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche“. Mathem. Annalen Bd. 4.

A. Clebsch: „Zur Theorie der Riemann'schen Flächen“. ib. Bd. 6.

A. Kneser: „Zur Theorie der algebraischen Functionen“. ib. Bd. 29.**)

D. Hilbert: „Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante“. ib. Bd. 31.

L. Schlesinger: „Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen“. Crelle's Journal, Bd. 105.***)

Wenn nun so auch die Aufgabe:

Die Gesammtheit der n blättrigen Riemann'schen Flächen zu untersuchen, welche an w gegebenen Stellen in vorgeschriebener Weise verzweigt sind,

vielfach gestreift wurde, so scheint dieselbe bislang doch noch nicht in ihrer Allgemeinheit behandelt zu sein. Dem entsprechend dürften die meisten Resultate, zu welchen ich gelangt bin, neu sein. Indem ich mich zu der Darlegung dieser Resultate wende, muss ich indessen zuvor die Nachsicht des Lesers erbitten. Denn obgleich ich mich seit längerer Zeit sehr eingehend mit dem Gegenstande beschäftigt habe, ist es mir doch nicht gelungen, die Fragen, welche sich darboten, in jedem Falle zu dem wünschenswerthen Abschluss zu bringen. Die Fragen, auf welche ich besonders mein Augenmerk gerichtet habe, sind die folgenden:

I) Welches ist die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen verzweigt sind?

II) Welches ist die Gruppe der algebraischen Gleichung N^{ten} Grades, von welcher die Bestimmung jener Flächen abhängt?

---

*) Inaugural-Dissertation, München 1879 und Mathem. Annalen, Bd. 17 pag. 473 ff.

**) Vgl. den Excurs auf pag. 180.

***) Vgl. pag. 185 und pag. 194. Die hier aufgestellten Behauptungen sind indessen unrichtig, soweit ihnen die Annahme zu Grunde liegt, dass die vom Verfasser betrachteten Riemann'schen Flächen durch die Verzweigungspunkte eindeutig bestimmt seien.

III) Wie viele Wurzeln dieser Gleichung sind reell, wie viele paarweise conjugirt imaginär, wenn man annimmt, dass die w gegebenen Verzweigungswerthe theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind?

IV) Welches sind in den niedrigsten Fällen die algebraischen Functionen, welche die N Riemann'schen Flächen definiren?

Die näheren Bestimmungen für diese zum Theil an sich nicht völlig bestimmten Fragen werde ich im Folgenden an den geeigneten Stellen hinzufügen. Diesen Fragen entsprechen der Reihe nach die ersten vier Abschnitte der Abhandlung. In dem fünften Abschnitte bespreche ich in aller Kürze eine naheliegende Verallgemeinerung des vorliegenden Problemes.

I. Abschnitt.

Anzahlbestimmungen.

§ 1.

Einführung der Riemann'schen Fläche.

Für meine Untersuchungen war es wesentlich, die Riemann'sche Fläche als ein rein topologisch erklärtes Gebilde, also ganz unabhängig von den auf ihr verlaufenden Functionen, aufzufassen. Dieser Auffassung entsprechend sind also die Lösungen des Problemes, die Riemann'schen Flächen zu bestimmen, welche gegebene Verzweigungswerthe besitzen, topologische Gebilde und keine Zahlenwerthe. Sie gehen erst in solche über, wenn an Stelle der Flächen solche Zahlenwerthe als Unbekannte eingeführt werden, welche die einzelne Fläche vollständig charakterisiren. Die Erklärung der n-blättrigen Riemann'schen Fläche, welche an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ der complexen Zahlenebene E verzweigt ist, stelle ich nun so:

Man ziehe in der Ebene E von irgend einem Punkte O aus nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ die Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_w,$$

welche weder sich selber noch einander (ausser im Punkte O) treffen. Längs dieser Linien schlitze man die Ebene E auf, wodurch die Ebene E in die Ebene E^* übergehen möge. Die Ebene E^* wird von den $2w$ Ufern der ausgeführten Schnitte begrenzt. Die Aufeinanderfolge der Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ sei derart gewählt, dass man bei einem negativen Umlauf um den Punkt O die Ufer in der Reihenfolge

$$l_1^+ l_1^- l_2^+ l_2^- \ldots l_w^+ l_w^-$$

überschreitet.*)

Man lege nun n Exemplare der Ebene E^* auf einander und bezeichne dieselben in irgend einer Reihenfolge als 1^{stes}, 2^{tes}, ..., n^{tes} Blatt. Die Riemann'sche Fläche entsteht jetzt, indem man die n Blätter längs der Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in folgender Weise mit einander verbindet. Jeder der Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_w$$

ordne man je eine mit n Elementen gebildete Substitution

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

zu. Ist nun z. B.

$$S_k = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix},$$

so verbinde man längs des Schnittes l_k die positiven Ufer der Blätter $1, 2, \ldots, n$ bezüglich mit den negativen Ufern der Blätter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so dass man bei einem positiven Umlauf um den Punkt a_k allgemein aus dem Blatte i in das Blatt α_i gelangt.

Die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, welche man zur Herstellung der Fläche wählt, sollen nur folgenden beiden Bedingungen genügen:

I) Vermöge der Substitutionen soll ein Uebergang von jedem Element zu jedem andern möglich sein.

II) Die Zusammensetzung aller Substitutionen soll die Identität ergeben, es soll also

$$S_1 S_2 \ldots S_w = 1$$

sein.

Die erste Bedingung, welche auch dahin ausgesprochen werden kann, dass die aus $S_1, S_2, \ldots, S_w$ erzeugte Gruppe transitiv sein soll, hat zur Folge, dass die construirte Fläche in sich zusammenhängt. Zufolge der zweiten Bedingung wird bei einem Umlauf um den Punkt O keine Vertauschung der Blätter eintreten.

Wie man sieht, ist nach der hier gegebenen Erklärung eine Riemann'sche Fläche vollständig bestimmt, wenn wir angeben:

1) Die „Verzweigungspunkte" $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

2) Den Punkt O und die von ihm ausgehenden Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$.

3) Die Numerirung der n Blätter E^*.

4) Die den Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ zugeordneten Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$.

---

*) Bei Ausführung eines Schnittes wird das zur Linken liegende Ufer des Schnittes als das positive bezeichnet. Ferner heisst ein im Sinne des Uhrzeigers erfolgender Umlauf um einen Punkt ein „negativer" Umlauf.

§ 2.

Vergleich Riemann'scher Flächen. Zuordnung der Flächen zu Substitutionssystemen.

Wir betrachten jetzt zwei Riemann'sche Flächen F und F', von welchen wir nur voraussetzen wollen, dass sie in den Bestimmungsstücken 1) übereinstimmen, dass sie also dieselben Verzweigungspunkte besitzen. Wir nehmen in der Ebene E einen von diesen Verzweigungspunkten verschiedenen Punkt A an und betrachten die in A beginnenden und endigenden Wege W, welche durch keinen der Verzweigungspunkte hindurchlaufen.

Wenn sich nun die Blätter der beiden Flächen F und F' so numeriren lassen, dass auf jedem Wege W die Blätter der einen Fläche genau dieselbe Vertauschung erfahren, wie die Blätter der anderen Fläche, so sollen die beiden Flächen als nicht verschieden angesehen werden. Im andern Falle gelten die beiden Flächen als verschieden.

Man zeigt leicht, dass zwei Flächen, welche sich nach dieser Festsetzung als nicht verschieden erweisen, sich auch dann als nicht verschieden herausstellen, wenn man an Stelle des Punktes A irgend einen andern Punkt B setzt. Ferner erhellt aus unserer Festsetzung, dass man schon alle verschiedenen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ erhalten wird, wenn man von den Bestimmungsstücken 1), 2), 3), 4) nur die letzten, also die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$ auf alle möglichen Weisen wählt, die übrigen Bestimmungsstücke aber ein für alle Mal fest lässt.

Somit werden wir jede Riemann'sche Fläche mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ erhalten, wenn wir alle Systeme von w Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

aufstellen, welche den Bedingungen I) und II) genügen.

Zwei verschiedenen derartigen Systemen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w,$$

und

$$S_1', S_2', \ldots, S_w'$$

wird nun offenbar dann und nur dann dieselbe Riemann'sche Fläche entsprechen, wenn die Systeme in einander transformirbar sind; d. h., wenn es eine Substitution T giebt, so dass

$$S_1 = TS_1'T^{-1}, \quad S_2 = TS_2'T^{-1}, \ldots, S_w = TS_w'T^{-1}$$

ist. Denn nur in diesem Falle kann man durch eine geeignete Numerirung der Blätter erreichen, dass auf jedem durch O gelegten geschlossenen Wege die Blätter der beiden Flächen die gleiche Vertauschung erfahren. Wir fassen diese Erörterungen in folgenden Satz zusammen:

Hat man die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ *festgelegt, welche von irgend einem Punkte O aus nach den Punkten* $a_1, a_2, \ldots, a_w$ *führen, so sind die Riemann'schen Flächen mit den Verzweigungspunkten* $a_1, a_2, \ldots, a_w$ *eindeutig zugeordnet den Systemen von w Substitutionen*

$$S_1, S_2, \ldots, S_w,$$

welche den Bedingungen I) und II) von § 1 genügen, wobei indessen zwei Systeme die in einander transformirbar sind, als nicht verschieden gelten.

In der Folge werde ich die einzelne Fläche F durch das zugehörige System von Substitutionen bezeichnen, also

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

setzen. Wenn es jedoch darauf ankommen sollte, die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in die Bezeichnung aufzunehmen, so werde ich

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

schreiben. Nach dem Vorhergehenden ist die Fläche

$$(S_1', S_2', \ldots, S_w')$$

dann und nur dann dieselbe, wie die Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w),$$

wenn es eine den Gleichungen

$$S_1' = TS_1T^{-1}, \quad S_2' = TS_2T^{-1}, \ldots, S_w' = TS_wT^{-1}$$

genügende Substitution T giebt.

Wir betrachten irgend eine n-blättrige Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Offenbar ergiebt die Substitution S_i sofort die „Art" der Verzweigung in dem Punkte a_i, d. h. die Substitution lässt ohne Weiteres erkennen, zu wie viel Cyklen sich die Blätter in a_i gruppiren und wie viele Blätter der einzelne Cyklus verbindet. Z. B. wird der Punkt a_i stets und nur dann ein einfacher Verzweigungspunkt sein, wenn die Substitution S_i eine Transposition ist. Stellen wir uns also die Aufgabe, alle Flächen herzustellen, welche in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in vorgeschriebener Weise verzweigt sind, so müssen wir alle den Bedingungen I) und II) genügenden Systeme von w Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

aufsuchen, wobei für jede einzelne Substitution noch die Zahl der Cyklen und die Zahl der in den einzelnen Cyklen enthaltenen Elemente vorgeschrieben ist. Sollen wir z. B. alle Flächen bestimmen, welche an w Punkten einfach verzweigt sind, so haben wir alle Systeme von w Transpositionen

$$t_1, t_2, \ldots, t_w$$

aufzustellen, welche den Bedingungen I) und II) von § 1 genügen.

Auf diesen Fall, wo die gegebenen Verzweigungspunkte sämmtlich einfach sein sollen, wollen wir zunächst unsere Aufmerksamkeit richten, und zwar soll es sich dabei um die Bestimmung der Anzahl dieser Flächen handeln. Nach dem Vorausgeschickten können wir sagen:

„Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten stimmt überein mit der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$t_1 t_2 \ldots t_w = 1 \tag{1}$$

durch w Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$, welche mit n Elementen gebildet sind und einen Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern gestatten."

Dabei sind zwei Lösungen der Gleichung (1), welche in einander transformirbar sind, als nicht verschieden zu erachten.

§ 3.

Anzahl der Darstellungen einer Substitution durch ein Product von w Transpositionen.

Die Zahl der Lösungen der Gleichung (1) in ihrer Abhängigkeit von n und w zu bestimmen, ist eine Aufgabe von grosser Complication und es ist mir erst nach vielen vergeblichen Versuchen gelungen, ein einigermassen befriedigendes Resultat zu erhalten. Zunächst beschäftige ich mich mit der folgenden Aufgabe, welche vielleicht schon an sich ein Interesse darbietet:

Man soll angeben, auf wie viele Weisen bei n Elementen eine gegebene Substitution S als ein Product von w Transpositionen dargestellt werden kann.

Die gesuchte Anzahl möge mit

$$[S]_w$$

bezeichnet werden. Allgemeiner wollen wir, falls Σ ein System von irgend welchen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ bezeichnet, unter

$$[\Sigma]_w$$

nichts Anderes als die Summe

$$[S_1]_w + [S_2]_w + \cdots + [S_k]_w$$

verstehen. Hiernach bedeutet $[\Sigma]_w$ die Anzahl der verschiedenen

Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$, welche der Bedingung genügen, dass das Product

$$t_1 t_2 \ldots t_w$$

in dem Systeme Σ vorkommt. Wir bemerken sogleich, dass diese Anzahl folgende Eigenschaften besitzt:

Erstens ist:

$$(1) \qquad [\Sigma]_w = [T^{-1}\Sigma T]_w,$$

wenn T eine beliebig gewählte Substitution und $T^{-1}\Sigma T$ dasjenige System von Substitutionen bezeichnet, welches aus Σ durch Transformation jeder einzelnen Substitution mit T entsteht.

Zweitens ist, wenn

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\varrho$$

die in irgend einer Reihenfolge genommenen $\varrho = \frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen bedeuten,

$$(2) \qquad [\Sigma]_w = [\Sigma\tau_1]_{w-1} + [\Sigma\tau_2]_{w-1} + \cdots + [\Sigma\tau_\varrho]_{w-1},$$

unter $\Sigma\tau_i$ dasjenige System von Substitutionen verstanden, welches aus Σ durch Multiplication jeder einzelnen Substitution mit τ_i hervorgeht. Wir betrachten jetzt ein besonderes System Σ, welches auf folgende Weise gebildet wird. Wir zerlegen die Zahl n in eine Summe von r positiven Zahlen:

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r,$$

die wir der Grösse nach ordnen, so dass also

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \cdots \geqq \nu_r > 0$$

ist. Dieser Zerlegung entsprechend theilen wir die n Elemente, mit welchen wir die Substitutionen bilden, irgendwie in r Gruppen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}; \ldots; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r},$$

von denen die erste ν_1, die zweite $\nu_2, \ldots$ die letzte ν_r Elemente enthält.

Wir bezeichnen ferner mit

$$\Gamma_1 = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1})$$

das System aller $\nu_1!$ Substitutionen, welche mit den Elementen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}$$

gebildet werden können. Dabei soll dieses System aus der einen identischen Substitution bestehen, wenn $\nu_1 = 1$ ist. Die entsprechende Bedeutung besitze jedes der Zeichen

$$\Gamma_2 = \Gamma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}), \ldots, \Gamma_r = \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r}).$$

Endlich bezeichne S irgend eine der $n!$ Substitutionen, welche mit allen n Elementen gebildet werden können.

Das System Σ, welches wir betrachten, sei nun das System der $\nu_1!\ \nu_2!\ \ldots\ \nu_r!$ Substitutionen

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r);$$

zur Abkürzung wollen wir sagen, das System $(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r)$ und die Zahl $[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w$ „gehöre" zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Zahl n.

Es ist nun nach (2):

$$(3)\quad [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau_1]_{w-1} + \cdots + [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau_\varrho]_{w-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich zweckmässig umformen.

Nehmen wir nämlich zunächst eine Transposition τ, welche mit zwei Elementen α, oder mit zwei Elementen $\beta, \ldots,$ oder mit zwei Elementen λ gebildet ist, so wird offenbar das System

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau)$$

genau dieselben Substitutionen enthalten, wie das System

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r).$$

Diese Transpositionen τ liefern also auf der rechten Seite von (3) den Beitrag

$$\left[\binom{\nu_1}{2} + \binom{\nu_2}{2} + \cdots + \binom{\nu_r}{2}\right]\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1},$$

wo in üblicher Weise $\binom{\nu_1}{2}, \ldots$ für $\frac{\nu_1(\nu_1-2)}{2}, \ldots$ geschrieben ist.

Nehmen wir weiter diejenigen Glieder der rechten Seite von (3), welche den Transpositionen

$$\tau' = (\alpha_1\beta_1),\quad \tau'' = (\alpha_2\beta_1),\ \ldots,\ \tau^{(\nu_1)} = (\alpha_{\nu_1}, \beta_1)$$

entsprechen, so geben diese zusammen den Beitrag

$$[S\Gamma_2\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}, \beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1} - [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1},$$

da die Substitutionen

$$\Gamma_1\tau',\ \Gamma_1\tau'',\ \ldots,\ \Gamma_1\tau^{(\nu_1)}$$

zusammen das System $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}, \beta_1)$ vermindert um das System $\Gamma_1 = \Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1})$ ausmachen. Die Transpositionen vom Typus $(\alpha\beta)$ liefern hiernach auf der rechten Seite von (3) den Beitrag:

$$\sum_1^{\nu_2}{}^i\,[S\Gamma_2\Gamma(\alpha_1\ldots\alpha_{\nu_r}, \beta_i)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_{\nu_r}]_{w-1} - \nu_2[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}.$$

Ebenso formen wir den Beitrag um, welchen die Transpositionen vom Typus

$$(\alpha\gamma), \ldots, (\alpha\lambda);\quad (\beta\gamma), \ldots, (\beta\lambda), \ldots$$

bez. liefern und erhalten auf diese Weise:

$$(4)\quad [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}$$

$$+\sum_1^{\nu_2}{}_i[S\Gamma_2\Gamma(\alpha,\beta_i)\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\sum_1^{\nu_3}{}_i[S\Gamma_3\Gamma(\alpha,\gamma_i)\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\cdots+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\alpha,\lambda_i)\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}$$

$$+\sum_1^{\nu_3}{}_i[S\Gamma_3\Gamma(\beta,\gamma_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\cdots+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\beta,\lambda_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\sum_1^{\nu_r}{}_i[S\Gamma_r\Gamma(\varepsilon,\lambda_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_{r-2}]_{w-1},$$

wobei der Factor f den Werth

$$(5)\quad f=\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}+\cdot\cdot+\binom{\nu_r}{2}-(\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots+r\nu_r)+n$$

besitzt. Die Bedeutung der übrigen auf der rechten Seite von (4) benutzten Zeichen bedarf wohl keiner näheren Erläuterung.

Von der Zahl f wollen wir sagen, sie „gehöre" zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Zahl n.

Die einzelnen auf der rechten Seite von (4) unter den Summenzeichen auftretenden Systeme lassen sich nun, wie folgt, zerlegen. Betrachten wir z. B. das System

$$(S\Gamma_2\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r),$$

so können wir dasselbe aus folgenden Systemen zusammensetzen:

$$\big(S\Gamma(\beta_2,\ldots,\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),$$

$$\big(S(\beta_1\beta_2).\Gamma(\beta_2\ldots\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),\ldots,\big(S(\beta_1\beta_{\nu_2}).\Gamma(\beta_2\ldots\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),$$

von denen jedes einzelne zu der Zerlegung $(\nu_1+1, \nu_2-1, \nu_3, \ldots, \nu_r)$ von n gehört.

Indem wir in entsprechender Weise alle auf der rechten Seite von (4) unter den Summenzeichen auftretenden Systeme zerlegen, erkennen wir, dass wir auf der rechten Seite von (4) eine Summe von Zahlen erhalten, welche bez. zu folgenden Zerlegungen von n gehören:

$$\nu_1+1,\nu_2-1,\nu_3,\ldots,\nu_r;\ \nu_1+1,\ \nu_2,\ \nu_3-1,\ldots,\nu_r;\ \ldots;\ \nu_1+1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ldots,\ \nu_r-1;$$

$$\nu_1,\ \nu_2+1,\nu_3-1,\ldots,\nu_r;\ \ldots;\ \nu_1,\ \nu_2+1,\nu_3,\ldots,\ \nu_r-1;$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ldots,\nu_{r-1}+1,\nu_r-1.$$

Diese Zerlegungen mögen zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ benachbart heissen. Man zeigt nun ohne Schwierigkeit, dass die Zahl f, welche zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gehört, kleiner ist als die entsprechende Zahl gebildet für irgend eine benachbarte Zerlegung. Wenn wir also mit

$$f_1', f_2', \ldots$$

die Zahlen bezeichnen, welche zu den benachbarten Zerlegungen von $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gehören; ferner mit

$$f_1'', f_2'', \ldots$$

diejenigen Zahlen, welche zu den benachbarten der benachbarten gehören, u. s. f., so wird f kleiner sein als jede dieser Zahlen $f_1', f_2', \ldots, f_1'', f_2'', \ldots$.

Hieraus gelingt es nun zu schliessen, dass

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = cf^w + c_1'(f_1')^w + c_2'(f_2')^w + \cdots + c_1''(f_1'')^w + c_2''(f_2'')^w + \cdots$$

ist, wo $c, c_1', c_2', \ldots, c_1'', c_2'', \ldots$ von w unabhängige rationale Zahlen bedeuten. Wir nehmen an, dies sei schon für alle zu $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ benachbarte Zerlegungen bewiesen. Dann ist nach Gleichung (4):

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f\,.\,[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1} + \sum_{i,k} d_{i,k}(f_i^{(k)})^{w-1},$$

wo die Coefficienten $d_{i,k}$ von w unabhängige rationale Zahlen bedeuten.

Setzen wir in dieser Gleichung nach und nach

$$w = 1, 2, 3, \ldots, w$$

und combiniren alle so erhaltenen Gleichungen, so finden wir

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f^w\,.\,[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_0 + \sum_{i,k} d_{i,k}\left(f^{w-1} + f^{w-2}f_i^{(k)} + \cdots + (f_i^{(k)})^{w-1}\right).$$

Die Summe auf der rechten Seite lässt sich, da f von jeder der Zahlen $f_i^{(k)}$ verschieden ist, in die Gestalt setzen:

$$\sum_{i,k} \frac{d_{i,k}}{f - f_i^{(k)}}\left[f^w - (f_i^{(k)})^w\right]$$

und wir erhalten daher

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = cf^w + c_1'(f_1')^w + c_2'(f_2')^w + \cdots,$$

wo $c, c_1', c_2', \ldots$ von w unabhängige rationale Zahlen bezeichnen.

Zur Vollendung des Beweises ist noch zu zeigen, dass wir bei fortgesetzter Bildung der benachbarten Zerlegungen schliesslich auf eine Zerlegung kommen, für welche der zu beweisende Satz gilt.

Nun wird bei dem Uebergang von $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ zu einer benachbarten Zerlegung eine der r Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ um eine

Einheit vergrössert. Folglich muss man schliesslich stets zu der Zerlegung, bei welcher $r = 1$ und

$$\nu_1 = n$$

ist, gelangen, welch' letztere Zerlegung keine benachbarte mehr besitzt. Für diese Zerlegung ist

$$f = \varrho = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

und das entsprechende System $(S\Gamma_1)$ besteht aus allen $n!$ Substitutionen. Da nun jede der f^w Combinationen

$$t_1 t_2 \ldots t_w$$

von w Transpositionen zum Systeme $(S\Gamma_1)$ gehört, so ist in diesem Falle

$$[S\Gamma_1]_w = f^w,$$

womit der Beweis vollendet ist.

Wir wenden jetzt das erhaltene Resultat auf die Zerlegung

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \qquad (r = n,\ \nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_n = 1)$$

an. Hier besteht das System $[S\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_n]$ aus der einen Substitution S; und die Anzahl $[S\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_n]_w$ bedeutet also die Zahl der Darstellungen von S als Product von w Transpositionen.

Somit finden wir den folgenden Satz, welcher die oben gestellte Aufgabe bis zu einem gewissen Punkte erledigt:

Die Anzahl der Darstellungen einer mit n Elementen gebildeten Substitution S als Product von w Transpositionen ist gleich

$$c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \cdots + c_k f_k^w,$$

wo die Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k,\ f_1, f_2, \ldots, f_k$ von w nicht abhängen. Die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sind rationale von der Substitution S und der Zahl n abhängende Zahlen. Dagegen sind $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ganze Zahlen, welche ausschliesslich von n abhängen und folgendermassen gebildet werden. Man zerlegt n auf alle möglichen Weisen in positive ganzzahlige Summanden

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r,$$

wobei $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \cdots \geqq \nu_r > 0$ vorausgesetzt wird und setzt

$$f = \frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2} + \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2} + \cdots + \frac{\nu_r(\nu_r - 1)}{2}$$
$$- (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + r\nu_r) + n.$$

Die auf diese Weise entstehenden Zahlen f sind gerade die oben mit $f_1, f_2, \ldots, f_k$ bezeichneten Zahlen.

Die Abhängigkeit der Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_k$ von n und der Substitution S näher zu charakterisiren, ist mir nicht gelungen, obgleich meine dahin zielenden Bemühungen die Existenz eines einfachen Bildungsgesetzes für jene Coefficienten haben vermuthen lassen.

Man zeigt leicht, dass von den Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ je zwei einander entgegengesetzt gleich sind (nachdem man diejenigen, welche Null sind, ausgesondert hat).

Dieser Umstand lässt sich auch aus dem bekannten Satze erschliessen, dass eine gegebene Substitution S entweder nur durch eine gerade oder nur durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen darstellbar ist.

§ 4.

Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten.

Wir bezeichnen mit

$$f(w|n)$$

die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad t_1 t_2 \ldots t_w = 1$$

durch w mit n Elementen gebildete Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$.

Diese Anzahl stellt sich nach dem vorigen Paragraphen dar in der Form:

$$(2) \quad f(w|n) = c_1(n) \cdot [f_1(n)]^w + c_2(n) \cdot [f_2(n)]^w + \cdots + c_k(n) \cdot [f_k(n)]^w,$$

oder kürzer:

$$(2') \qquad f(w|n) = \sum c(n) \cdot [f(n)]^w,$$

wobei wir die nur von n abhängenden Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \quad f_1, f_2, \ldots, f_k$$

grösserer Deutlichkeit halber mit

$$c_1(n), c_2(n), \ldots, c_k(n), \quad f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$$

bezeichnet haben. Es möge nun ferner

$$\varphi(w|n)$$

die Anzahl der Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$ bedeuten, welche der Gleichung (1) genügen und zugleich einen Uebergang von jedem der n Elemente zu jedem anderen gestatten. Nach dem Schluss von § 2 ist dann

$$N = \frac{\varphi(w|n)}{n!}$$

die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten, wenn wir den trivialen Fall $n = 2$, in welchem

$$N = 2 \cdot \frac{\varphi(w|n)}{n!} = 1$$

ist, ausschliessen. Denn sobald $n > 2$ ist, vertheilen sich die $\varphi(w|n)$ Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$ in Gruppen von je $n!$ in einander transformirbare Systeme und die $n!$ Systeme einer Gruppe liefern alle ein und dieselbe Riemann'sche Fläche.

Wir wollen nun die Zahl $\varphi(w|n)$ durch die uns schon bekannte Zahl $f(w|n)$ ausdrücken.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Zahl $f(w|n)$ in Summanden, indem wir die $f(w|n)$ Systeme $t_1 t_2 \ldots t_w$ in Classen eintheilen. Wir sondern nämlich die n Elemente auf irgend eine Weise in Gruppen

$$G = a_1, \ldots, a_{n_0}, \quad G_1 = b_1, \ldots, b_{n_1},$$
$$G_2 = c_1, \ldots, c_{n_2}, \ \ldots, \ G_r = l_1, \ldots, l_{n_r}$$

von bez. $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r$ Elementen, wobei also

$$n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

ist, und ordnen den Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_r$ bez. irgend r positive ganze Zahlen $w_1, w_2, \ldots, w_r$ zu, welche der Bedingung

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w$$

genügen. Die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sollen sämmtlich grösser als 1, die Zahl $n_0 \geqq 0$ sein. In eine Classe rechnen wir jetzt alle diejenigen der $f(w|n)$ Systeme $(t_1 t_2 \ldots t_w)$, welche die Elemente $a_1, \ldots, a_{n_0}$ überhaupt nicht enthalten, während w_1 der Transpositionen $t_1, \ldots, t_w$ die Elemente $b_1, \ldots, b_{n_1}$ in Verbindung setzen, w_2 der Transpositionen die Elemente $c_1, \ldots, c_{n_2}$ u. s. w. w_r der Transpositionen die Elemente $l_1, \ldots, l_{n_r}$.

Die Anzahl der in einer Classe enthaltenen Systeme von Transpositionen $(t_1, t_2, \ldots, t_w)$ beträgt, wie man leicht erkennt:

$$\frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1) \cdot \varphi(w_2|n_2) \ldots \varphi(w_r|n_r).$$

Indem man jetzt über alle Classen summirt, erhält man:

$$(3)\quad f(w|n) = \sum \frac{n!}{r!\, n_0!\, n_1! \ldots n_r!} \cdot \frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \ldots \varphi(w_r|n_r$$

wobei die Summation über alle Lösungen der Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n, \\ \qquad w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w, \\ \qquad\qquad \begin{pmatrix} n_0 \geqq 0, \ n_1 > 1, \ n_2 > 1, \ldots, n_r > 1; \ r > 0; \\ w_1 > 0, \ w_2 > 0, \ldots, w_r > 0. \end{pmatrix} \end{cases}$$

zu erstrecken ist.

Die Functionalgleichung (3) lässt sich nun umkehren. Und zwar findet man:

$$(5)\quad \varphi(w|n) = \sum (-1)^{r+n_0-1}\, r^{n_0-1} \cdot \frac{n!}{n_0!\, n_1! \dots n_r!} \frac{w!}{w_1!\, w_2! \dots w_r!} f(w_1|n_1) f(w_2|n_2) \dots f(w_r|n_r),$$

wobei die Summation ebenfalls über die Lösungen der Gleichungen (4) zu erstrecken ist. Wir setzen nun für $f(w_1|n_1), \dots, f(w_r|n_r)$ ihre Ausdrücke nach Gleichung (2′) und summiren sodann nach $w_1, w_2, \dots, w_r$, wobei $r, n_0, n_1, \dots, n_r$ fest bleiben. Bei der Ausführung dieser Summation ist zu beachten, dass $w_1, w_2, \dots, w_r$ der Bedingung $w_1 > 0$, $w_2 > 0, \dots, w_r > 0$ und $w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w$ unterworfen sind, und man hat die leicht zu erhärtende Identität

$$\sum \frac{w!}{w_1!\, w_2! \dots w_r!} x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_r^{w_r} = s^w - \sum_i (s - x_i)^w + \sum_{i,k} (s - x_i - x_k)^w - + \cdots$$

zu beachten, wo $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ gesetzt ist und die Summationsbuchstaben $i, k, \dots$ die Werthe $1, 2, \dots, r$ durchlaufen müssen.

Die Gleichung (5) nimmt nun die Gestalt an:

$$(5')\qquad \varphi(w|n) = \sum C_{n_1, \dots, n_r} [f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r)]^w,$$

wo die Coefficienten $C_{n_1, \dots, n_r}$ von w unabhängige rationale Zahlen bezeichnen, und die Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \dots, n_r$ den Bedingungen

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leqq n, \quad n_1 > 1, \quad n_2 > 1, \dots, n_r > 1$$

unterworfen sind. Die absolut grössten unter den verschiedenen Zahlen $f(n_1)$ haben die Werthe $-\frac{n_1(n_1-1)}{2}$ und $+\frac{n_1(n_1-1)}{2}$, wie dies aus dem vorigen Paragraphen hervorgeht. Hieraus folgert man, dass die absolut grössten Werthe von

$$f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r),$$

welche unter dem Summenzeichen (5′) auftreten für $r = 1$, $n_1 = n$ entstehen und die Werthe $-\frac{n(n-1)}{2}$ und $+\frac{n(n-1)}{2}$ besitzen.

Daher stellt sich die Anzahl $\varphi(w|n)$ dar in der Form:

$$(6)\qquad \varphi(w|n) = \sum_{s=-\frac{n(n-1)}{2}}^{+\frac{n(n-1)}{2}} C_s \cdot s^w,$$

wo die Coefficienten C_s von n, nicht aber von w abhängen.

Die Zahl $\varphi(w|n)$ muss verschwinden, sobald w eine ungerade Zahl ist, da die Anzahl der Verzweigungspunkte nothwendig gerade ist. Also ist $C_{-s} = C_s$. Indem wir dieses berücksichtigen, können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche w gegebene einfache Verzweigungspunkte besitzen, lässt sich darstellen in der Form:

$$N = c_1 \cdot 1^w + c_2 \cdot 2^w + c_3 \cdot 3^w + \cdots + c_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^w,$$

wo die Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ ausschliesslich von n abhängende rationale Zahlen bedeuten.

Von diesen Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ können nur diejenigen von Null verschiedene Werthe haben, deren Indices in der Gestalt darstellbar sind.

$$f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r)$$

§ 5.

Die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ als Beispiele.

Für die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ habe ich die Bestimmung der Coefficienten $c_1, c_2, \ldots$ ausgeführt, und ich will hier die erhaltenen Resultate zusammenstellen. Ich schicke die Werthe der Zahlen $f(n)$ und $f(w|n)$ für dieselben Fälle in tabellarischer Uebersicht vorauf.

n:	Die Zahlen $f(n)$:
2	$1, -1,$
3	$3, 0, -3,$
4	$6, 2, 0, -2, -6,$
5	$10, 5, 2, 0, -2, -5, -10,$
6	$15, 9, 5, 3, 0, -3, -5, -9, -15.$

Wenn die Zahl $f(w|n)$ angiebt, wie häufig bei n Elementen die Identität als ein Product von w Transpositionen dargestellt werden kann, so ist

für $n=$	$f(w\|n) =$
2	1
3	$\frac{1}{3} \cdot 3^w,$
4	$\frac{1}{12} \cdot 6^w + \frac{3}{4} \cdot 2^w,$
5	$\frac{1}{60} \cdot 10^w + \frac{4}{15} \cdot 5^w + \frac{5}{12} \cdot 2^w,$
6	$\frac{1}{360} \cdot 15^w + \frac{5}{72} \cdot 9^w + \frac{9}{40} \cdot 5^w + \frac{25}{72} \cdot 3^w.$

Die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen einfach verzweigt sind, beträgt:

für $n =$	$N =$
2	1
3	$\frac{1}{18}\cdot 3^w - \frac{1}{2} = \frac{1}{3!}(3^{w-1}-3)$,
4	$\frac{1}{288}\cdot 6^w - \frac{1}{18}\cdot 3^w - \frac{1}{32}\cdot 2^w + \frac{1}{2} = \frac{1}{4!}(2^{w-2}-4)(3^{w-1}-3)$,
5	$\frac{1}{7200}\cdot 10^w - \frac{1}{288}\cdot 6^w + \frac{1}{450}\cdot 5^w - \frac{1}{72}\cdot 4^w + \frac{1}{18}\cdot 3^w + \frac{1}{12}\cdot 2^w - \frac{5}{9}$,
6	$\frac{1}{2\,.\,(360)^2}\cdot 15^w - \frac{1}{7200}\cdot 10^w + \frac{1}{2\,.\,(72)^2}\cdot 9^w - \frac{1}{2\,.\,(24)^2}\cdot 7^w + \frac{7}{2\,.\,(36)^2}\cdot 6^w - \frac{1}{360}\cdot 5^w + \frac{1}{36}\cdot 4^w - \frac{19}{324}\cdot 3^w - \frac{19}{144}\cdot 2^w + \frac{727}{1152}$.

In diesen Tabellen bedeutet w irgend eine positive *gerade* Zahl.

§ 6.

Bestimmung der Anzahl $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$.

Das Geschlecht p einer n-blättrigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigungen mit W einfachen Verzweigungspunkten äquivalent sind, ist bekanntlich aus der Gleichung

$$2p + 2n - 2 = W$$

zu bestimmen. Sind die w Verzweigungspunkte sämmtlich einfach, so ist $W = w$. Da nun das Geschlecht nicht negativ werden kann, so muss die Anzahl N für $w = 2, 4, 6, \ldots, 2n-4$ verschwinden; für $w = 2n-2$ wird N die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen einfachen Verzweigungspunkten darstellen. Die letztere Anzahl soll nun auf anderem Wege direct bestimmt werden. Zu dem Zwecke behandeln wir zunächst folgende Aufgabe:

„Gegeben ist die auf n Elemente bezügliche Substitution S, welche, in Cyklen zerlegt,

$$S = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1})(b_1, b_2, \ldots, b_{k_2}) \ldots (l_1, l_2, \ldots, l_{k_\varrho}) = C_1 C_2 \ldots C_\varrho$$

lauten möge. Gesucht wird die Anzahl

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)\cdot$$

der Systeme von $n+\varrho-2$ Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$, welche der Bedingung

(1) $$St_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1$$

genügen und dabei in Verbindung mit der Substitution S einen Uebergang von jedem der n Elemente zu jedem andern gestatten."

Wir wollen mit

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$$

die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen bezeichen und das System

$$t_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2}$$

der Transposition τ_i zuordnen, wenn $t_1 = \tau_i$ ist. Einer bestimmten Transposition τ_i sind dann so viele Systeme zugeordnet als die Gleichung

(2) $$(S\tau_i)\, t_2 t_3 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1$$

Lösungen besitzt, welche der Bedingung genügen, dass vermöge

$$S, \tau_i, t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$$

ein Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern möglich ist.

Bezeichnet $\psi(\tau_i)$ die Anzahl dieser Lösungen, so ist offenbar

(3) $$f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = \psi(\tau_1) + \psi(\tau_2) + \cdots + \psi(\tau_i) + \cdots$$

Es sei nun zuerst τ_i eine Transposition, welche Elemente aus verschiedenen Cyklen von S verbindet, z. B. sei $\tau_i = (a_1 b_1)$. Dann ist

$$(S\tau_i) = (a_1 \ldots a_{k_1} b_1 \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1 \ldots l_{k_\varrho}),$$

und die Gleichung (2) hat daher $f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho)$ Lösungen. Man übersieht hiernach sofort, dass die Transpositionen, welche Elemente verschiedener Cyklen von S verbinden, auf der rechten Seite der Gleichung (3) den Beitrag

$$k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho) + k_1 k_3 f(k_1 + k_3, k_2, \ldots, k_\varrho) + \cdots$$
$$= \sum k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho)$$

liefern, wobei die Summation auf alle Combinationen der Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ zu je zweien zu erstrecken ist.

Sei nun zweitens τ_i eine Transposition, welche Elemente desselben Cyclus von S verbindet, sei z. B. $\tau_i = (a_1 a_{r+1})$. Dann ist

$$(S\tau_i) = (a_1, \ldots, a_r)(a_1', \ldots, a_s')(b_1, \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1, \ldots, l_{k_\varrho}) = C_1' C_1'' C_2 \ldots C_\varrho,$$

wo grösserer Deutlichkeit halber $a_1', \ldots, a_s'$ für $a_{r+1}, \ldots, a_{k_1}$ geschrieben ist.

Wie gross ist jetzt die Anzahl $\psi(\tau_i)$ der Lösungen von (2), unter der Bedingung, dass die Substitutionen

$$S, (a_1 a_{r+1}) = \tau_i, t_2, \ldots, t_{\nu+\varrho-2}$$

einen Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern gestatten?

Zunächst bemerken wir, dass ein solcher Uebergang vermöge des Systems

(4) $$(S\tau_i),\ t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$$

jedenfalls nicht mehr möglich sein darf. Denn sonst könnten wir diesem Systeme entsprechend eine zusammenhängende n-blättrige Fläche mit

$$(r-1)+(s-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_\varrho-1)+n+\varrho-3=2n-4$$

einfachen Verzweigungen, also vom Geschlecht -1 herstellen.

Da aber vermöge des Systems (4) sicher von jedem der Elemente

$$b_1, \ldots, b_{k_2}, \ldots, l_1, \ldots, l_{k_\varrho}$$

entweder nach einem der Elemente a oder nach einem der Elemente a' ein Uebergang möglich sein muss, so zerlegen sich die Elemente in nur zwei Gruppen unter einander zusammenhängender. In der einen Gruppe finden sich die Elemente $a_1 \ldots a_r$, in der andern die Elemente $a_1' \ldots a_s'$.

Es werden also vermöge des Systems (4) etwa einerseits die Elemente der Cyklen

$$C_1',\ C_{\alpha_1},\ C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_\lambda}$$

unter sich und andererseits die Elemente der Cyklen

$$C_1'',\ C_{\beta_1},\ C_{\beta_2}, \ldots, C_{\beta_\mu}.$$

unter sich zusammenhängen. Dem entsprechend zerlegt sich die Gleichung (2) in zwei Gleichungen

(5) $$\begin{cases}(C_1'\,C_{\alpha_1}\ldots C_{\alpha_\lambda})\,t_1'\,t_2', \ldots, t_\sigma' = 1,\\ (C_1''\,C_{\beta_1}\ldots C_{\beta_\mu})\,t_1''t_2'', \ldots, t_\tau'' = 1,\end{cases}$$

wo $t_1', t_2', \ldots, t_\sigma'$ bez. $t_1'', t_2'', \ldots, t_\tau''$ diejenigen unter den Substitutionen $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\varrho-1}$ bedeuten, welche Elemente aus den Cyklen $C_1', C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_\lambda}$ bez. $C_1'', C_{\beta_1}, \ldots, C_{\beta_\mu}$ verbinden. Man zeigt leicht, dass

(6) $$\begin{cases}\sigma = r + k_{\alpha_1} + \cdots + k_{\alpha_\lambda} + \lambda - 1,\\ \tau = s + k_{\beta_1} + \cdots + k_{\beta_\mu} + \mu - 1\end{cases}$$

sein muss, da jede andere Annahme auf zusammenhängende Flächen mit negativem Geschlecht führt. Die Gleichungen (5) haben einzeln bez. $f(r, k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \ldots, k_{\alpha_\lambda})$ und $f(s, k_{\beta_1}, k_{\beta_2}, \ldots, k_{\beta_\mu})$ Lösungen, und es giebt also

$$f(r, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}) \cdot f(s, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu})$$

Systeme $t_1', \ldots, t_\sigma', t_1'', \ldots, t_\tau''$, welche den Gleichungen (5) genügen.

Aus jedem solchen Systeme können nun genau

$$\frac{(n+\varrho-3)!}{\sigma!\,\tau!}$$

Lösungen der Gleichung (2) gebildet werden. Wir können nämlich irgend σ Transpositionen

$$t_{\alpha'}, t_{\alpha''}, \ldots, t_{\alpha^{(\sigma)}} \quad (\alpha' < \alpha'' < \cdots \alpha^{(\sigma)})$$

mit

$$t_1', t_2', \ldots, t_\sigma'$$

identificiren, worauf die übrigen Transpositionen t in der Reihenfolge, wie sie in der Complexion $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\varrho-2}$ vorkommen, mit $t_1'', t_2'', \ldots, t_\tau''$ zu identificiren sind.

Hiernach ist die Anzahl $\psi(\tau_i)$, für $\tau_i = (a_1 a_{r+1})$, dargestellt durch die Summe

$$(7) \quad \Phi_r(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) = \sum \frac{(n+\varrho-3)!}{\sigma!\ \tau!} f(r, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}) \cdot f(s, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}),$$

wobei sich die Summation auf alle Zerlegungen von

$$k_2, k_3, \ldots, k_\varrho$$

in zwei Gruppen $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}$ und $k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}$ bezieht. Die Zahl s ist gleich $k_1 - r$, die Zahlen σ und τ haben die Werthe (6). Zu beachten ist, dass man zu den Gruppenzerlegungen auch diejenigen zu rechnen hat, bei welchen in der einen Gruppe *keine* der Zahlen $k_2, \ldots, k_\varrho$, in der anderen Gruppe alle diese Zahlen aufgenommen sind.

Ferner ist dem an sich sinnlosen Zeichen $f(1)$ der Werth 1 beizulegen. Denselben Werth (7) besitzt die Anzahl $\psi(\tau_i)$ offenbar auch für jede der Annahmen

$$\tau_i = (a_2, a_{r+2}), \quad \tau_i = (a_3, a_{r+3}), \ldots,$$

so dass die Transpositionen, welche zwei Elemente a verbinden, auf der rechten Seite der Gleichung (3) den Beitrag

$$\frac{1}{2} k_1 [\Phi_1(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) + \Phi_2(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) + \cdots + \Phi_{k_1-1}(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho)]$$

liefern. Der Factor $\frac{1}{2}$ compensirt hier den Umstand, dass jede Transposition $(a_i a_j)$ zwei Mal gerechnet ist, nämlich einerseits als Transposition $(a_i a_j)$ und andererseits als Transposition $(a_j a_i)$.

Einen entsprechenden Beitrag liefern nun die Transpositionen, welche zwei Elemente b, oder zwei Elemente c etc. verbinden, so dass die Gleichung (3) die folgende Gestalt erhält:

$$(8) \qquad f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = \sum k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3 \ldots k_\varrho)$$
$$+ \sum \frac{1}{2} k_1 \sum_1^{k_1-1} {}^r\, \Phi_r(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho).$$

Von dieser Formel (8) ausgehend, bin ich durch eine sehr mühsame Induction zu der Vermuthung geführt, dass allgemein

$$(9)\quad f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = (n + \varrho - 2)!\, n^{\varrho - 3} \cdot \frac{k_1^{k_1+1}}{k_1!} \cdot \frac{k_2^{k_2+1}}{k_2!} \cdots \frac{k_\varrho^{k_\varrho+1}}{k_\varrho!},$$

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_\varrho = n)$$

sei. Um diese Vermuthung als zutreffend zu erweisen, genügt es, zu zeigen, dass die Gleichung (8) durch den vorstehenden Werth von $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$ identisch befriedigt wird. Denn diese Gleichung gestattet die successive Berechnung der Werthe von $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$, ausgehend von dem Werthe $f(1) = 1$, welcher mit dem Ansatz (9) in Einklang steht.

Den Nachweis, dass die Gleichung (8) durch die Substitution (9) in eine Identität übergeht, will ich hier nicht ausführlich erbringen. Ursprünglich hatte ich mich dabei einiger Identitäten bedient, welche ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik*) mitgetheilt habe. Später erkannte ich jedoch, dass man durch einige andere Identitäten rascher zum Ziele kommt. Dieselben mögen hier, da sie sehr einfacher Natur sind, eine Stelle finden.

Bezeichnen $u, v, x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ unbeschränkt veränderliche Grössen, so ist

$$\sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$
$$= (u + v + x_1 + \cdots x_\varrho)^{\varrho-1} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right),$$

und

$$\sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu}$$
$$= (u + v + x_1 + \cdots + x_\varrho)^{\varrho} \cdot \frac{1}{u},$$

wobei sich die Summation auf alle Zerlegungen von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ in zwei Gruppen $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}$ und $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}$ bezieht.

§ 7.

Anzahlen für Riemann'sche Flächen vom Geschlecht Null.

Es ist nunmehr leicht, die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null zu bestimmen, welche folgenden Bedingungen genügen:

1) Die Verzweigungspunkte sollen sämmtlich gegeben sein.

*) Bd. 35, pag. 56 „Ueber einige Verallgemeinerungen der Leibniz'schen Differentiationsformel und des polynomischen Satzes.“

2) An allen diesen Punkten bis auf einen, soll die Verzweigung eine einfache sein.

3) An dem letzten Punkte sollen sich die n Blätter zu m_1 Cyklen von je n_1, m_2 Cyklen von je $n_2, \ldots, m_\nu$ Cyklen von je n_ν Blättern gruppiren.

Die in Rede stehenden Flächen sind einzeln zugeordnet den verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad S t_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1,$$

wo S eine Substitution mit m_1 Cyklen von je $n_1, \ldots, m_\nu$ Cyklen von je n_ν Elementen bedeutet und $t_1, t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$ Transpositionen bezeichnen.

Die Zahl ϱ ist gleich der Gesammtzahl der Cyklen von S, also

$$(2) \qquad \varrho = m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu.$$

Es giebt nun bekanntlich

$$(3) \qquad M = \frac{n!}{m_1!\, n_1^{m_1} \cdot m_2!\, n_2^{m_2} \cdots m_\nu!\, n_\nu^{m_\nu}}$$

Substitutionen S von dem angegebenen Charakter, und es wird also die Anzahl der Lösungen von (1) gleich

$$M \,.\, f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho),$$

wo von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ m_1 gleich n_1, m_2 gleich $n_2, \ldots, m_\nu$ gleich n_ν sind.

Da wir nun in einander transformirbare Lösungen von (1) nicht als verschieden anzusehen haben, so bekommen wir (falls $n > 2$) für die gesuchte Anzahl von Riemann'schen Flächen den Werth

$$\frac{M \,.\, f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)}{n!}$$

$$= (n + m_1 + \cdots + m_\nu - 2)!\, n^{m_1+m_2+\cdots+m_\nu-3} \frac{1}{m_1!} \left(\frac{n_1^{n_1}}{n_1!}\right)^{m_1} \cdots \frac{1}{m_\nu!} \left(\frac{n_\nu^{n_\nu}}{n_\nu!}\right)^{m_\nu}.$$

Insbesondere erhalten wir, falls wir $\nu = 1$, $m_1 = n$, $n_1 = 1$ wählen, das Resultat:*)

Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null, welche $(2n-2)$ gegebene einfache Verzweigungspunkte besitzen, beträgt

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\, n^{n-4}.$$

Nur im Falle $n = 2$ ist diese Anzahl noch mit 2 zu multipliciren.

---

*) Die hier bestimmte Anzahl giebt offenbar auch die Zahl der Büschel von binären Formen n^{ter} Ordnung an, welche eine gegebene Discriminante besitzen. Es ist interessant, mit dieser Zahl die von den Herren F. Meyer, Schubert und Stephanos berechnete Anzahl der Büschel von binären Formen n^{ter} Ordnung mit gegebener Functionaldeterminante zu vergleichen. Die letztere Anzahl ist gleich $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!}$. Man vergleiche auch eine Arbeit von Hilbert, d. Ann., Bd. 33, p. 227.

II. Abschnitt.

Monodromie-Gruppen.

§ 1.

Die Monodromie-Gruppen A und B.

Wir wollen uns vorstellen, dass sich die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in der complexen Zahlenebene E simultan in Bewegung setzen und schliesslich in die neuen Lagen $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ übergehen. Dabei soll jedoch das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ in jedem Stadium der Bewegung aus w *getrennt* liegenden Punkten bestehen. Betrachten wir nun eine n-blättrige Riemann'sche Fläche F, welche an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt ist, so wird dieselbe sich stetig mit dem Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ ändern und in eine bestimmte Fläche F' übergegangen sein, wenn das Punktsystem die Endlage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ erreicht hat.

Falls nun diese Endlage mit der Anfangslage übereinstimmt, falls also die Punkte $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ in irgend einer Reihenfolge mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zusammenfallen, wollen wir die betrachtete Bewegung als eine *„geschlossene Bahn"* bezeichnen. Bilden dann $F_1, F_2, \ldots$ die Gesammtheit der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$, so werden die Flächen $F_1', F_2', \ldots$, in welche dieselben übergehen, in irgend einer Reihenfolge mit $F_1, F_2, \ldots$ identisch sein. Es folgt also:

„Jeder geschlossenen Bahn des Punktsystems $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ entspricht eine bestimmte Substitution

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} F_1, & F_2, & \ldots \\ F_1', & F_2', & \ldots \end{pmatrix}$$

der Riemann'schen Flächen."

Die Substitutionen $\mathfrak{S}$, welche allen möglichen geschlossenen Bahnen entsprechen, bilden eine Gruppe, die wir als

Monodromiegruppe A.

bezeichnen. Diese Gruppe besitzt eine Reihe von Untergruppen, welche sich ohne Weiteres darbieten. Jeder geschlossenen Bahn gehört nämlich eine Substitution

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_w \\ a_1', & a_2', & \ldots, & a_w' \end{pmatrix}$$

der w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu. Betrachten wir nun alle Bahnen, deren zugehörige Substitutionen $\mathfrak{A}$ einer bestimmten Vertauschungsgruppe G der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_w$ angehören, so werden die diesen Bahnen entsprechenden Substitutionen $\mathfrak{S}$ offenbar eine Gruppe bilden, welche in der Gruppe A enthalten ist. Besteht die Vertauschungsgruppe G aus der einen identischen Substitution, so heisst das, wir betrachten nur diejenigen geschlossenen Bahnen, bei welchen die Endlage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ auch in Bezug auf die Reihenfolge mit der Anfangslage übereinstimmt, so dass jeder Punkt a_i für sich einen geschlossenen Weg beschreibt. Diese Bahnen wollen wir „*vollständig geschlossen*" nennen. Die den vollständig geschlossenen Bahnen entsprechende Vertauschungsgruppe der Riemann'schen Flächen $F_1, F_2, \ldots$ heisse die

Monodromiegruppe B.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass diese Gruppe B eine ausgezeichnete (invariante) Untergruppe der Monodromiegruppe A ist.

§ 2.

Erläuterung.

Die nachstehenden Betrachtungen sind zwar für die weiteren Entwicklungen nicht erforderlich, doch wird es gut sein, dieselben hier einzufügen, da sie geeignet sind, die Auffassung zu erleichtern.

Alle möglichen Lagen des Punktsystems $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ bilden ein $2w$-fach ausgedehntes unbegrenztes Continuum R_{2w}. Die complexen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mögen als die Coordinaten der „Stelle" $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ dieses Continuums bezeichnet werden.

Im Allgemeinen können wir nun aus jeder Stelle durch Permutation der Coordinaten $w! - 1$ neue Stellen ableiten. Jedoch ist dieses nicht mehr der Fall, insofern weniger als $w! - 1$ Stellen erhalten werden, sobald sich unter den Coordinaten der ursprünglichen Stelle gleiche finden, d. h. sobald für diese Stelle mindestens ein Punkt a_i mit einem Punkte a_k zusammenfällt. Diese besonderen Stellen, welche durch die Gleichung

$$\sum_{i>k}(a_i - a_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, w)$$

charakterisirt sind, bilden ein $(2w-2)$-fach ausgedehntes Continuum V_{2w-2}, welches in Rücksicht auf die Bedeutung, welche es bei unseren Betrachtungen besitzt, als „*Verzweigungsgebilde*" bezeichnet werden soll. Das Verzweigungsgebilde theilt das Continuum R_{2w} nicht in Stücke, da es eine um zwei Einheiten geringere Dimension besitzt als dieses.

Uebrigens zerfällt das Verzweigungsgebilde in die $\frac{w(w-1)}{2}$ einzelnen Gebilde:

$$a_2 - a_1 = 0,\ a_3 - a_1 = 0, \ldots, a_w - a_{w-1} = 0.$$

Eine „geschlossene Bahn" bedeutet nun offenbar nichts Anderes, als einen in dem Continuum R_{2w} verlaufenden Weg, welcher unter Vermeidung des Gebildes V_{2w-2} von einer Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ ausgehend entweder zu dieser zurückkehrt, oder in einer der $w! - 1$ abgeleiteten Stellen endigt. Im ersteren Falle haben wir es mit einer „vollständig" geschlossenen Bahn zu thun.

Es bezeichne jetzt N die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen verzweigt sind, und man denke sich N ineinanderliegende Exemplare des Continuums R_{2w}. Von den N Flächen werden nur dann zwei oder mehrere zusammenfallen, wenn man die Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ auf das Verzweigungsgebilde V_{2w-2} rücken lässt. Diesem Umstande entsprechend werden die N Exemplare R_{2w} längs gewisser durch V_{2w-2} gelegten Uebergangsräume verbunden, und es entsteht auf diese Weise ein $2w$-fach ausgedehnter über dem Continuum R_{2w} ausgebreiteter Riemann'scher Raum, auf dessen Stellen die Gesammtheit der n-blättrigen Flächen mit w Verzweigungspunkten eindeutig umkehrbar bezogen ist. Die Monodromiegruppe dieses Riemann'schen Raumes ist offenbar nichts Anderes, als die Monodromiegruppe B.

Auch die Monodromiegruppe A lässt sich in entsprechender Weise deuten. Man hat dabei nur an Stelle des Continuums R_{2w} ein anderes Continuum $\overline{R}_{2w}$ zu setzen, dessen einzelne Stelle die elementaren symmetrischen Functionen der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu Coordinaten besitzt.

Aus den nachfolgenden Entwicklungen wird hervorgehen, dass, allgemein zu reden, der oben erwähnte Riemann'sche Raum nicht aus einem Stücke besteht, sondern in mehrere verschiedene Riemann'sche Räume zerfällt.

§ 3.

Aenderung der Riemann'schen Flächen auf einer von den Verzweigungspunkten beschriebenen Bahn.

Wir wollen nunmehr näher untersuchen, in welcher Weise eine Riemann'sche Fläche

$$(1) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_w \\ S_1, S_2, \ldots, S_w \end{pmatrix}$$

sich ändert, wenn das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ sich stetig in eine neue Lage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ bewegt. Einen solchen Uebergang werden wir kurz als eine „Bahn" bezeichnen und von der „Anfangsstelle" $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ und der „Endstelle" $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ der Bahn sprechen.

Bei dieser Untersuchung wollen wir die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in folgender Weise bestimmen.*) Wir ziehen eine knotenlose Linie L, welche von a_1 über $a_2, a_3, \ldots, a_{w-1}$ nach a_w hinführt und ergänzen diese Linie, indem wir a_w mit a_1 verbinden, zu einer geschlossenen Linie L, welche die Ebene E in zwei Gebiete G und G' zerlegt. Es sei G dasjenige Gebiet, welches auf der negativen Seite von L liegt. Die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ mögen nun von irgend einem Punkte O des Gebietes G durch das Innere von G nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ gelegt werden.

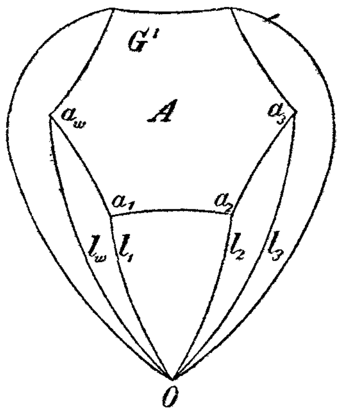

Fig. 1.

Legen wir von einem Punkte A des Gebietes G' aus Schleifen nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$, welche abgesehen von den die Punkte a_i umgebenden kreisförmigen Contouren, ganz innerhalb G' verlaufen, so erfahren die Blätter bei positiver Durchlaufung dieser Schleifen bezüglich die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$. Es ist für das Folgende bequem, zu bemerken, dass diese Substitutionen gerade zu Stande kommen, wenn wir dem Ueberschreiten von der negativen zur positiven Seite der Linien

$$a_1 a_2,\ a_2 a_3,\ a_3 a_4, \ldots, a_{w-1} a_w,\ a_w a_1$$

bezüglich die Substitutionen

$$S_1,\ S_1 S_2,\ S_1 S_2 S_3, \ldots, S_1 S_2 \ldots S_{w-1},\ S_1 S_2 \ldots S_w = 1$$

zuordnen. Hiernach entspricht nämlich der Schleife (a_k), da dieselbe die Linien $a_{k-1} a_k$ und $a_k a_{k+1}$ und zwar die erstere von der positiven zur negativen, die letztere von der negativen zur positiven Seite überschreitet, die Substitution

$$(S_1 S_2 \ldots S_{k-1})^{-1} (S_1 S_2 \ldots S_{k-1} S_k) = S_k,$$

wie es sein muss.

Wie wir auch die Ergänzungslinie $a_w a_1$, den Punkt O und die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ abändern mögen, stets wird die Fläche (1) ungeändert bleiben, wenn wir nur das System von Substitutionen

$$(2) \qquad \Sigma = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

festhalten. Daher wird die Fläche auch schon vollständig durch Angabe der Linie L und des Systemes Σ bestimmt sein, und dem entsprechend mit

---

*) Vgl. Clebsch, l. c. Man vergleiche für das Folgende die Figur 1.

$$(4) \qquad F = \binom{L}{\Sigma}$$

bezeichnet werden können.

Die einzelnen Stücke der Linie L bezeichnen wir mit

$$(5) \qquad s_1 = a_1 a_2, \; s_2 = a_2 a_3, \; \ldots, \; s_{w-1} = a_{w-1} a_w .$$

Ohne die Fläche F zu ändern, dürfen wir offenbar das Stück $s_i = a_i a_{i+1}$ noch beliebig deformiren, wenn wir dabei nur keinen der Punkte $a_1, \ldots, a_w$ überschreiten und die übrigen Stücke s, sowie das System Σ fest lassen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir jetzt irgend eine Bahn. Diese wird sich in der Ebene E als ein System von Linien

$$(6) \qquad a_1 a_1', \; a_2 a_2', \; \ldots, \; a_w a_w'$$

darstellen, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ simultan durchlaufen. Wenn nun diese Linien weder sich selber noch einander schneiden, so soll die Bahn „einfach“ heissen. Es genügt, einfache Bahnen zu betrachten, da sich offenbar jede Bahn als eine Reihe aneinandergesetzter einfacher Bahnen darstellen lässt. In welche Fläche ist nun die Fläche (4) nach Durchlaufung der einfachen Bahn (6) stetig übergegangen? Um dieses zu entscheiden, unterwerfen wir die Stücke $s_1, s_2, \ldots, s_{w-1}$ zunächst derartigen Deformationen, dass die Linie L schliesslich keine anderen Punkte, als $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mit den Linien (6) gemein hat.

Dies ist stets möglich; denn wenn z. B. die Linie $a_1 a_1'$ ausser a_1 noch weitere Schnittpunkte mit L besitzt, so betrachten wir den letzten vor a_1' liegenden Schnittpunkt, welcher sich auf dem Stücke $s_i = a_i a_{i+1}$ finden möge. Ein Blick auf die Figur 2 zeigt dann, dass wir die Linie s_i durch eine andere ersetzen können (sie ist in der Figur punktirt), welche nun mit $a_1 a_1'$ mindestens einen Punkt weniger, mit den übrigen Linien (6) aber nicht mehr Punkte als die frühere Linie s_i gemein hat. Indem man dieses Verfahren mehrfach anwendet, kann man alle Schnittpunkte von L mit den Linien (6) beseitigen.*) Man beachte, dass die Abänderung der Linie L jedenfalls solche Stücke s_i nicht betrifft, welche von vornherein keiner der Linien (6) begegnen.

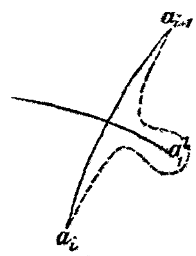

Fig. 2.

Betrachten wir nunmehr die Linien

$$(7) \qquad a_1' a_1 a_2 a_2', \; a_2' a_2 a_3 a_3', \; \ldots, \; a_{w-1}' a_{w-1} a_w a_w',$$

so setzen sich dieselben zu einer knotenlosen Linie zusammen, welche jedoch längs der Stücke $a_2 a_2', a_3 a_3', \ldots, a_{w-1} a_w'$ doppelt überdeckt ist.

*) Auch der Fall, in welchem ganze Stücke von L mit Stücken der Linien (6) coincidiren, bietet offenbar keine Schwierigkeit.

Wir deformiren die Linien (7) unter Festhaltung ihrer Endpunkte $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ und ohne einen dieser Punkte zu überschreiten so, dass dieselben nach der Deformation eine einfache knotenlose Linie L' bilden. (In Figur 3 ist die Linie punktirt). Offenbar geht nun die Fläche (4) stetig in die Fläche

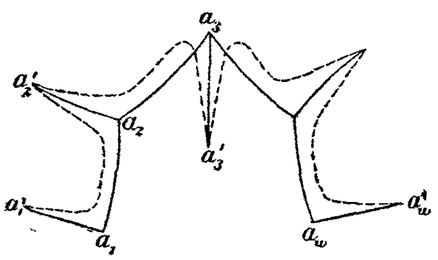

Fig. 3.

$$F' = \binom{L'}{\Sigma} \tag{8}$$

über, wenn das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ die einfache Bahn (6) durchläuft. Wenn wir also die Aenderung der Riemann'schen Flächen bei Durchlaufung irgend einer Bahn bestimmen wollen, so haben wir unser Augenmerk nur auf die successive Abänderung der Linie L zu richten. Ist die Bahn eine geschlossene, so wird die Linie L in eine Linie L' übergehen, welche dieselben Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ wie die Linie L verbindet, und zwar auch in derselben Reihenfolge, falls die Bahn eine vollständig geschlossene ist.

§ 4.

Vollständig geschlossene Bahnen.

Wir beschränken jetzt die Betrachtung auf vollständig geschlossene Bahnen, und wollen zeigen, dass durch geeignete Wahl einer solchen Bahn jede Linie

$$L = (s_1, s_2, \ldots, s_{w-1})$$

in jede andere Linie

$$L' = (s_1', s_2', \ldots, s_{w-1}')$$

übergeführt werden kann. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Linien L und L' in den ersten $i-1$ Stücken übereinstimmen, dass also

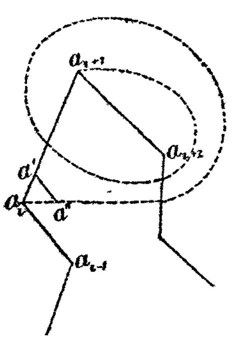

Fig. 4.

$$s_1 = s_1', \; s_2 = s_2', \; \ldots, \; s_{i-1} = s_{i-1}'$$

ist, während die Stücke s_i und s_i'*) von einander verschieden sind. Die Zahl i darf auch den Werth 1 besitzen, in welchem Falle schon s_1 und s_1' verschieden sind. Es bezeichne nun B_{i+1} eine Bahn, welche folgendermassen erklärt ist. Alle Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mit Ausnahme von a_{i+1} bleiben fest; dieser letztere bewegt sich zunächst längs s_i bis nach a', sodann nach dem Punkte a'' auf s_i' und schliesslich längs s_i' in seine Ausgangslage zurück. Dabei sind die Punkte a', a'' und ihre Verbindungslinie $a'a''$ so zu wählen, dass in dem Dreieck $a_i a' a''$ keiner der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$

*) In der Figur 4 ist s_i' punktirt.

liegt und $a'a''$ keine der Linien $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}$ trifft. Nach Durchlaufung dieser Bahn B_{i+1} ist die Linie L übergegangen in eine neue Linie, welche mit L' die i ersten Stücke $s_1', s_2', \ldots, s_i'$ gemein hat. Diese Betrachtung zeigt, dass wir durch Aneinanderreihung von Bahnen

$$B_2, B_3, \ldots, B_w$$

die Linie L in jede beliebige andere Linie L' überführen können.

Die Bahnen B_i lassen sich nun weiter als Combinationen einer endlichen Anzahl von nunmehr einzuführenden Bahnen darstellen. Um die letzteren in einfacher Weise erklären zu können, ergänzen wir die Linie L, wie in § 3, zu einer geschlossenen Linie L und bezeichnen wieder mit G und G' die von der Linie L begrenzten Gebiete der Ebene E.

Eine Bahn, welche den Punkt a_i zunächst durch das Innere von G' an das Stück $a_k a_{k+1}$ von L und sodann ausserhalb G' in die Ausgangslage zurückführt, bezeichnen wir mit $B_{i,k}$. Dann lässt sich jede Bahn B_i als Combination der Bahnen

$$B_{i,i+1}, B_{i,i+2}, \ldots, B_{i,w}$$

darstellen. Jede beliebige vollständig geschlossene Bahn dürfen wir also durch eine Combination der $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ Bahnen

$$\begin{array}{llll} B_{2,3}, & B_{2,4}, & \ldots, & B_{2,w}, \\ & B_{3,4}, & \ldots, & B_{3,w}, \\ & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ & & & B_{w-1,w} \end{array}$$

ersetzen und zwar durch eine Combination der Gestalt

$$B_{2,\alpha}^{\varepsilon_\alpha} B_{2,\beta}^{\varepsilon_\beta} \cdots B_{2,\lambda}^{\varepsilon_\lambda} \cdot B_{3,\alpha'}^{\varepsilon_{\alpha'}} B_{3,\beta'}^{\varepsilon_{\beta'}} \cdots B_{3,\lambda'}^{\varepsilon_{\lambda'}}, \ldots,$$

wo die Exponenten $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \ldots, \varepsilon_{\lambda'}, \ldots$ einen der Werthe $+1, -1$ besitzen.

Unter B^{-1} ist dabei dieselbe Bahn, wie unter B, nur in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, zu verstehen.

Wir bemerken beiläufig, dass zwischen den Bahnen B_{ik} die Beziehung

$$B_{2,w} B_{3,w} \ldots B_{w-1,w} = 1$$

besteht.

§ 5.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe B.

Wir legen jetzt eine feste Linie L zu Grunde.*) Dann können wir die einzelne Riemann'sche Fläche F durch das ihr zugehörende System von Substitutionen

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

bezeichnen. Die Linie L sei nach Durchlaufung der Bahn $B_{i,k}$ übergegangen in die Linie L'. (In der Figur sind die Stücke der Linie L, soweit sie nicht mit Stücken von L' zusammenfallen, gestrichelt; die Stücke der Linie L' sind stark ausgezogen). Ferner sei F' die Fläche, in welche

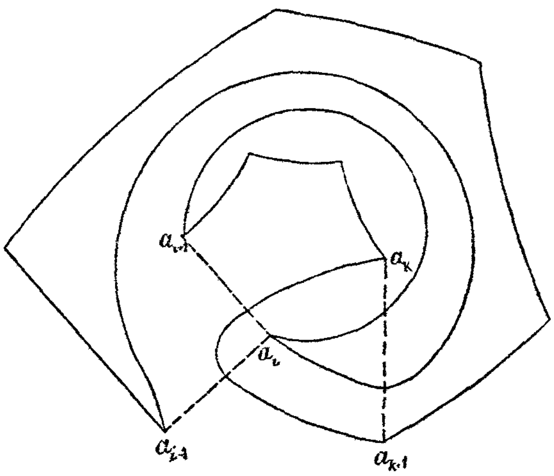

Fig. 5.

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

nach Durchlaufung der Bahn $B_{i,k}$ übergegangen ist. Bezeichnet dann r einen der Indices

$$i+1, i+2, \ldots, k,$$

so entspricht dem Wege l_r in Bezug auf die Fläche F', wie aus der Figur erhellt, die Substitution

$$S_r' = S_i S_r S_i^{-1};$$

dem Wege l_i entspricht in Bezug auf F' die Substitution

$$S_i' = (S_i S_{i+1} \ldots S_k)\, S_i (S_i S_{i+1} \ldots S_k)^{-1},$$

während allen übrigen Wegen l dieselbe Substitution in Bezug auf F' wie in Bezug auf F entspricht. Wir finden also:

„Die der Bahn $B_{i,k}$ entsprechende Vertauschung $\mathfrak{S}_{i,k}$ der Riemann'schen Flächen besteht darin, dass an Stelle der Fläche

$$F = (S_1, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_k, \ldots, S_w)$$

die Fläche

$$F' = (S_1, \ldots, S_i', S_{i+1}', \ldots, S_k', \ldots, S_w)$$

tritt, wobei zur Abkürzung

$$\begin{cases} S_r' = S_i S_r S_i^{-1} \quad (r = i+1, i+2, \ldots, k), \\ S_i' = (S_i \ldots S_k)\, S_i (S_i \ldots S_k)^{-1}, \end{cases}$$

gesetzt ist.

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen folgt weiter:

---

*) Vgl. für das Folgende die Figur 5.

„*Die Monodromiegruppe B besteht aus allen Combinationen der* $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ *Substitutionen*

$$\mathfrak{S}_{2,3},\ \mathfrak{S}_{2,4},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{2,w},\ \mathfrak{S}_{3,4},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{3,w},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{w-1,w}.\text{“}$$

Von diesen „erzeugenden“ Substitutionen der Gruppe B können wir $\mathfrak{S}_{w-1,w}$ zufolge der Relation

$$\mathfrak{S}_{2,w}\,\mathfrak{S}_{3,w}\ldots\mathfrak{S}_{w-1,w}=1$$

bei Seite lassen. Ob ausser dieser noch andere der Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$ durch die übrigen ausdrückbar sind, ob wir also die Zahl der erzeugenden Substitutionen noch weiter vermindern können, wollen wir hier nicht untersuchen.

§ 6.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe A.

Bezeichnen wir mit W_i irgend eine bestimmte Bahn, nach deren Durchlaufung die Punkte a_i, a_{i+1} ihre Plätze gewechselt, die übrigen Punkte $a_1, \ldots, a_w$ dagegen ihre Ausgangslage wieder erreicht haben, so können wir aus den Bahnen

(1) $$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_{w-1}$$

stets eine Bahn zusammensetzen, nach deren Durchlaufung die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ eine beliebig vorgeschriebene Vertauschung erfahren haben. Daher kann jede geschlossene Bahn durch eine Combination der Bahnen (1) und der oben eingeführten Bahnen $B_{i,k}$ ersetzt werden.

Wir wählen nun die Bahnen (1) in folgender Weise: Wir lassen den Punkt a_i durch das Innere von G' nach a_{i+1} und gleichzeitig a_{i+1} ausserhalb des Gebietes G' nach a_i laufen, während alle übrigen Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ fest bleiben. Die hierdurch erklärte Bahn nehmen wir als Bahn W_i. Die Aenderung, welche die Linie L nach Durchlaufung dieser Bahn erfahren hat,

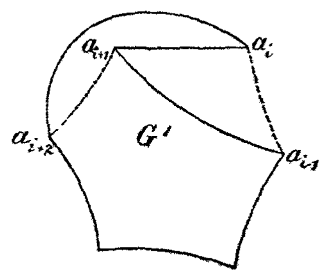

Fig. 6.

zeigt die Figur 6, in welcher die Stücke von L, welche eine Aenderung erfahren, gestrichelt, die Stücke, welche an ihre Stelle treten, gleich den übrigen Stücken stark ausgezogen sind. Man liest aus der Figur nun sofort ab, dass die Vertauschung $\mathfrak{S}_i$ der Riemann'schen Flächen, welche der Bahn W_i entspricht, sich dahin bestimmt, dass an Stelle der Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_w)$$

die Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i S_{i+1} S_i^{-1}, S_i, \ldots, S_w)$$

tritt. Diese Vertauschungen $\mathfrak{S}_i$ in Verbindung mit den Vertauschungen $\mathfrak{S}_{i,k}$ erzeugen also die Monodromiegruppe A. Nun lassen sich aber die Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$, wie man sofort erkennt, durch die Substitutionen $\mathfrak{S}_i$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$\mathfrak{S}_{i,k} = \mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_{i+1} \dots \mathfrak{S}_{k-2} \mathfrak{S}_{k-1} \,.\, \mathfrak{S}_{k-1} \mathfrak{S}_{k-2} \dots \mathfrak{S}_{i+1} \mathfrak{S}_i.$$

Wir gelangen daher zu folgendem einfachen Resultat:

„*Die Monodromiegruppe A besteht aus allen Combinationen der $w-1$ Substitutionen*

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_{w-1},$$

wo $\mathfrak{S}_i$ diejenige Vertauschung der Riemann'schen Flächen bedeutet, welche an Stelle der Fläche

$$F = (S_1, S_2, \dots, S_i, S_{i+1}, \dots, S_w)$$

die Fläche

$$F' = (S_1, S_2, \dots, S_i S_{i+1} S_i^{-1}, S_i, \dots, S_w)$$

treten lässt.

Ordnen wir den erzeugenden Substitutionen

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_{w-1}$$

der Gruppe A die Transpositionen

$$(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_{w-1} a_w)$$

zu, welche ihrerseits als erzeugende Substitutionen für die Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Vertauschungen der Elemente $a_1, a_2, \dots, a_w$ angesehen werden können, so haben wir dadurch eine isomorphe Beziehung zwischen beiden Gruppen festgelegt. In dieser Beziehung entsprechen den Untergruppen von $\mathfrak{A}$ die oben (§ 1) erwähnten Untergruppen von A. Insbesondere besteht die Monodromiegruppe B offenbar aus denjenigen Substitutionen von A, welche bei dem in Rede stehenden Isomorphismus der identischen Substitution von $\mathfrak{A}$ entsprechen.

§ 7.

Intransitivität der Gruppen A und B.

Man übersieht leicht, dass die Monodromiegruppen A und B intransitiv sind. In der That kann sich bei Durchlaufung irgend einer Bahn die Art des Zusammenhangs der Blätter in dem einzelnen Verzweigungspunkte für keine der Riemann'schen Flächen ändern, und es vertauschen sich daher z. B. in der Gruppe B nur jeweils solche Flächen

(1) $$F = (S_1, S_2, \dots, S_w)$$

unter einander, für welche die einzelnen Substitutionen S_i eine feste Zahl von Cyklen und in den Cyklen eine feste Zahl von Elementen enthalten.

Dies geht auch unmittelbar aus der Gestalt der erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$ (pag. 30) hervor. Aus der Betrachtung der Substitutionen

$\mathfrak{S}_{i,k}$ entnehmen wir sofort noch weitere Bedingungen dafür, dass eine Fläche (1) in eine andere Fläche

$$(2) \qquad F' = (S_1', S_2', \ldots, S_w')$$

vermöge einer Substitution der Gruppe B übergeführt werden kann. Offenbar muss nämlich die Monodromiegruppe der Fläche (1), d. h. diejenige Gruppe, welche aus allen Combinationen der Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$ besteht, mit der Monodromiegruppe der Fläche F' übereinstimmen (oder doch in die letztere transformirbar sein). Ueberdies müssen innerhalb dieser gemeinsamen Monodromiegruppe der Flächen F und F' die beiden Substitutionen S_i und S_i' gleichberechtigt sein, wo i jeden der Indices $1, 2, \ldots, w$ bedeutet. Die Frage ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, habe ich nicht allgemein entscheiden können.

Indessen bietet es keine Schwierigkeit, diese Frage für den Fall zu beantworten, wo wir aus der Gesammtheit der n-blättrigen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ diejenigen herausgreifen, für welche diese Punkte *einfache* Verzweigungspunkte sind.*)

Nach einem Satze des Herrn Lüroth**) kann man durch zweckmässige Wahl der Verzweigungsschnitte, d. h. durch zweckmässige Wahl der Linie L, erreichen, dass für eine beliebige jener Flächen das zugehörige System von Substitutionen das folgende wird:

$$S_1=(12), S_2=(12), S_3=(13), S_4=(13), \ldots, S_{2n-3}=(1,n), S_{2n-2}=(1,n),$$
$$S_r = (1, n) \quad (r=2n-1, \ldots, w).$$

Daher kann man auf einer zweckmässig gewählten geschlossenen Bahn jede der betrachteten Flächen in eine bestimmte unter ihnen, nämlich in die Fläche

$$\big((12), (12), (13), (13), \ldots, (1n)\big)$$

überführen und zwar folgt aus den Betrachtungen von Clebsch**), dass diese Ueberführung auch schon durch Benutzung von „vollständig" geschlossenen Bahnen möglich ist. Hiernach können wir folgende Sätze aussprechen:

Bildet man die Monodromiegruppe A, indem man dabei nur diejenigen Flächen berücksichtigt, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu einfachen Verzweigungspunkten besitzen, so ist die entstehende Gruppe transitiv. Das Gleiche gilt für die Monodromiegruppe B.

Oder anders ausgedrückt: Das Problem, die n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu bestimmen, ist *irreducibel*, sowohl wenn die symmetrischen Verbindungen der Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$, als auch wenn

*) Die Monodromiegruppe ist in diesem Falle die symmetrische Gruppe.
**) l. c.

diese Werthe selber als gegeben betrachtet werden. Im ersteren Falle ist nämlich die Gruppe A, im letzteren die Gruppe B die Galois'sche Gruppe des Problems, wobei alle Constanten als adjungirt vorausgesetzt werden. —

III. Abschnitt.

Realitäts-Fragen.

§ 1.

Conjugirte Riemann'sche Flächen.

Wir nehmen in der complexen Zahlenebene E irgend w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ an, legen nach diesen von irgend einem Punkte O aus (wie in I, § 1) die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ und betrachten irgend eine der Riemann'schen Flächen

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix} \tag{1}$$

welche in $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt sind. Wenn wir diese Fläche an der Axe der reellen Zahlen der Ebene E spiegeln, so entsteht eine neue Fläche $\overline{F}$, welche wir als *conjugirte* Fläche von F bezeichnen wollen.

Gehen bei dieser Spiegelung die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ und die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ bezüglich über in $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_w$ und $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_w$, so ist, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt (vgl. die Fig. 7):

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} \bar{l}_w, & \bar{l}_{w-1}, & \ldots, & \bar{l}_2, & \bar{l}_1 \\ S_w^{-1}, & S_{w-1}^{-1}, & \ldots, & S_2^{-1}, & S_1^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Flächen $\overline{F}$ und F sind eindeutig umkehrbar und conform auf einander bezogen; doch ist die conforme Beziehung eine solche, bei welcher eine Umlegung der Winkel statt hat. Zur Erläuterung sei noch Folgendes bemerkt: Stellen die Punkte der Ebene E die Werthe der complexen Variabeln x dar, und ist die Fläche F durch die algebraische Gleichung $f(y, x) = 0$ erklärt, so wird die Gleichung $\bar{f}(y, x) = 0$ die Fläche $\overline{F}$ definiren, wenn $\bar{f}(y, x)$ dadurch aus $f(y, x)$ abgeleitet wird, dass jeder Coefficient der letzteren Function durch seinen conjugirt imaginären Werth ersetzt wird.

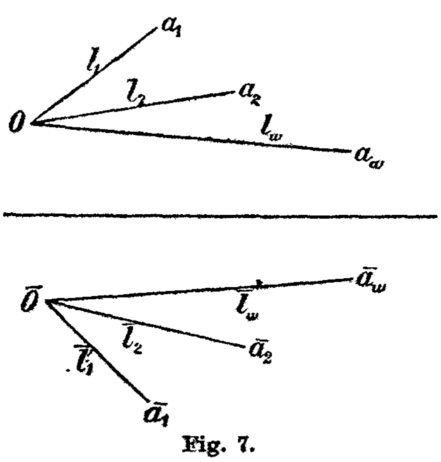

Fig. 7.

Wenn die Fläche F mit ihrer conjugirten $\overline{F}$ übereinstimmt, so ist die Fläche F im Sinne des Herrn Klein „symmetrisch".*) (Die Gleichung $f(y, x) = 0$ kann dann so gewählt werden, dass sie reelle Coefficienten besitzt).

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$ theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind.

Wir wollen annehmen, dass die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$ dieser Bedingung genügen, und zwar sei die Reihenfolge dieser Werthe so gewählt, dass

$$a_1 \text{ und } a_w = \bar{a}_1,\ a_2 \text{ und } a_{w-1} = \bar{a}_2, \ldots, a_\mu \text{ und } a_{w-\mu+1} = \bar{a}_\mu$$

conjugirt imaginär, sowie

$$a_{\mu+1} = b_1,\ a_{\mu+2} = b_2, \ldots, a_{\mu+\varrho} = b_\varrho$$

reell sind. Die Verzweigungspunkte sind dann also der Reihe nach

$$(3) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\mu,\ b_1, b_2, \ldots, b_\varrho,\ \bar{a}_\mu, \ldots, \bar{a}_2, \bar{a}_1.$$

Wir setzen ferner $b_1 > b_2 > \cdots > b_\varrho$ voraus, wählen den Punkt O auf der Axe der reellen Zahlen, und zwar so, dass $O > b_1$ ist, und ziehen endlich die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ dergestalt, dass $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ durch Spiegelung an der Axe der rellen Zahlen in

$$l_w = \bar{l}_1,\ l_{w-1} = \bar{l}_2, \ldots, l_{w-\mu+1} = \bar{l}_\mu$$

übergehen (vgl. Fig. 8).

Indem wir dieses System von Linien ein für alle Mal festlegen, können wir die Fläche (1) kürzer mit

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

oder, indem wir die Bezeichnung der Substitutionen etwas abändern, mit

$$(4) \qquad F = (S_1, S_2, \ldots, S_\mu,\ T_1, T_2, \ldots, T_\varrho,\ \Sigma_\mu, \ldots, \Sigma_2, \Sigma_1)$$

bezeichnen. Beziehen wir nun die conjugirte Fläche $\overline{F}$ auf dasselbe System von Linien, so finden wir

$$(5) \qquad \overline{F} = (\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_\mu,\ \overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_\varrho,\ \overline{\Sigma}_\mu, \ldots, \overline{\Sigma}_2, \overline{\Sigma}_1),$$

wo zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{cases} \overline{S}_1 = \Sigma_1^{-1}, \ldots, \overline{S}_\mu = \Sigma_\mu^{-1}; & \overline{T}_k = U_k^{-1} T_k^{-1} U_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \varrho), \\ \overline{\Sigma}_1 = S_1^{-1}, \ldots, \overline{\Sigma}_\mu = S_\mu^{-1}; & U_k = T_k . T_{k+1} \ldots T_\varrho \quad (k = 1, 2, \ldots, \varrho) \end{cases}$$

*) „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale", pag. 72.

gesetzt ist. Man bestätigt diese Angabe sofort mit Hülfe der Figur 8. Die Bedingung dafür, dass die Flächen (4) und (5) dieselben sind, besteht nun in der Transformirbarkeit der zugehörigen Systeme von

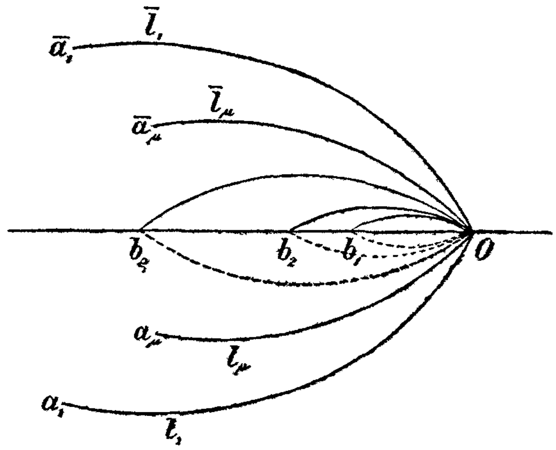

Fig. 8.

Substitutionen in einander. In Rücksicht auf (6) ergiebt sich daher, nach leichter Zwischenrechnung, der Satz:

Die Riemann'sche Fläche (4) *ist dann und nur dann sich selbst conjugirt, wenn es eine Substitution U giebt, welche den Gleichungen*

$$(7)\qquad \begin{cases} S_i U \Sigma_i = \Sigma_i U S_i = U & (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ U_k U U_k = U & (k = 1, 2, \ldots, \varrho). \end{cases}$$

genügt, wobei zur Abkürzung

$$(8)\quad T_\varrho = U_\varrho,\ T_{\varrho-1} T_\varrho = U_{\varrho-1},\ T_{\varrho-2} T_{\varrho-1} T_\varrho = U_{\varrho-2}, \ldots, T_1 T_2 \ldots T_\varrho = U_1$$

gesetzt ist.

Betrachten wir irgend einen Punkt P auf der Axe der reellen Zahlen und nennen wir $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die n über P liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche (4), so werden diese Punkte bei der symmetrischen Umformung der Fläche eine bestimmte Vertauschung erfahren, indem den Punkten

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

dieselben Punkte, aber eventuell in anderer Reihenfolge:

$$P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_n}$$

entsprechen. Die Substitution

$$(9)\qquad V = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

wird die Periode zwei besitzen, da eine Wiederholung der symmetrischen Umformung zur Identität führt.

Bezeichnen wir nun mit

$$(10)\qquad (0), (1), (2), \ldots, (\varrho)$$

die Stücke

$$b_\varrho O,\ O b_1,\ b_1 b_2, \ldots, b_{\varrho-1} b_\varrho,$$

in welche die Axe der reellen Zahlen durch die Punkte $0, b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ zerlegt wird, so finden wir für die Substitution V bez.

$$(11) \qquad V = U, \ V = U_1 U, \ V = U_2 U, \ldots, V = U_\varrho U,$$

je nachdem der Punkt P auf dem Stücke (0) oder (1) oder (2), ... oder (ϱ) angenommen wird. Die Gleichungen

$$(12) \qquad U^2 = 1, \ (U_1 U)^2 = 1, \ (U_2 U)^2 = 1, \ldots, (U_\varrho U)^2 = 1$$

stehen mit den Gleichungen (7), wie man leicht erkennt, in Einklang.

Die Substitutionen (11) dienen vor allem dazu, festzustellen, in welcher Weise sich die einzelnen Stücke der Axe der reellen Zahlen zu den Uebergangslinien*) der Fläche F zusammenschliessen.

Wir bemerken noch, dass die Gleichungen (7) ersetzt werden können durch die Gleichungen (12) und die Gleichungen

$$(13) \qquad S_i U \Sigma_i = U \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

§ 2.

Flächen mit einfachen, paarweise conjugirt imaginären Verzweigungspunkten.

Betrachten wir die n-blättrigen Riemann'schen Flächen, mit den gegebenen Verzweigungswerthen

$$a_1, a_2, \ldots, a_w,$$

so werden diese Flächen theils sich selber conjugirt, theils paarweise einander conjugirt sein, wenn wir annehmen, dass $a_1, a_2, \ldots, a_w$ theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind. (Würden wir die Bestimmung jener Flächen von einer algebraischen Gleichung abhängig machen, so würden bei geeigneter Wahl der Unbekannten, den sich selbst conjugirten Flächen die reellen Wurzeln der Gleichung entsprechen).

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen setzen uns nun in Stand, die sich selbst conjugirten Flächen von den übrigen zu trennen und den verschiedenen Arten von Uebergangslinien entsprechend in Gruppen einzutheilen.

Die allgemeine Durchführung der hierzu erforderlichen Untersuchungen vermag ich hier nicht zu geben; vielmehr muss ich mich begnügen, die wesentlichen Punkte in einem einfachen Falle zu besprechen.

Dieser Fall sei derjenige, in welchem die $w = 2\mu$ Verzweigungswerthe paarweise conjugirt imaginär sind, etwa

$$a_w = \bar{a}_1, \ a_{w-1} = \bar{a}_2, \ldots, a_{\mu+1} = \bar{a}_\mu,$$

*) Siehe F. Klein, l. c.

und in welchem überdies nur diejenigen Flächen betrachtet werden, welche in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigt sind.

Diese Flächen sind, nach Festlegung der Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_\mu, \bar{l}_\mu, \ldots, \bar{l}_2, \bar{l}_1,$$

einzeln zugeordnet den Systemen von $w = 2\mu$ Transpositionen

$$(1) \qquad t_1, t_2, \ldots, t_\mu, \tau_\mu, \ldots, \tau_2, \tau_1,$$

welche den mehrfach erwähnten Bedingungen (vgl. I, § 1) genügen. Einem Systeme entspricht eine sich selbst conjugirte Fläche, wenn die Gleichungen

$$(2) \qquad \tau_1 = U t_1 U, \ \tau_2 = U t_2 U, \ldots, \tau_\mu = U t_\mu U, \ U^2 = 1$$

durch eine Substitution U befriedigt werden können. Eine sich selbst conjugirte Fläche F kann daher schon durch das System der $\mu + 1$ Substitutionen

$$(3) \qquad t_1, t_2, \ldots, t_\mu, U$$

charakterisirt und dem entsprechend mit

$$(4) \qquad F = (t_1, t_2, \ldots, t_\mu, U)$$

bezeichnet werden. Die Bedingungen, welchen das System (1) genügen muss, übertragen sich nun auf das System (3) in folgender Weise. Erstens muss, der Bedingung $t_1 t_2 \ldots t_\mu \tau_\mu \ldots \tau_2 \tau_1 = 1$ entsprechend,

$$(5) \qquad TU = UT$$

sein, wenn wir zur Abkürzung

$$(6) \qquad T = t_1 t_2 \ldots t_\mu$$

setzen. Ferner müssen, da vermöge

$$t_1, t_2, \ldots, t_\mu, U t_1 U, \ldots, U t_\mu U$$

ein Uebergang von jedem Elemente zu jedem anderen möglich sein soll, die Substitutionen (3) alle Elemente mit einander in Verbindung setzen, oder, was dasselbe ist, die Substitutionen (3) müssen eine transitive Gruppe erzeugen. Sodann bemerke man, dass nicht zugleich

$$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots \left(a_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}}\right)$$

und ein Theil der Transpositionen $t_1, \ldots, t_\mu$ nur die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$, ein anderer Theil nur die Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{n}{2}}$ in Verbindung setzen darf. Denn sonst würden auch

$$t_1, \ldots, t_\mu, U t_1 U, \ldots, U t_\mu U$$

nur die Elemente a unter sich und die Elemente b unter sich verbinden. Man erkennt nun ohne Schwierigkeit, dass diese für das System (3) nothwendigen Bedingungen auch hinreichen. Mit andern Worten:

„Die sich selbst conjugirten Flächen F sind einzeln zugeordnet den Systemen (3), welche alle Elemente in Verbindung setzen (oder eine transitive Gruppe erzeugen) und den Gleichungen

(7) $$U^2 = 1, \; TU = UT, \quad \text{wobei} \quad T = t_1 t_2 \dots t_\mu$$

gesetzt ist, genügen."

Auszuschliessen sind dabei (im Falle eines geraden n) diejenigen Systeme, für welche

$$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots \left(a_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}}\right) \quad \text{und} \quad t_1, t_2, \dots, t_\mu$$

nur die Elemente a unter sich und die Elemente b unter sich verbinden.*) Uebrigens sind natürlich wieder in einander transformirbare Systeme (3) als nicht verschieden anzusehen.

Der allgemeine Ausdruck einer Substitution U, welche der Bedingung $U^2 = 1$ genügt, ist offenbar dieser:

(8) $$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_r b_r)(c_1)(c_2) \dots (c_s),$$

wo $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$ die n Elemente in irgend einer Reihenfolge bezeichnen. Dabei sind r und s irgend zwei nicht negative Zahlen, welche die Gleichung

$$s + 2r = n$$

befriedigen. Für den Fall $r = 0$ reducirt sich U auf die Identität.

Es mögen jetzt α_i und β_i die beiden Elemente a_i und b_i in einer der beiden möglichen Reihenfolgen bedeuten, so dass also entweder $\alpha_i = a_i$ und $\beta_i = b_i$ oder $\alpha_i = b_i$ und $\beta_i = a_i$ ist. Dann wird.

(9) $$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_r & b_r \\ \alpha_{i_1} & \beta_{i_1} & \alpha_{i_2} & \beta_{i_2} & \dots & \alpha_{i_r} & \beta_{i_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \dots, & c_s \\ c_{k_1}, & c_{k_2}, & \dots, & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

die allgemeinste mit U vertauschbare Substitution vorstellen, wobei $i_1, i_2, \dots, i_r$ und $k_1, k_2, \dots, k_s$ die Indices $1, 2. \dots, r$ bez. $1, 2, \dots, s$ in irgend einer Reihenfolge bezeichnen.

Diejenigen sich selbst conjugirten Flächen, für welche U und T dieselben Substitutionen sind, wollen wir in eine Classe $[U, T]$ rechnen. Jede der Classe $[U, T]$ angehörende Fläche besitzt so viele Uebergangslinien, als die Substitution

$$\begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \dots, & c_s \\ c_{k_1}, & c_{k_2}, & \dots, & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

Cyklen hat. Denn die Punkte auf der Axe der reellen Zahlen, welche in den Blättern $c_1, c_2, \dots, c_s$ liegen, bleiben bei der symmetrischen

*) Dies ist nämlich der *einzige* Fall, in welchem die durch $t_1, t_2, \dots, t_{\mu-1} U$ erzeugte Gruppe transitiv, dagegen die durch $t_1, t_2, \dots, t_\mu, U t_1 U, \dots, U t_\mu U$ erzeugte Gruppe intransitiv ist.

Umformung der Fläche fest und bei einer Ueberschreitung des Punktes O, von welchem die Linien $l_1, \ldots, l_w, \ldots, \bar{l}_1$ ausgehen, erfahren die Blätter der Fläche gerade die Substitution $t_1 t_2 \ldots t_\mu = T$.

Die Anzahl der Flächen, welche der Classe $[U, T]$ angehören, finden wir, indem wir die Zahl der Lösungen von

$$(10) \qquad t_1 . t_2 \ldots t_\mu = T$$

bestimmen, dabei jedoch nur diejenigen Lösungen $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ zählen, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen. Die Bestimmung dieser Zahl lässt sich durch ähnliche Betrachtungen ausführen, wie wir sie in Abschnitt I angestellt haben. Ich habe indessen nur den Fall

$$w = 2\mu = 2n - 2,$$

in welchem es sich also um Flächen vom Geschlecht Null handelt, näher untersucht und will hier die erhaltenen Resultate mittheilen.

§ 3.

Flächen vom Geschlecht Null.

Betrachten wir in den n Blättern einer Riemann'schen Fläche die Axen der reellen Zahlen, so werden sich dieselben auf der Fläche zu einer oder mehreren geschlossenen Linien zusammensetzen. Diese Linien will ich „Realitätslinien“ nennen. Dieselben können einander oder sich selber nur in Verzweigungspunkten begegnen. Wenn keiner der Verzweigungspunkte reell ist, so setzt sich die einzelne Realitätslinie aus den Axen gewisser Blätter zusammen, jede Axe in ihrer ganzen Ausdehnung genommen. Die Anzahl dieser Axen möge dann die Multiplicität der Realitätslinie heissen. Die Multiplicität giebt offenbar an, wie oft sich der einzelne reelle Werth auf der Realitätslinie vorfindet.

Auf einer sich selbst conjugirten Fläche gehören die Uebergangslinien zu den Realitätslinien. Diejenigen Realitätslinien, welche nicht zugleich Uebergangslinien sind, werden entweder sich selbst symmetrisch oder paarweise zu einander symmetrisch sein.

Betrachten wir jetzt eine sich selbst conjugirte Fläche vom Geschlechte Null, deren $w = 2\mu$ Verzweigungswerthe paarweise conjugirt imaginär sind, so sind nur folgende Möglichkeiten vorhanden:

1) Es ist eine Uebergangslinie vorhanden, welche als Realitätslinie die Multiplicität s besitzt. Ferner giebt es je $2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_3, \ldots$ paarweise symmetrische Realitätslinien von den bez. Multiplicitäten $1, 2, 3, \ldots$.

Die Fläche möge in diesem Falle vom „Charakter“

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$$

heissen. Die „Charaktere" $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, können irgend welche ganzzahlige Werthe besitzen, die nicht negativ sind und der Gleichung

$$s + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots) = n$$

genügen.

2) Es ist keine Uebergangslinie vorhanden; dagegen giebt es eine sich selbst symmetrische Realitätslinie von der Multiplicität 2ϱ, ferner je $2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_3, \ldots$ paarweise symmetrische Realitätslinien von den bez. Multiplicitäten $1, 2, 3, \ldots$.

Die Fläche möge in diesem Falle vom „Charakter"

$$(\varrho;\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$$

heissen. Die „Charaktere" $\varrho, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ können irgend welche ganzzahlige Werthe besitzen, die nicht negativ sind und der Gleichung

$$2\varrho + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots) = n$$

genügen. Für die Zahl ϱ ist der Werth Null ausgeschlossen. Die oben erwähnten auf Anzahlen bezüglichen Resultate fasse ich nun in folgendem Satze zusammen:

Unter den n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen paarweise conjugirten Verzweigungswerthen giebt es

$$(n-1)!\ (r+s)^{\lambda-2} \cdot \frac{s^s}{s!} \cdot \prod_k \frac{1}{\mu_k!} \left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sich selbst conjugirte Flächen vom Charakter $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$.

Dabei ist zur Abkürzung

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots = \lambda,$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots = r,$$

gesetzt, und es besteht ferner die Gleichung

$$s + 2r = n.$$

Ferner giebt es (falls n eine gerade Zahl ist) unter jenen Flächen

$$(n-1)!\ (r+\varrho)^{\lambda-2} \cdot \frac{(2\varrho)^{2\varrho}}{(2\varrho)!} \prod_k \frac{1}{\mu_k!} \left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sich selbst conjugirte Flächen vom Charakter $(\varrho;\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, *wobei zur Abkürzung*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots = \lambda,$$
$$\varrho + \mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots = r = \frac{n}{2}$$

gesetzt ist.

IV. Abschnitt.

Analytische Bestimmung der drei- und vierblättrigen Flächen.

In den Fällen $n=3$ und $n=4$ gelingt es, wie Herr Thomae gezeigt hat*), mit Hülfe von ϑ-Functionen solche n-werthige algebraische Functionen herzustellen, deren w Verzweigungswerthe gegeben sind. Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w Verzweigungspunkten beträgt nun (vgl. I, § 5) in den Fällen $n=3$ und $n=4$ bez.

$$N=\frac{3^{w-2}-1}{2} \quad \text{und} \quad N=(2^{w-4}-1)\cdot\frac{3^{w-2}-1}{2}$$

und ebensoviele wesentlich verschiedene algebraische Functionen müssen in diesen Fällen (nach den Riemann'schen Existenztheoremen)**) existiren.

Es erschien mir nun interessant, zu untersuchen, ob man, Herrn Thomae's Ideengang folgend, die richtige Anzahl N von Functionen erhält.

Dass dies in der That der Fall ist, will ich im Folgenden zeigen. Dabei werde ich das Verfahren des Herrn Thomae in einer für den vorliegenden Zweck geeigneten Weise darstellen.

§ 1.

Beziehung einer n-blättrigen Fläche auf eine zweiblättrige.

Gegeben sei eine n-blättrige Riemann'sche Fläche F vom Geschlecht p mit

$$w=2p+2n-2$$

Verzweigungspunkten. Indem wir, wie früher, von einem Punkte O aus die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ nach den Verzweigungspunkten legen, bezeichnen wir die Fläche durch die diesen Linien entsprechenden Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$, setzen also

$$F=(t_1, t_2, \ldots, t_w).$$

Machen wir die hypothetische Annahme, dass eine wie diese Fläche verzweigte algebraische Function y existirt, so werden die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dieser Function, welche in übereinander liegenden Punkten der n Blätter Statt finden, gerade die Transposition t_i erfahren, wenn wir den i^{ten} Verzweigungspunkt umkreisen.

Wir legen jetzt unter die Fläche F eine zweiblättrige (also hyperelliptische) Fläche F' mit denselben w Verzweigungspunkten. Bedeutet t die eine bei zwei Elementen mögliche Transposition, so wird die Fläche F' durch

---

*) Mathematische Annalen Bd. 6, pag. 612 und Bd. 18, pag. 443.

**) Diese Theoreme, welche ich im Folgenden nicht voraussetzen werde, sind bekanntlich von den Herren Neumann und Schwarz bewiesen worden.

$$F' = (t, \ldots, t)$$

zu bezeichnen sein. Es ist unmittelbar klar, dass Functionen existiren, welche wie F' verzweigt sind; eine solche Function ist ja z. B.

$$y = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_w)},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_w$ die Verzweigungswerthe bedeuten.

Wir verpflanzen jetzt an irgend eine Stelle der Fläche F' die über derselben auf der Fläche F liegenden Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und setzen diese, indem wir die Stelle auf der Fläche F' sich in Bewegung setzen lassen, stetig über die Fläche F' fort.

Umkreisen wir auf der Fläche F' einen beliebig gewählten Punkt, so gehen die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einzeln in sich über. Dies ist ohne Weiteres deutlich, wenn jener Punkt kein Verzweigungspunkt ist. Wenn aber der Punkt ein Verzweigungspunkt sein sollte, so erfordert seine Umkreisung auf der Fläche F' eine doppelte Umkreisung in der x-Ebene, und daher werden auch in diesem Falle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sich einzeln reproduciren. Diese Thatsache kann dahin ausgesprochen werden:

Eine wie die Fläche F verzweigte algebraische Function y ist auf der hyperelliptischen Fläche F' zwar mehrwerthig (nämlich n-werthig), aber unverzweigt.

Zerschneiden wir die Fläche F' in eine einfach zusammenhängende und setzen auf dieser einen der n Werthe von y, von irgend einer Stelle ausgehend, stetig fort, so erhalten wir einen eindeutigen Zweig der Function y.

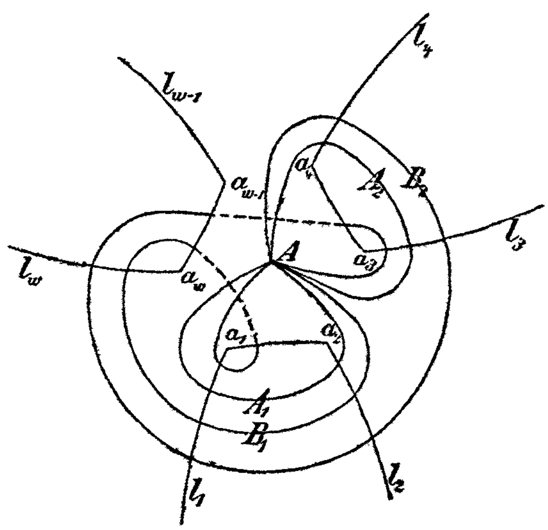

Fig. 9.

Die n Zweige der Function y erfahren dann beim Ueberschreiten einer Schnittlinie eine bestimmte Vertauschung. Man erhält eine Fläche auf welcher y einwerthig ist, wenn man n Exemplare der zerschnittenen Fläche F' übereinanderdeckt und dieselben längs jeder Begrenzungslinie der zugehörigen Vertauschung entsprechend verbindet.

Diese Vertauschungen sollen jetzt unter Annahme einer bestimmten Zerschneidung der Fläche F' bestimmt werden.*) Die geschlossene Linie L werde wie früher durch die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ so gelegt, dass die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ ganz in dem einen Theile G der Ebene verlaufen, welcher von L begrenzt

*) Vgl. für das Nachfolgende die Figur 9.

wird. Die beiden Blätter der Fläche F' mögen längs der Stücke $a_1 a_2, a_3 a_4, \ldots, a_{w-1} a_w$ der Linie L zusammenhängen. Wir nehmen nun in dem Theile G' der Ebene einen Punkt A an und lassen in diesem Punkte die Schnitte beginnen und endigen. Jeder Uebergangslinie

$$a_{2i-1}\, a_{2i} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \mu = \frac{w}{2} - 1\right)$$

entsprechend führen wir zwei Schnitte A_i, B_i. Der Schnitt A_i verläuft ganz im oberen Blatte und umkreist die Punkte $a_{2i-1} a_{2i}$. Der Schnitt B_i beginnt im oberen Blatte, führt, um den Punkt a_{2i-1} laufend, in's untere Blatt, läuft in diesem bis zur Uebergangslinie $a_{w-1} a_w$, tritt sodann wieder in's obere Blatt, in welchem derselbe, die Linien $l_w, l_1, l_2, \ldots, l_{2i}$ überschreitend, wieder in A mündet.

Nach Ausführung dieser Schnitte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\mu, B_\mu \qquad \left(\mu = \frac{w}{2} - 1\right)$$

ist die Fläche F' in eine einfach zusammenhängende übergegangen.

Der Schnitt B_i führt von der positiven auf die negative Seite von A_i, der Schnitt A_i von der negativen auf die positive Seite von B_i. Umkreist man im oberen Blatte den Punkt A in positivem Sinne, so überschreitet man die Schnitte in folgender Reihenfolge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \; A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- \ldots A_\mu^+ B_\mu^+ A_\mu^- B_\mu^- ;$$

dabei bedeuten die oberen Indices $+$ und $-$, dass das Ueberschreiten von der negativen auf die positive bez. von der positiven auf die negative Seite erfolgt.

Wir betrachten jetzt auf der zerschnittenen Fläche F' die n Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Function y, von welchen jeder einzelne eindeutig über die zerschnittene Fläche ausgebreitet ist. Bedeuten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die auf der negativen Seite einer der Linien A_i, B_i in einem Punkte P stattfindenden Werthe der n Zweige von y, ferner $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ die auf der positiven Seite in demselben Punkte P der betreffenden Linie stattfindenden Werthe, so unterscheiden sich $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ nur in der Reihenfolge von $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Beim Ueberschreiten jener Linie von der negativen zur positiven Seite erfahren also die Zweige die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix},$$

d. h. man gelangt von dem Zweige y_k' in den Zweig $y_k (k = 1, 2, \ldots, n)$. Da die Linie A_i von der negativen auf die positive Seite der Linie B_i führt, so erhalten wir die B_i entsprechende Substitution S, indem wir feststellen, welche Vertauschung $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nach Durchlaufung der Linie A_i erfahren haben.

Ebenso bestimmen wir die A_i entsprechende Substitution, indem wir feststellen, wie sich $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bei Durchlaufung der Linie B_i vertauschen.

Auf diese Weise finden wir die folgenden, den Linien $A_1, B_1, \ldots, A_\mu, B_\mu$ entsprechenden Substitutionen:

Wir bilden aus den Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$ die folgenden Substitutionen:

$$\begin{array}{lll}
S_1 &= t_1 t_2 \ldots t_{w-1} &= t_w, \\
S_2 &= t_2 \ldots t_{w-1} &= t_1 t_w, \\
S_3 &= t_3 \ldots t_{w-1} &= t_2 t_1 t_w, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
S_{w-1} &= t_{w-1} &= t_{w-2} \ldots t_2 t_1 t_w.
\end{array}$$

Beim Uebertritt von der negativen zur positiven Seite erfahren dann die n Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{array}{ll}
\textit{längs } A_i \textit{ die Substitution } & S_{2i-1}^{-1} \,.\, S_{2i+1}^{-1} \,.\, S_{2i} = U_i, \\
\textit{längs } B_i \textit{ die Substitution } & S_{2i+1}^{-1} \,.\, S_{2i-1} \qquad = V_i.
\end{array}$$

Man erhärtet leicht die Relation

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_\mu V_\mu U_\mu^{-1} V_\mu^{-1} = 1,$$

welche nichts anderes besagt, als dass bei einer positiven Umkreisung des Punktes A jeder Zweig in sich übergeht.

Die Substitutionen U_i und V_i lassen sich in die Gestalt

$$U_i = S_{2i-1}^{-1} (t_w t_1 t_2 \ldots t_{2i} t_{2i-1}) S_{2i-1}, \qquad V_i = S_{2i+1}^{-1} (t_{2i-1} t_{2i}) S_{2i+1}$$

bringen, woraus erhellt, dass die erstere einem Producte von $2i+2$, die letztere einem Producte von zwei Transpositionen ähnlich ist.

Die Gruppe, welche die Substitutionen U_i, V_i erzeugen, also die Monodromiegruppe von y auf der Fläche F', ist daher in der alternirenden Gruppe enthalten. Man kann aber leicht zeigen, dass sie mit der alternirenden Gruppe identisch ist. In der That können die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ nach dem Satze von Lüroth immer so gewählt werden, dass

$$t_w = (y_1 y_2), \quad t_1 = (y_1 y_2), \quad t_2 = (y_1 y_3),$$
$$t_3 = (y_1 y_3), \ \ldots, \ t_{2n-6} = (y_1 y_n), \quad t_{2n-5} = (y_1 y_{n-1})$$

und alle folgenden Transpositionen t gleich $(y_1 y_n)$ werden. Bei dieser Wahl der Linien l finden wir aber

$$(1) \quad \begin{cases} U_1 = (y_1 y_2 y_3), & U_2 = (y_1 y_3 y_4), \ \ldots, \ U_{n-2} = (y_1 y_{n-1} y_n), \\ V_1 = (y_1 y_3 y_2), & V_2 = (y_1 y_4 y_3), \ \ldots, \ V_{n-2} = (y_1 y_n y_{n-1}), \end{cases}$$

während alle übrigen Substitutionen U_i, V_i sich auf die Identität reduciren. Die Substitutionen (1) erzeugen aber, wie leicht zu sehen, die alternirende Gruppe, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung folgt.

Man kann diese Betrachtungen in etwas abändern, indem man die Fläche F' von vornherein als diejenige Fläche einführt, welche die Verzweigung des Differenzenproductes $\prod_{i \gtrless k} (y_i - y_k)$ darstellt. Auch bemerkt man, dass die hypothetische Annahme einer Function y, welche wie F verzweigt ist, hätte vermieden werden können, indem die Sätze dieses Paragraphen im Grunde nur rein topologische Beziehungen der Flächen F und F' aussprechen.

§ 2.

Der Fall $n = 3$.

Wenn jetzt die Fläche F als eine dreiblättrige, also $n = 3$ vorausgesetzt wird, so sind die Substitutionen U_i, V_i sämmtlich Potenzen der cyklischen Substitution

$$S = (y_1 y_2 y_3).$$

Daher ist der Lagrange'sche Ausdruck

$$z = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3, \tag{1}$$

wo α eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bedeutet, eine auf der Fläche F' unverzweigte Function, welche beim Ueberschreiten einer der Linien A_i, B_i einen Factor α^k ($k = 0, 1, 2$) erhält. Die Function z ist also eine Wurzelfunction dritten Grades auf der Fläche F'. Diese Functionen lassen sich aber bekanntlich durch Integrale dritter Gattung oder auch durch ϑ-Functionen darstellen*). Wir versuchen die Darstellung für den Fall, in welchem y auf der Fläche F in $p + 1$ Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ einfach unendlich wird. Die Summe $y_1 + y_2 + y_3$ ist dann eine rationale Function von x, welche nur für $x = a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ und zwar höchstens von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich werden kann und sich daher auf eine Constante reducirt. Indem wir y um eine geeignete Constante vermehren, erreichen wir, dass

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \tag{2}$$

wird. Das Geschlecht μ der zweiblättrigen Fläche F' ist

$$\mu = \frac{w}{2} - 1 = p + 1.$$

Es mögen nun

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu$$

*) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 25 und 26.

die nach Riemann's Vorschrift bestimmten Normalintegrale erster Gattung der Fläche F' bezeichnen, wobei wir die oben angegebene Zerschneidung der Fläche F' zu Grunde legen. Ferner seien

$$u_\nu^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, p+1)$$

die Werthe des Integrales u_ν in den Verzweigungspunkten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p+1};$$

und endlich sei

$$(3) \qquad e_\nu = \sum_k u_\nu^{(k)}.$$

Die Wurzelfunction (1) drückt sich dann als ϑ-Quotient in der Gestalt aus:

$$(4) \quad y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo c eine Constante und $g_1, \ldots, g_\mu, h_1, \ldots, h_\mu$ Drittel ganzer Zahlen bedeuten.

Auf einem geeigneten Wege, welcher von einer Stelle der Fläche zu der entsprechenden Stelle des anderen Blattes führt, werden sich y_2 und y_3 vertauschen. Gehen dabei gleichzeitig $u_1, \ldots, u_\mu$ in $u_1', \ldots, u_\mu'$ über, so erhalten wir aus (4):

$$(5) \quad y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu' - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu' - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu' - e_\nu)}.$$

Nun ist bekanntlich

$$(6) \quad u_\nu + u_\nu' \equiv 2u_\nu^{(1)} \equiv 2u_\nu^{(2)} \cdots \equiv 2u_\nu^{(p+1)} \equiv 2u_\nu^{(p+2)}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$$

wo sich das Congruenzzeichen auf die Perioden der Integrale bezieht und $u_\nu^{(p+2)}$ den Werth von u_ν in dem Verzweigungspunkt a_{p+2} bedeutet. Ferner können wir

$$(7) \qquad e_\nu = \sum_{k=1}^{p+1} u_\nu^{(k)} \equiv u_\nu^{(p+2)}$$

annehmen*). Aus (6) und (7) folgt:

$$(8) \quad u_\nu' - e_\nu \equiv -(u_\nu - e_\nu) - 2(e_\nu - u_\nu^{(p+2)}) \equiv -(u_\nu - e_\nu).$$

Und somit geht die Gleichung (5), da ϑ eine gerade Function ist, über in:

---

*) Vgl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig 1884) pag. 367.

$$(9)\quad y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3 = c \cdot \alpha' \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu + g_\nu \pi i + \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo α' eine dritte Einheitswurzel bezeichnet.

Aus den Gleichungen (2), (4) und (9) erhalten wir nun y_1, y_2, y_3 und zwar kommt, indem wir eine geeignet gewählte unter diesen Grössen mit y bezeichnen:

$$(10)\qquad y = c\left[\frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (\ \ _\nu - e_\nu)}\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu + g_\nu \pi i + \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)}\right].$$

Der Ausdruck (10), welchen wir für y gefunden haben, erfüllt nun aber auch, wie man sofort übersieht, alle erforderlichen Bedingungen: er stellt eine dreiwerthige algebraische Function von x dar, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu einfachen Verzweigungspunkten besitzt.

Die Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\mu, h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ können alle Werthe der Gestalt

$$g_1 = \frac{\varepsilon_1}{3},\quad g_2 = \frac{\varepsilon_2}{3},\ \ldots,\ g_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{3},\quad h_1 = \frac{\eta_1}{3},\quad h_2 = \frac{\eta_2}{3},\ \ldots,\ h_\mu = \frac{\eta_\mu}{3},$$

erhalten, wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\mu, \eta_1, \ldots, \eta_\mu$ ganze nicht sämmtlich verschwindende Zahlen bedeuten. Da aber der Ausdruck (10) unverändert bleibt, wenn wir das System (g, h) durch $(-g, -h)$ ersetzen, und sich nur um einen constanten Factor ändert, wenn eine der Zahlen g, h um eine Einheit wächst oder abnimmt, so erhalten wir genau

$$\frac{3^{2\mu} - 1}{2} = \frac{3^{w-2} - 1}{2}$$

verschiedene Functionen y, also in der That gerade so viele, als es nach I., § 5 verschiedene dreiblättrige Flächen mit w Verzweigungspunkten giebt.

§ 3.

Der Fall $n = 4$.

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 4$. Es ist die Aufgabe, eine algebraische Function y zu bestimmen, welche wie eine gegebene vierblättrige Fläche F mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt ist. Wir werden wieder annehmen, dass die zu bestimmende Function y in den Punkten

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{p+1}\ \left(p = \frac{w}{2} - 3\right)$$

von der ersten Ordnung unendlich wird. Bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3, y_4 die Werthe, welche y in vier übereinanderliegenden Punkten der Fläche F annimmt, so erfahren die Quadrate der Grössen

$$(1)\qquad \begin{cases} z = z_1 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ \quad\ \ z_2 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ \quad\ \ z_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{cases}$$

bei einem Umlauf um einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ eine Permutation, welche in einer Vertauschung zweier jener Quadrate besteht. Daher ist z^2 wie eine dreiblättrige Fläche F'' mit den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt und z selber ist auf der Fläche F'' eine Wurzelfunction zweiten Grades, welche in den $p+1$ Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Das Geschlecht γ der Fläche F'' ist gleich $p+1$. Bedeuten $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ Normalintegrale erster Gattung der Fläche F'', so kommt bei geeigneter Bestimmung der Constanten $e_1, e_2, \ldots, e_\gamma$:

$$(2)\qquad z = z_1 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum\limits_1^\gamma h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum\limits_1^\gamma h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo c eine Constante und $g_1, \ldots, g_\gamma$, $h_1, \ldots, h_\gamma$ Hälften ganzer Zahlen bezeichnen. Zur Abkürzung werde die rechte Seite von (2) gleich $\psi(u_\nu)$ gesetzt, ferner seien $u_1, \ldots, u_\gamma$, $u_1', \ldots, u_\gamma'$, $u_1'', \ldots, u_\gamma''$ die Werthe der Integrale erster Gattung in übereinanderliegenden Punkten der Fläche F''. Dann ergiebt sich, unter Wiederholung der Gleichung (2):

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 = \psi(u_\nu), \\ z_2 = \psi(u_\nu'), \\ z_3 = \psi(u_\nu''). \end{cases}$$

Da nun $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ eine Constante ist, welche wir gleich Null annehmen dürfen, so folgt endlich in Rücksicht auf (1):

$$(4)\qquad y = y_1 = \frac{1}{4}\left(\psi(u_\nu) + \psi(u_\nu') + \psi(u_\nu'')\right).$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser für y gefundene Ausdruck allen Bedingungen genügt; d. h. nehmen wir irgend eine an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigte dreiblättrige Fläche F'' an und construiren auf ihr die Function $\frac{1}{4}[\psi(u_\nu) + \psi(u_\nu') + \psi(u_\nu'')]$, so wird dieselbe eine algebraische vierwerthige Function sein, welche an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigt ist. Die Anzahl dieser Functionen können wir nun leicht abzählen. Die Zahl der dreiblättrigen Flächen, welche wir für F'' annehmen können, beträgt

$$\frac{3^{w-2}-1}{2}.$$

Ferner gestatten die in $\psi(u_\nu)$ auftretenden Hälften ganzer Zahlen $g_1, \ldots, g_\gamma, h_1, \ldots, h_\gamma$ $2^{2\gamma}-1=2^{w-4}-1$ wesentlich verschiedene Bestimmungen. Wir erhalten also für die gesuchte Anzahl den Werth

$$\frac{(2^{w-4}-1)(3^{w-2}-1)}{2},$$

welcher mit der früher (I, § 5) bestimmten Zahl der vierblättrigen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten übereinstimmt.

§ 4

Anschliessende Bemerkungen.

Die vorstehenden Betrachtungen verdanken ihren Erfolg offenbar denselben Thatsachen, welche die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichungen 3. und 4. Grades ermöglichen. Aehnliche Betrachtungen lassen sich für diejenigen n-blättrigen Flächen anstellen, deren Monodromiegruppen besondere Eigenschaften besitzen, worauf wir indessen nicht näher eingehen wollen. Es mag nur noch ein anderer Umstand hervorgehoben werden, welcher aus den obigen Entwicklungen hervorgeht. Es ist dieses der Zusammenhang des Problemes, die 3- und 4-blättrigen Flächen mit gegebenen einfachen Verzweigungspunkten zu bestimmen, mit der Drei-Theilung der hyperelliptischen Functionen. Dieser Zusammenhang ist in einem speciellen Falle auch schon in der Literatur hervorgetreten. Handelt es sich um die Aufgabe, die Büschel binärer Formen 4. Grades zu bestimmen, deren Discriminante eine gegebene Function (vom 6ten Grade in dem Parameter des Büschels) ist, so kommt dies offenbar auf die Bestimmung der 4-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen Verzweigungspunkten hinaus. Nun lässt sich jene Aufgabe, wie Hilbert (l. c.) gezeigt hat, auf ein von Clebsch behandeltes Problem*) zurückführen. Das letztere verlangt eine binäre Form 6. Grades in die Gestalt v^3-u^2 zu setzen, wo v und u Formen 3. und 2. Grades bedeuten. C. Jordan bemerkte nun, dass die Gruppeneigenschaften dieses Problemes genau mit denjenigen übereinstimmen, welche das Problem der Drei-Theilung der hyperelliptischen Functionen

*) Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. Mathem. Annalen Bd. 2, pag. 193. Vgl. auch Burkhardt: „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein." Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 255.

($p = 2$) besitzt. Clebsch zeigte sodann auch direct den inneren Zusammenhang beider Probleme. Die erwähnten Gruppeneigenschaften lassen sich übrigens, wie wir noch bemerken wollen, auf Grund der allgemeinen Sätze des zweiten Theiles vorliegender Arbeit herleiten.

V. Abschnitt.

Flächen, welche über einer gegebenen Fläche ausgebreitet sind.

§ 1.

Einführung und Vergleich von Flächen F, welche über einer festen Fläche Φ ausgebreitet sind.

Die complexe Zahlenebene lässt sich als die einfachste Riemann'sche Fläche vom Geschlecht Null ansehen. Von diesem Gesichtspunkte aus bietet sich sofort eine Verallgemeinerung des Problemes, welches allen vorstehenden Entwicklungen zu Grunde liegt. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass wir nicht mehr nach den Flächen fragen, welche über der complexen Zahlenebene, sondern nach denjenigen, welche über einer gegebenen Riemann'schen Fläche ausgebreitet sind*). Die letztere werde ich in der Folge stets mit Φ bezeichnen, ihr Geschlecht mit p. Die fest gegebene Fläche Φ kann man sich entweder mehrblättrig über einer complexen Zahlenebene ausgebreitet denken, oder auch als eine frei im Raume liegende geschlossene Ringfläche mit p Löchern. Man kann noch weiter gehen und die Fläche Φ in Gestalt irgend einer zweidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit von $(2p+1)$-fachen Zusammenhange annehmen**). Die Vorstellung der Ringfläche ist besonders bequem für solche Betrachtungen, welche der Analysis situs angehören.

Ich gehe nun dazu über die oben erwähnte Verallgemeinerung unseres Problemes näher zu entwickeln. Wir zerschneiden die Fläche Φ durch die Riemann'schen Schnitte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$$

in eine einfach zusammenhängende Fläche. Diese Schnitte lassen wir sämmtlich in ein und demselben Punkte O der Fläche beginnen und endigen. Deuten wir durch die Indices $+$ und $-$ ein Ueberschreiten von der negativen auf die positive bez. von der positiven auf die negative Seite einer Linie an, so sollen die Schnitte bei einem positiven Umlauf um den Punkt O in der Folge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

*) Vgl. W. Dyck's in der Einleitung citirte Abhandlungen.

**) F. Klein: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie". Diese Annalen Bd. 21, pag. 141.

überschritten werden. Es ist dieses dieselbe Wahl der Schnitte, welche oben (IV, § 1) bei der hyperelliptischen Fläche F' in Anwendung kam.

Auf der Fläche Φ seien nun w Punkte

$$a_1, a_2, \ldots, a_w \tag{1}$$

gegeben. Wir nehmen an, der Punkt O sei so gewählt, dass er mit keinem dieser w Punkte zusammenfällt und wir verbinden O mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ durch Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_w$, welche weder einander noch einem der Schnitte A_i, B_i begegnen. Bei einer positiven Umkreisung des Punktes O mögen die Schnitte in der Folge

$$l_1^+ l_2^+ \ldots l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^- \tag{2}$$

überschritten werden. Die Fläche Φ sei nach Ausführung aller Schnitte in die Fläche Φ^* übergegangen. Die Fläche Φ^* ist einfach zusammenhängend, ihre Begrenzung wird von den Ufern der Schnitte l, A, B gebildet.

Wir nehmen nun n in einander liegende Exemplare der Fläche Φ^* an, welche wir in irgend einer Reihenfolge als erstes, zweites, ... n^{tes} Blatt bezeichnen.

Ferner ordnen wir den Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p \tag{3}$$

je eine auf n Elemente bezügliche Substitution

$$S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p \tag{4}$$

zu und verbinden endlich die n Exemplare Φ^* längs der Linien (3) derart dass die n Blätter beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite einer der Linien (3) gerade die dieser Linie entsprechende Substitution (3) erfahren. Die auf diese Weise verbundenen Blätter Φ^* bilden eine n-fach über der Fläche Φ ausgebreitete Fläche, welche wir mit

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix} \tag{5}$$

bezeichnen. Damit diese Fläche in sich geschlossen sei (aus einem Stücke bestehe) legen wir den Substitutionen (4) die Bedingung auf, eine transitive Gruppe zu erzeugen, welch' letztere die Monodromiegruppe von F in Rücksicht auf Φ heisst. Damit ferner nur die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ nicht aber der Punkt O Verzweigungspunkte von F werden, beschränken wir die Wahl der Substitutionen (4) weiter durch die Festsetzung, dass

$$S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1 \tag{6}$$

sein soll.

Ziehen wir auf der Fläche Φ von einem Punkte A aus, welcher von $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verschieden ist, irgend eine nach A zurückkehrende und die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ vermeidende Linie L, so werden nach Durchlaufung dieser Linie die Blätter von F eine gewisse Substitution S erfahren haben. (Die Gesammtheit der Substitutionen S bildet die oben erwähnte Monodromiegruppe von F.) Aendern wir nun, unter Festhaltung der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$, den Punkt O, die durch ihn laufenden Linien (3) und die Substitutionen (4), und sei F' die zu den abgeänderten Elementen gehörige Fläche. Wir erachten dann die Flächen F und F' als nicht von einander verschieden, wenn jeder in A beginnenden und endigenden Linie L rücksichtlich F dieselbe Substitution S entspricht, wie rücksichtlich F', oder wenn doch dieser Umstand durch eine zweckmässige Abänderung der Numerirung der Blätter von F erreicht werden kann.

Diese Definition ist, wie man leicht sieht, von der Wahl des Punktes A unabhängig.

§ 2.

Berechnung des Geschlechts der Flächen F.

Betrachten wir die im vorigen Paragraphen erklärte Fläche F, so legen wir jedem ihrer Verzweigungspunkte, z. B. dem Punkte a_i, wie üblich eine bestimmte Multiplicität bei. Wenn nämlich c_i die Zahl der Cyklen der Substitution S_i bedeutet, so heisst der Verzweigungspunkt a_i von der Multiplicität $n - c_i$. Auf der Fläche F findet sich der Punkt a_i dann c_i-mal wieder, während jeder andere Punkt von Φ auf der Fläche F genau n-mal erscheint.

Die Anzahl

$$W = \sum_{i=1}^{w} (n - c_i) \tag{1}$$

heisst die Zahl der einfachen Verzweigungen der Fläche F.

Ihrer Entstehung gemäss trägt die Fläche F eine Eintheilung in

$$f = n$$

einfach zusammenhängende Gebiete, von denen jedes einzelne ein Exemplar der Fläche Φ^* ist. Die Ecken dieser Gebietseintheilung werden von den Punkten a_i und den Punkten O gebildet, ihre Anzahl beträgt also

$$e = \sum c_i + n.$$

Die Anzahl der Kanten der Gebietseintheilung findet man leicht gleich

$$k = n \cdot w + 2pn.$$

Nun ist nach dem verallgemeinerten Euler'schen Satze

$$e + f = k + 2 - 2P,$$

wo P das Geschlecht der Fläche F bedeutet. Berechnen wir aus den vorstehenden Gleichungen P, so erhalten wir das Resultat:

„*Das Geschlecht P der Fläche F besitzt den Werth*:

$$P = \frac{1}{2} W + n(p - 1) + 1, \tag{2}$$

wo W die Zahl der einfachen Verzweigungen, n die Blätterzahl von F und p das Geschlecht der Fläche Φ bedeutet.“

§ 3.

Das verallgemeinerte Problem und seine Monodromiegruppe.

Das verallgemeinerte Problem lautet nun so:

Gegeben sind eine Riemann'sche Fläche Φ und auf derselben w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Man soll diejenigen Riemann'schen Flächen bestimmen, welche n-blättrig über der Fläche Φ ausgebreitet und an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt sind.

Die zu bestimmenden Flächen sind nach dem Vorhergehenden einzeln zugeordnet den Systemen von $w + 2p$ Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w, \quad U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p, \tag{1}$$

welche mit n Elementen gebildet sind und folgenden Bedingungen genügen:

1) Die von den Substitutionen (1) erzeugte Gruppe ist transitiv.

2) Die Substitutionen befriedigen die Gleichung

$$S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1. \tag{2}$$

Dabei sind zwei Systeme (1) als nicht verschieden zu erachten, wenn das eine durch Transformation (Umnumerirung der n Elemente) aus dem anderen abgeleitet werden kann.

Ist das Geschlecht p der Fläche Φ gleich Null, so kommen wir auf unser früheres Problem zurück.

Um die Monodromiegruppe des verallgemeinerten Problemes zu erhalten, denke man sich die $3p - 3$*) Moduln der Fläche Φ und zugleich die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ von irgend einer Anfangslage aus stetig in Bewegung gesetzt und in die Anfangslage zurückgeführt. In jedem Stadium der Bewegung müssen jedoch die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ von einander getrennt und die Fläche Φ irreducibel bleiben. Verfolgen wir während der Bewegung die Aenderung der Flächen F, so werden die letzteren nur eine Vertauschung erfahren haben, wenn die Anfangslage wieder erreicht ist. Die Gesammtheit dieser Vertauschungen

*) Diese Zahl ist bekanntlich für $p = 0$ durch 0 und für $p = 1$ durch 1 zu ersetzen.

bildet die in Rede stehende Monodromiegruppe. Nun werden bei der Bewegung für eine bestimmte Fläche F sich nur die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$, $A_1, \ldots, B_p$ nach und nach ändern, nicht aber die zugehörigen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, $U_1, \ldots, V_p$. Also folgt:

Eine Substitution der Monodromiegruppe unseres Problemes ersetzt die Fläche

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$F' = \begin{pmatrix} l_1', & l_2', & \ldots, & l_w', & A_1', & B_1', & \ldots, & A_p', & B_p' \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

wo l', A', B' irgend ein denselben Bedingungen, wie l, A, B genügendes Liniensystem bedeutet.

Man wird alle Substitutionen der Monodromiegruppe erhalten, wenn man für l', A', B' nach und nach alle möglichen jenen Bedingungen genügenden Liniensysteme wählt.

Das verallgemeinerte Problem kann offenbar dadurch specialisirt werden, dass man die Art der Verzweigung an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ vorschreibt, oder allgemeiner dadurch, dass man den Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ gewisse beschränkende Bedingungen auferlegt. Derartige Specialisirungen sind schon durch den Umstand angezeigt, dass das verallgemeinerte Problem im Allgemeinen reducibel ist.

§ 4.

Unverzweigte Flächen und Functionen.

In diesem und den folgenden Paragraphen will ich den besonderen Fall betrachten, in welchem die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in Fortfall kommen, so dass es sich um n-blättrige Flächen

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

handelt, welche auf der gegebenen Fläche Φ unverzweigt sind. Diese Flächen erscheinen von besonderem Interesse, weil sie den Flächen Φ von höherem Geschlecht eigenthümlich sind und berufen sein dürften, in dem Aufbau der einfachsten automorphen Functionen*) eine wichtige Rolle zu spielen.

*) Ich schliesse mich in der Bezeichnung den neusten Publicationen von F. Klein an. Siehe: „Zur Theorie der Lamé'schen Functionen". Göttinger Nachrichten vom 1. März 1890. Ferner: „Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung." Diese Annalen, Bd. 38, I, und die von Herrn Fricke herausgegebenen „Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen" (Leipzig 1890) Bd. I, pag. 763.

Wir bezeichnen wie früher mit Φ^* die einfach zusammenhängende Fläche, welche aus Φ durch Ausführung der Schnitte A, B hervorgeht. Die Fläche F besteht aus n übereinanderliegenden Exemplaren Φ^*, welche längs der Linien A, B den Substitutionen U, V entsprechend verbunden sind. Bedeutet y eine algebraische eindeutige Function des Ortes auf der Fläche F und sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die im Allgemeinen von einander verschiedenen Werthe, welche y in n übereinanderliegenden Punkten von F annimmt, so lässt sich jeder der n Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eindeutig über die Fläche Φ^* fortsetzen, und der Werthevorrath der Function y erscheint dann in n eindeutige Zweige zerlegt. Die letzteren erfahren beim Ueberschreiten der Linien A, B die Vertauschungen U, V. Die Bestimmung der Flächen F ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung der auf der Fläche Φ n-werthigen algebraischen unverzweigten Functionen. Ist das Geschlecht der Fläche Φ gleich 1, so werden alle diese Functionen durch die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen geliefert, und der Fall $p = 1$ kann daher als vollständig erledigt betrachtet und weiterhin bei Seite gelassen werden. Für ein beliebiges p hat man in der Theorie der Abel'schen Functionen eine besondere Art algebraischer unverzweigter Functionen, nämlich die Wurzelfunctionen betrachtet. Ich werde weiterhin die Stellung dieser besonderen Functionen unter den allgemeinen unverzweigten Functionen näher charakterisiren. Zuvor möge der Fall $n = 2$, welcher sich leicht und vollständig erledigen lässt, kurz besprochen werden.

§ 5.

Bestimmung aller zweiwerthigen unverzweigten algebraischen Functionen.

Es handelt sich um die Bestimmung aller Flächen F, welche zweiblättrig und unverzweigt über einer gegebenen Fläche Φ vom Geschlecht p ausgebreitet sind.

Diese Flächen sind nach Festlegung der Schnitte A, B einzeln zugeordnet den Systemen von $2p$ Substitutionen $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$, welche mit zwei Elementen gebildet sind, die Gleichung

$$(1) \qquad U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1$$

befriedigen und eine transitive Gruppe erzeugen. Sind 1, 2 die beiden Elemente, so giebt es nur die beiden Substitutionen

$$S_1 = (1)(2), \quad S_2 = (12)$$

und offenbar dürfen wir für U_i, V_i nach Willkür die eine oder die andere dieser Substitutionen wählen. Nur der eine Fall, in welchem $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ sämmtlich mit S_1 identificirt werden, ist auszuschliessen.

Die Anzahl der Flächen F beträgt daher $2^{2p} - 1$.*)

Es gelingt auch leicht die zu diesen Flächen gehörenden algebraischen Functionen zu bestimmen. Sei F eine bestimmte jener $2^{2p} - 1$ Flächen, ferner y eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf F und seien y_1, y_2 die beiden auf Φ^* eindeutigen Zweige der Function y. Die Function $y_1 - y_2$ nimmt dann beim Ueberschreiten eines der Schnitte A, B^* den Factor 1 oder -1 auf, ist also eine Wurzelfunction zweiten Grades. Die Summe $y_1 + y_2$ ist eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf der Fläche Φ. Bilden wir nun, unter Anwendung der bekannten Riemann'schen Bezeichnungen, für die Fläche Φ den ϑ-Quotienten

$$\psi = \psi(g_1, g_2, \ldots, g_p;\; h_1, h_2, \ldots, h_p) \tag{2}$$

$$= \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu\right)} \cdot e^{-2\sum h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ Hälften ganzer Zahlen bedeuten, so ist $y_1 + y_2 = 2R_1$, $y_1 - y_2 = 2\psi R_2$ und folglich wird

$$y = R_1 + \psi \cdot R_2 \tag{3}$$

der allgemeine Ausdruck einer auf F eindeutigen algebraischen Function sein. Dabei bezeichnen R_1, R_2 eindeutige algebraische Functionen der Fläche Φ. Wir erhalten die $2^{2p} - 1$ verschiedenen Flächen F, indem wir für $(g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p)$ nach und nach alle möglichen wesentlich verschiedenen Systeme von Hälften ganzer Zahlen wählen. Uebrigens leuchtet ein, dass die einzelne Fläche F schon durch die Function

$$y = \psi(g_1, g_2, \ldots, g_p;\; h_1, h_2, \ldots, h_p) \tag{3'}$$

vollständig definirt werden kann**).

Die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ lassen sich nach der Methode des vorigen Abschnittes ebenfalls erledigen, worauf ich indessen hier nicht näher eingehe.

---

*) Vgl. wegen des Falles $p = 2$: W. Dyck: „Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen". Diese Annalen Bd. 17, pag. 493.

**) Die zweiblättrigen Flächen lassen offenbar sämmtlich eine eindeutige Transformation in sich von der Periode 2 zu und fallen also unter die Flächen, welche ich in der Arbeit: „Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen" (Göttinger Nachrichten vom 5. Februar 1887 oder diese Annalen, Bd. 32) untersucht habe. Ich benutze die Gelegenheit, hier ein Citat auf eine mir später bekannt gewordene Notiz des Herrn S. Kantor nachzutragen, welche dieselben Gebilde betrifft. Dieselbe ist betitelt: „Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques" und findet sich in den Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Bd. 100, pag. 343–345.

§ 6.

Die unverzweigten algebraischen Functionen, welche sich auf geschlossenen Wegen linear substituiren.

Es möge nun noch eine besondere Art von unverzweigten Functionen hervorgehoben werden, zu welcher als die einfachsten die Wurzelfunctionen gehören. Wir wollen diejenigen auf der Fläche Φ unverzweigten Functionen betrachten, deren n eindeutig über Φ^* ausgebreiteten Zweige lineare (ganze oder gebrochene) Functionen von einander sind. Die linearen Functionen, welche die n Zweige durch einen derselben darstellen, bilden offenbar eine Gruppe. Nun kennt man aber nach den Untersuchungen von F. Klein alle Gruppen linearer Functionen*). Diese sind, wenn wir in einander transformirbare Gruppen als nicht verschieden erachten:

1) Die cyklischen Gruppen: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Die Diedergruppen: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y, \quad y' = -\frac{e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}{y} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1)$.

3) Die Tetraedergruppe.

4) Die Octaedergruppe.

5) Die Icosaedergruppe.

Den cyklischen Gruppen entsprechen die Wurzelfunctionen. Letztere existiren auf allen Flächen Φ, deren Geschlecht grösser ist als Null, und es ist bekanntlich leicht, den allgemeinen Ausdruck dieser Functionen durch ϑ-Functionen anzugeben. Unverzweigte Functionen, welche den übrigen Gruppen entsprechen, existiren nur auf denjenigen Flächen Φ, deren Geschlecht p grösser als Eins ist. Auszunehmen ist die Diedergruppe $n = 2$ (Vierergruppe in der Bezeichnung des Herrn Klein), welcher auch für $p = 1$ unverzweigte Functionen entsprechen.**)

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir eine auf der Fläche Φ unverzweigte Fläche

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

und nehmen an, dass eine auf F eindeutige algebraische Function einer der genannten Gruppen entspricht. Auf diese Gruppe G ist dann die durch $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ erzeugte Vertauschungsgruppe

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884) pag. 115 ff. Die Substitutionen der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppe, welche ich im Texte der Kürze halber nicht angebe, findet man auf pag. 42 und 43 des genannten Werkes.

**) Man vergleiche für den Fall $p = 1$ eine Note von E. Picard in den Comptes Rendus, Bd. 90, pag. 1479.

isomorph bezogen. Wenn nun $p = 1$ ist, so besteht diese Vertauschungsgruppe wegen der Relation

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} = 1 \quad \text{oder} \quad U_1 V_1 = V_1 U_1$$

aus lauter mit einander permutablen Substitutionen. Folglich müssen auch alle Substitutionen der Gruppe G mit einander permutabel sein. Daher kann G nur eine cyklische Gruppe oder die Diedergruppe $n = 2$ sein. Auf den Flächen Φ vom Geschlecht $p = 1$ können also in der That nur diesen Gruppen unverzweigte Functionen entsprechen.

Was nun den Nachweis der Existenz von unverzweigten Functionen betrifft, welche den oben aufgezählten Gruppen entsprechen, so möge es genügen einen besonderen Fall zu betrachten. Man wird leicht erkennen, dass die in diesem Falle befolgte Methode, sich sofort auf den allgemeinsten Fall übertragen lässt.*)

Gegeben sei eine Riemann'sche Fläche Φ vom Geschlecht 2. Es soll auf dieser Fläche eine sechzig-werthige unverzweigte algebraische Function bestimmt werden, deren sechzig in einem Punkte von Φ stattfindenden Werthe durch die sechzig Icosaedersubstitutionen mit einander zusammenhängen.

Wir bezeichnen mit

(1) $$S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 120)$$

die 120 homogenen Icosaedersubstitutionen, mit z_1 und z_2 die homogenen Variabeln, auf welche sich die Substitutionen beziehen. Ferner bilden wir eine Vertauschungsgruppe bei n Elementen

(2) $$T_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 120),$$

welche der Gruppe der Substitutionen S_i isomorph ist. Eine solche Vertauschungsgruppe und zwar bei $n = 120$ Elementen erhält man z. B., wenn man die Symbole S_i als Elemente auffasst und nun jeder Icosaedersubstitution S_k die durch die Reihenfolge $S_k S_i (i = 1, 2, \ldots, 120)$ angegebene Vertauschung der Symbole S_i zuordnet. Wir nehmen jetzt aus der Gruppe (2) irgend vier Substitutionen U_1, V_1, U_2, V_2 heraus, welche der Bedingung genügen, dass sie die ganze Gruppe erzeugen und die Gleichung

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} = 1$$

befriedigen. Dies ist offenbar möglich. Denn die Gruppe (1) und folglich auch die Gruppe (2) lässt sich schon durch zwei geeignet gewählte Substitutionen erzeugen. Sind T_α, T_β zwei solche Substitutionen, so genügt es

$$U_1 = T_\alpha, \quad V_1 = 1, \quad U_2 = T_\beta, \quad V_2 = 1$$

zu setzen.

*) Dieselbe Methode ist auch auf den Fall verzweigter Flächen anwendbar.

Dies vorausgeschickt breiten wir über der Fläche Φ die n-blättrige Fläche

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & A_2, & B_2 \\ U_1, & V_1, & U_2, & V_2 \end{pmatrix}$$

aus und bezeichnen mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die n Werthe, welche eine auf F eindeutige algebraische Function in einem Punkte der Fläche Φ besitzt. Beschreibt der letztere Punkt auf der Fläche Φ alle möglichen geschlossenen Wege, so erfahren dabei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Vertauschungen der Gruppe (2). Da nun die Gruppen (2) und (1) isomorph sind, so kann man nach einem Satze des Herrn Klein*) zwei homogene Functionen

$$Z_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad Z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

bilden, welche bei einer Vertauschung T_i der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ genau dieselbe lineare Substitution erfahren, wie z_1, z_2 bei S_i.

Demgemäss ist

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

eine algebraische sechzig-werthige unverzweigte Function auf der Fläche Φ, welche den gestellten Bedingungen genügt.

Königsberg i. Pr., den 27. Januar 1891.

---

*) „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade." Diese Annalen, Bd. 15, pag. 253 ff.