

**XI. Ueber die Transversalschwingungen einerseits offener Metallcylinder; von H. Fenkner,**  
Cand. math. in Marburg.

Auf Veranlassung und unter Leitung des Herrn Prof. Melde stellte ich im hiesigen physikalischen Institut eine Experimentaluntersuchung an über die Transversalschwingungen einerseits offener kreisförmiger Metallcylinder. Es handelte sich hierbei zunächst um genaue Untersuchungen über die Abhängigkeit der Schwingungszahlen der Cylindertöne von den Dimensionen des Cylinders. Sodann aber sollten die Cylinder mit irgend einer Flüssigkeit gefüllt und die Curven construirt werden, durch welche das Abhängigkeitsgesetz der Schwingungszahlen von der Höhe und der Natur der eingegossenen Flüssigkeitsmenge veranschaulicht wird, eine Untersuchung, deren Resultate ebenfalls in aller Kürze veröffentlicht werden sollen. Mit diesem letztern Thema hat sich zwar schon Mr. Tomlinson<sup>1)</sup> beschäftigt, jedoch musste die Wiederaufnahme dieser Arbeiten schon durch den Umstand gerechtfertigt werden, dass Tomlinson bei seinen Versuchen Glasgefäße benutzte, die unzweifelhaft nicht die Regelmässigkeit haben, wie die von mir angewandten Eisenblechcylinder, und dass Tomlinson auch bezüglich der Bestimmung der Schwingungszahlen nicht die Schärfe erzielte, wie es mit dem bekannten und von mir benutzten Appunn'schen Zungenpfeifenapparat mit 33 Tönen, von 128—256 Schwingungen von 4 zu 4 Schwingungen wachsend, leicht und sicher geschehen kann. Bei meinen Versuchen konnte eine Abweichung von 2 Schwingungen von der wirklichen Tonhöhe wohl kaum eintreten. Bei hohen Tönen benutzte ich meistens den Appunn'schen Obertöneapparat mit 64 Tönen. — Ich wandte mich also der Lösung der ersten Frage zu, nämlich der Frage, ob es möglich sei, die Schwingungszahl der ver-

---

1) Records of general science. 1835. u. 1836.

schiedenen Töne des Cylinders darzustellen als einfache Function der Dimensionen des Cylinders.

Um die Abhängigkeit der Töne I, II, III etc., d. h. der Töne mit bezüglich vier, sechs, acht etc. Schwingungsknoten festzustellen von der Höhe des Cylinders, wurden mir zwei Reihen Cylinder von Weissblech (verzinnem Eisenblech) zur Verfügung gestellt. Die Cylinder dieser beiden Reihen mögen durch  $A$  und  $B$  mit angehängten Indices bezeichnet werden.

Die Umfänge der Cylinder  $A_1, A_2, A_3, A_4$  waren einander gleich, nämlich  $u = 323$  mm. Die Metalldicke war ebenfalls bei allen dieselbe, nämlich  $d = 0,42$  mm.

Die Höhen  $h$  waren verschieden. Sämmtliche Cylinder wurden durch möglichst kleine gläserne Streichstäbchen in Schwingungen versetzt.

Die Resultate, welche ich für die Schwingungszahlen  $N$  der Töne I, II, III erzielte, sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I.

$A$	$h$	$N_I$	$N_{II}$	$N_{III}$
$A_1$	79,7 mm	104	287	550
$A_2$	160,4 „	104	288	552
$A_3$	239,1 „	104	288	552
$A_4$	319,2 „	104	288	552

Die Umfänge der Cylinder  $B_1, B_2, B_3$  waren auch einander gleich, nämlich  $u = 623$  mm; die Metalldicke betrug bei allen  $d = 0,47$  mm; die Höhen  $h$  waren sämtlich voneinander verschieden. Tabelle II enthält die Resultate für diese Versuchsreihe.

Tabelle II.

$B$	$h$	$N_{II}$	$N_{III}$	$N_{IV}$	$N_V$	$N_{VI}$
$B_1$	199,7 mm	81	152	244	353	484
$B_2$	299,1 „	79	144	234	340	466
$B_3$	398,9 „	81	152	244	353	483

Alle Versuche, welche ich über das Höhengesetz anstellte, und von denen ich hier einige herausgegriffen habe, führen zu dem interessanten Resultate:

Die Schwingungszahlen der Töne einerseits offener kreisförmiger Metallcylinder sind von der Höhe des Cylinders unabhängig.

Die erste Tabelle verificirt dieses Gesetz am besten. Der kleinste und der grösste Cylinder der Tabelle II zeigen das Höhengesetz sehr scharf. Der mittlere Cylinder weicht allerdings von demselben um einige Schwingungen ab. Es muss diese Abweichung Unregelmässigkeiten im Metalle oder in der Löthung des Cylinders zugeschrieben werden. Die Cylinder der ersten Tabelle nämlich waren für diese Versuche neu angefertigt. Die Cylinder der zweiten Tabelle schienen durch mehrfachen Gebrauch etwas gelitten zu haben, namentlich der mittlere.

Nachdem somit die Frage hinsichtlich des Höhengesetzes erledigt war, musste die Abhängigkeit der Schwingungszahlen von dem Umfange des Cylinders festgestellt werden. Zu dem Ende benutzte ich zwei Reihen Cylinder. Die Cylinder  $C_1$  und  $C_2$  der ersten Reihe hatten gleiche Metalldicke, gleiche Höhe, aber ungleiche Umfänge. Tabelle III enthält die Resultate.

Tabelle III.

$C$	$u$	$N_I$	$N_{II}$	$N_{III}$	$N_{IV}$	$N_V$
$C_1$	324,0 mm	96	266	496	800	1172
$C_2$	479,9 „	44	121	225	363	532

Die Cylinder  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  der zweiten Reihe hatten ebenfalls gleiche Metalldicke, gleiche Höhe, aber ungleiche Umfänge. Tabelle IV enthält die Resultate.

Tabelle IV.

$D$	$u$	$N_{II}$	$N_{III}$	$N_{IV}$	$N_V$	$N_{VI}$
$D_1$	322,7 mm	288	560	848	—	—
$D_2$	645,5 „	72	139	212	304	424
$D_3$	755,7 „	—	102	154	223	312

Aus den Tabellen III und IV geht, wie sogleich noch näher gezeigt werden soll, das Gesetz hervor:

Die Schwingungszahlen der correspondirenden Töne zweier einerseits offener kreisförmiger Metallcylinder verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Umfänge (oder Radien).

Entnehmen wir nämlich aus Tabelle III das Verhältniss der Quadrate der Umfänge beider Cylinder, so ergibt sich  $\frac{479,9^2}{324^2} = 2,193$ . Nehmen wir nun z. B. die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $C_2$  als gegeben an, so erhalten wir die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $C_1$  durch Multiplication jener Zahlen mit 2,193, wie folgt:

	$\Delta$		$\Delta$
$44 \cdot 2,193 = 96$	0	$363 \cdot 2,193 = 796$	-4
$121 \cdot 2,193 = 265$	-1	$532 \cdot 2,193 = 1167$	-5
$225 \cdot 2,193 = 494$	-2		

$\Delta$  bedeutet die Abweichung dieser berechneten Werthe von den für  $C_1$  nach Tabelle III auf experimentellem Wege gefundenen.

Aus Tabelle IV entnehmen wir ferner folgende Werthe für das Verhältniss der Quadrate je zweier Cylinderumfänge:

$$\text{Quotient für } D_2 \text{ und } D_1 : \alpha = \frac{645,5^2}{322,7^2} = 4,001;$$

$$\text{„ „ } D_3 \text{ „ } D_1 : \beta = \frac{755,7^2}{322,7^2} = 5,494;$$

$$\text{„ „ } D_3 \text{ „ } D_2 : \gamma = \frac{755,7^2}{645,5^2} = 1,37.$$

Nehmen wir nun die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $D_2$  als gegeben an, so erhalten wir durch Multiplication derselben mit dem Quotienten  $\alpha = 4,001$  die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $D_1$ . Setzen wir ferner die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $D_3$  als bekannt voraus, so ergeben sich durch Multiplication derselben mit  $\beta = 5,494$  und  $\gamma = 1,37$  bezüglich

die Schwingungszahlen der Töne der Cylinder  $D_1$  und  $D_2$ . In Tabelle V findet man zusammengestellt:

In der ersten Columne die mit  $\alpha$  multiplicirten Schwingungszahlen des Cylinders  $D_2$ ; in der dritten Columne die mit  $\beta$  multiplicirten Schwingungszahlen des Cylinders  $D_3$ ; in der fünften Columne die mit  $\gamma$  multiplicirten Schwingungszahlen des Cylinders  $D_3$ .

$\Delta$  bedeutet die Abweichung dieser berechneten Werthe von den beziehungsweise für  $D_1$  und  $D_2$  nach Tabelle IV auf experimentellem Wege gefundenen.

Tabelle V.

$\alpha \cdot D_2$	$\Delta$	$\beta \cdot D_3$	$\Delta$	$\gamma \cdot D_3$	$\Delta$
288	0	—	—	—	—
556	-4	560	0	140	+1
848	0	846	-2	211	-1
—	—	—	—	305	+1
—	—	—	—	427	+3

Die berechneten Werthe weichen von den in den Tabellen III und IV zusammengestellten nur in einigen Fällen um mehr als drei Schwingungen ab. Selbst bei den hohen Tönen sind verhältnissmässig günstige Resultate erzielt worden.

Um schliesslich das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungszahlen von der Metalldicke festzustellen, waren vier Cylinder  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  construiert worden, welche sämmtlich gleiche Höhe, gleichen Umfang, aber verschiedene Dicke hatten. Tabelle VI enthält die Resultate.

Tabelle VI.

$E$	$d$	$N_I$	$N_{II}$	$N_{III}$	$N_{IV}$
$E_1$	0,678 mm	152	413	777	—
$E_2$	0,522 „	118	320	598	960
$E_3$	0,419 „	95	254	482	772
$E_4$	0,375 „	85	226	430	690

Aus diesen Versuchen folgt, wie sogleich noch näher gezeigt werden soll, das Gesetz:

Die Schwingungszahlen correspondirender Töne zweier einerseits offener kreisförmiger Metalleylinder verhalten sich direct wie die Metaldicken.

Entnehmen wir nämlich aus Tabelle VI die Werthe für die Quotienten der Dicke je zweier Cylinder, so erhalten wir:

$$\text{Quotient für } E_1 \text{ und } E_2 : \alpha = \frac{0,678}{0,522} = 1,297;$$

$$\text{„ „ } E_1 \text{ „ } E_3 : \beta = \frac{0,678}{0,419} = 1,617;$$

$$\text{„ „ } E_1 \text{ „ } E_4 : \gamma = \frac{0,678}{0,375} = 1,806;$$

$$\text{„ „ } E_2 \text{ „ } E_3 : \delta = \frac{0,522}{0,419} = 1,246;$$

$$\text{„ „ } E_2 \text{ „ } E_4 : \varepsilon = \frac{0,522}{0,375} = 1,393;$$

$$\text{„ „ } E_3 \text{ „ } E_4 : \eta = \frac{0,419}{0,375} = 1,117.$$

Setzen wir nun beispielsweise die Schwingungszahlen der Töne des Cylinders  $E_4$  als bekannt voraus, so ergeben sich durch Multiplication derselben mit  $\gamma = 1,806$ ,  $\varepsilon = 1,393$ ,  $\eta = 1,117$  bezüglich die Schwingungszahlen der Töne der Cylinder  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$ .

In Tabelle VII findet man zusammengestellt:

In der ersten Columnne die mit  $\alpha$  multiplicirten Schwingungszahlen des Cylinders  $E_2$ ; in der dritten Columnne die mit  $\beta$  multiplicirten Schwingungszahlen des Cylinders  $E_3$  etc. etc.

$\Delta$  bedeutet wiederum die Abweichung dieser berechneten Werthe von den beziehungsweise für  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  nach Tabelle VI auf experimentellem Wege gefundenen.

Tabelle VII.

$\alpha \cdot E_2$	$\Delta$	$\beta \cdot E_3$	$\Delta$	$\gamma \cdot E_4$	$\Delta$	$\delta \cdot E_3$	$\Delta$	$\varepsilon \cdot E_4$	$\Delta$	$\eta \cdot E_1$	$\Delta$
153	+1	153	+1	154	+2	118	0	118	0	95	0
415	+2	411	-2	408	-5	317	-3	315	-5	253	-1
775	-2	779	+2	776	-1	592	-6	598	0	480	-2
—	—	—	—	—	—	961	+1	961	+1	771	-1

Auch in dieser Versuchsreihe kommen Differenzen von einigen Schwingungen vor. Wenn sich indessen schon bei den vorbergehenden Untersuchungen kleine Abweichungen von den gefundenen Gesetzen herausstellten, so kann dieser Umstand hier kaum befremden, da die Dicke an verschiedenen Stellen des Cylinderumfanges vielfach als etwas verschieden gefunden wird, wie ich das bei sämtlichen Cylindern beobachtete. Ich mass die Dicke bei jedem Cylinder an acht verschiedenen Stellen des Umfanges und nahm das Mittel aus den Werthen.

Die Frage nach dem Abhängigkeitsverhältniss der correspondirenden Töne einerseits offener kreisförmiger Metallcylinder von den Dimensionen wäre somit erledigt. Wir haben gesehen, dass dieses Verhältniss von der Höhe des Cylinders unabhängig ist, dass aber die Schwingungszahlen  $N_k$  und  $N'_k$  (wo  $k = \text{I, II, III etc.}$ ) sich verhalten direct wie die Metalldicken und umgekehrt wie die Quadrate der Umfänge, d. h. es ist:

$$(1) \quad N_k : N'_k = \frac{d}{u^2} : \frac{d'}{u'^2}.$$

Für Cylinder aus gleichem Metalle kann man demnach die Schwingungszahlen sämtlicher Töne bestimmen nach der Formel:

$$(2) \quad N_k = n_k \cdot \frac{d}{u^2},$$

wo  $n_k$  eine von der Wahl des Normalcylinders abhängige Constante bedeutet.

Um nach dieser Formel einige Rechnungen ausführen zu können, wählte ich den Cylinder  $C_1$  aus Tabelle III, welcher die Töne I, II, III, IV und V mit bezüglich vier, sechs, acht, zehn, zwölf Schwingungsknoten sehr rein angibt, zum Normalcylinder und berechnete die Werthe für  $n_k$ . Die Metalldicke dieses Normalcylinders war 0,3726 mm; sein Umfang = 324 mm; seine Höhe = 159 mm. Setzen wir also in Formel (2) für  $N_k$  bezüglich die Werthe 96, 266, 496, 800, 1172 (aus Tabelle III) ein, so wird:

$$n_I = 96 \cdot \frac{324^2}{0,3726} = 96 \cdot 281\,739;$$

$$n_{II} = 266 \cdot 281\,739; \quad n_{IV} = 800 \cdot 281\,739;$$

$$n_{III} = 496 \cdot 281\,739; \quad n_V = 1172 \cdot 281\,739.$$

Unter der grossen Anzahl von Cylindern, welche mir zu meinen Untersuchungen zur Verfügung gestellt waren, befanden sich mehrere, die ich auf ihre Tonhöhe noch nicht geprüft hatte. Ich bestimmte nun aufs genaueste ihre Metaldicken, ihre Umfänge und ihre Höhen und berechnete sodann nach Formel (2) ihre Schwingungszahlen. Die Vergleichung dieser Resultate mit den später auf experimentellem Wege gefundenen Werthen zeigte nur geringe Differenzen.

Es wird vielleicht nicht uninteressant sein, wenn ich hier ein Beispiel gebe.

Ein Cylinder hatte eine Höhe von 138,6 mm, also von der des Normalcylinders verschieden; seine Metaldicke betrug 0,4295 mm, und sein Umfang war 640 mm.

Die Schwingungszahlen der Töne dieses Cylinders sind demnach nach Formel (2):

$$N_I = 96 \cdot 281\,739 \cdot \frac{0,4295}{640^2} = 96 \cdot 0,296 = 29;$$

$$N_{II} = 266 \cdot 0,296 = 79; \quad N_{IV} = 800 \cdot 0,296 = 237;$$

$$N_{III} = 496 \cdot 0,296 = 147; \quad N_V = 1172 \cdot 0,296 = 346;$$

Mit Hülfe der Appunn'schen Zungenpfeifenapparate fand ich:

$$N_{II} = 80; \quad N_{III} = 149; \quad N_{IV} = 236; \quad N_V = 346.$$

Mit diesen Werthen stimmen die nach Formel (2) berechneten ganz gut überein.

Marburg, im Mai 1879.