Ueber die Transformation des zweiten Grades für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

Nachdem ich den einfachsten Fall der Transformation zweiten Grades, in dem die Moduln der transformirten ϑ-Functionen die doppelten der ursprünglichen sind, schon früher im 64sten Bande dieses Journals als Anwendung der dort aufgestellten Ausdrücke für die ϑ-Functionen mit n-fachen Argumenten und n-fachen Moduln behandelt, beabsichtige ich in der vorliegenden Arbeit die Theorie der Transformation zweiten Grades für die *Abel*schen Transscendenten erster Ordnung in ihrer ganzen Allgemeinheit zu entwickeln, indem ich die Ausdrücke der transformirten ϑ-Functionen, also auch die algebraischen Beziehungen zwischen den Gränzen der *Abel*schen Integrale in der einfachsten Gestalt herstelle und sodann die transformirten Integralmoduln als Functionen der ursprünglichen ausgedrückt erhalte. Ich schliesse mit einer Anwendung dieser Theorie auf die Untersuchung der *Abel*schen Integrale erster Ordnung, die durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale reducirbar sind.

Es sei das System von Differentialgleichungen vorgelegt:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\alpha+\beta y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\alpha+\beta y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}, \\[2ex] \dfrac{x_1dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{x_2dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\gamma+\delta y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\gamma+\delta y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}, \end{cases}$$

worin:

$$(2.)\quad \begin{cases} R(x) = x(1-x)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x), \\ R_1(y) = y(1-y)(1-\varkappa^2y)(1-\lambda^2y)(1-\mu^2y), \end{cases}$$

so gelten bekanntlich für den Fall, dass die durch die linken Seiten dieses Systems definirten *Abel*schen Transscendenten rationale Functionen zweiten Grades der aus den rechten Seiten desselben hervorgehenden *Abel*schen Functionen sein sollen, die nachstehenden für diese Transformation nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen, in denen ich mich der in meiner zweiten Abhandlung über die Transformation der *Abel*schen Functionen (Band 65 dieses Journals) gebrauchten Bezeichnungen bediene:

Wenn:

$$(3.)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega'_{11} = \varrho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21} = \varrho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22}, \\ \omega'_{12} = \varrho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22} = \varrho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22}, \end{cases}$$

gesetzt wird, so ergeben sich die Moduln der transformirten ϑ-Functionen aus den Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \tau'_{11} = \dfrac{\omega'_{11}\omega_{22} - \omega'_{21}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{21} = \dfrac{\omega'_{12}\omega_{22} - \omega'_{22}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau'_{12} = \dfrac{\omega'_{21}\omega_{11} - \omega'_{11}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22} = \dfrac{\omega'_{22}\omega_{11} - \omega'_{12}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \end{cases}$$

während die Argumente derselben definirt sind durch:

$$(5.)\quad v'_1 = \frac{2(\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \qquad v'_2 = \frac{2(\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}.$$

Die in den Ausdrücken (3.), (4.), (5.) vorkommenden ganzen Zahlen ϱ, σ, ϱ', σ' müssen endlich noch die Gleichungen befriedigen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha} - \varrho_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}) = 0, \\ \sum_{\alpha=1,2}(\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2, \\ \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\varrho'_{2\alpha}) = 2, \end{cases}$$

oder:

$$(7.)\quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha1}\sigma_{\alpha2} - \varrho_{\alpha2}\sigma_{\alpha1}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha2}\sigma'_{\alpha1} - \sigma_{\alpha2}\varrho'_{\alpha1}) = 0, \\ \sum_{\alpha=1,2}(\varrho'_{\alpha1}\sigma'_{\alpha2} - \varrho'_{\alpha2}\sigma'_{\alpha1}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha1}\sigma'_{\alpha1} - \sigma_{\alpha1}\varrho'_{\alpha1}) = 2, \\ \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha1}\sigma'_{\alpha2} - \sigma_{\alpha1}\varrho'_{\alpha2}) = 0, & \sum_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha2}\sigma'_{\alpha2} - \sigma_{\alpha2}\varrho'_{\alpha2}) = 2. \end{cases}$$

Aus den hier angegebenen Ausdrücken gehen, wenn

$$(8.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = \vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda \\ \times e^{i\pi\left[\begin{array}{l} -(\sigma'_{11}v_1+\sigma'_{21}v_2)(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-(\sigma'_{12}v_1+\sigma'_{22}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2) \\ +\tau'_{11}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)^2+2\tau'_{12}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau'_{22}(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)^2 \end{array}\right]} \end{cases}$$

gesetzt wird, unmittelbar die folgenden von *Hermite* *) aufgestellten Gleichungen hervor:

*) *Hermite*, sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes.

$$(9.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{m}}\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{n}}\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{p}}\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-2i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{q}}\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-2i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \end{cases}$$

worin:

$$(10.)\quad \begin{cases} \mathfrak{m} = \quad n_1^\lambda \sigma'_{11} + n_2^\lambda \sigma'_{12} - m_2^\lambda \sigma_{12} - m_1^\lambda \sigma_{11} - \sigma_{11}\sigma'_{11} - \sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} = \quad n_1^\lambda \sigma'_{21} + n_2^\lambda \sigma'_{22} - m_2^\lambda \sigma_{22} - m_1^\lambda \sigma_{21} - \sigma_{21}\sigma'_{21} - \sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} = -n_1^\lambda \varrho'_{21} - n_2^\lambda \varrho'_{22} + m_2^\lambda \varrho_{22} + m_1^\lambda \varrho_{21} - \varrho_{21}\varrho'_{21} - \varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} = -n_1^\lambda \varrho'_{11} - n_2^\lambda \varrho'_{12} + m_2^\lambda \varrho_{12} + m_1^\lambda \varrho_{11} - \varrho_{11}\varrho'_{11} - \varrho_{12}\varrho'_{12}, \end{cases}$$

wenn m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ die zur Definition von $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ schon früher vielfach angewandten Zahlen bedeuten.

Setzen wir nun nach *Hermite:*

$$(11.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda \\ = \sum_{m,n}^{-\infty \dots +\infty} A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]} \end{cases}$$

und suchen die Coefficienten dieser Reihenentwicklung durch die für die Π-Function charakteristischen Bedingungen (9.) zu bestimmen, so finden wir die beiden ersten Relationen durch die für diese Function angenommene Form von selbst befriedigt, während die beiden letzten die Gleichungen liefern:

$$\Sigma A_{m-2,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{\mathfrak{q}}\Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

und

$$\Sigma A_{m,n-2}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{\mathfrak{p}}\Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]},$$

woraus die Relationen:

$$(12.)\quad \begin{cases} A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{q}}A_{m-2,n}, \qquad A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{p}}A_{m,n-2}, \\ A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}}A_{m-2,n-2} \end{cases}$$

hervorgehen.

Es reducirt sich somit die unendliche Reihe der Coefficienten $A_{m,n}$ auf die folgenden vier:

$$A_{0,0},\quad A_{0,1},\quad A_{1,0},\quad A_{1,1},$$

während die anderen durch die leicht herzuleitenden Gleichungen bestimmt sind:

$$(13.)\quad \begin{cases} A_{2\mu,2\nu} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{0,0}, \\ A_{2\mu+1,2\nu} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{1,0}, \\ A_{2\mu,2\nu+1} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{0,1}, \\ A_{2\mu+1,2\nu+1} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{1,1}. \end{cases}$$

Wir müssen nun auf eine nähere Untersuchung der bei alleiniger Benutzung der Gleichungen (9.) noch willkürlich gebliebenen Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$ $A_{1,1}$ eingehen, von denen sich zeigen wird, dass in gewissen Fällen noch eine Abhängigkeit unter ihnen stattfindet.

Da die Π-Function abgesehen von einer Exponentialgrösse, die in Bezug auf die Argumente v_1, v_2 eine gerade Function ist, eine ϑ-Function mit dem Index λ darstellt und ausserdem der Uebergang von v_1, v_2 zu $-v_1$, $-v_2$ auch v_1', v_2' in $-v_1'$, $-v_2'$ verwandelt, so gilt bekanntlich mit Benutzung der schon früher von mir gebrauchten Bezeichnungen die Relation:

$$(14.)\qquad \Pi(-v_1,-v_2)_\lambda = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda}\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda,$$

oder nach Einführung der oben für diese Function angenommenen Reihe:

$$\Sigma A_{m,n} e^{i\pi[(-2m-\mathfrak{m})v_1+(-2n-\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= \Sigma A_{-m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}} e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} \Sigma A_{m,n} e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]},$$

woraus folgt:

$$(15.)\qquad A_{-m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}} = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m,n}.$$

Stellen wir die eben erhaltene Relation mit den oben (12.) für die Coefficienten A hergeleiteten Gleichungen zusammen, so ergeben sich die nachfolgenden Beziehungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} A_{2-m,n} = (-1)^{\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}}, \\ A_{m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{-m-\mathfrak{m},n-\mathfrak{n}}, \\ A_{2-m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m-\mathfrak{m},n-\mathfrak{n}}, \end{cases}$$

aus welchen wir den unter gewissen Umständen zwischen den vier Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ stattfindenden Zusammenhang folgern werden.

Ich ordne die verschiedenen Fälle der Transformation zweiter Ordnung, wenigstens für die nachfolgende Untersuchung, in drei Klassen, während die schliesslichen Resultate nur zwei wesentlich von einander verschiedene Hauptklassen liefern werden. Diese drei Fälle mögen aus den Bedingungen entspringen, dass entweder $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gerade Zahlen, oder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gerade, von den Grössen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ jedoch mindestens eine ungerade, oder endlich von den Grössen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine oder beide ungerade, während $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ beliebige Zahlen sein dürfen.

Für die Annahme, dass die vier Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gerade Zahlen sind, ergiebt sich, wenn α und β die Zahlen 0 oder 1 bedeuten, aus den oben stehenden Relationen die Gleichung:

$$A_{\alpha,\beta} = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{\alpha,\beta},$$

mit anderen Worten, es liefert, da die Coefficienten der Reihenentwickelung von $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ nicht sämmtlich Null sein dürfen, die zu den Gleichungen (9.) hinzugenommene Bedingungsgleichung (15.) keine Relationen zwischen den Grössen

$$A_{0,0}, \quad A_{0,1}, \quad A_{1,0}, \quad A_{1,1},$$

die also, so lange wir nicht andere specielle Eigenschaften der Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ in Betracht ziehen, von einander unabhängig bleiben. In diesem Falle wird sich also das transformirte ϑ als eine Summe von vier Reihen in der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_{0,0} R_1 + A_{0,1} R_2 + A_{1,0} R_3 + A_{1,1} R_4$$

darstellen lassen, wenn R_1, R_2, R_3, R_4 unendliche Reihen bedeuten, welche aus den Gliedern der für die Π-Function angenommenen Reihe bestehen.

Sind nun $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gerade und von den Zahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entweder beide oder nur eine ungerade, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A_{0,0} &= (-1)^{\mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{0,0},\\
A_{1,0} &= (-1)^{\mathfrak{q} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,0},\\
A_{0,1} &= (-1)^{\mathfrak{p} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{0,1},\\
A_{1,1} &= (-1)^{\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,1},
\end{aligned}$$

woraus durch eine leichte Ueberlegung folgt, dass stets zwei der vier Grössen

$$A_{0,0}, \quad A_{0,1}, \quad A_{1,0}, \quad A_{1,1}$$

verschwinden müssen, so dass sich also die Function Π in diesem Falle in der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_1 Q_1 + A_2 Q_2$$

darstellen lässt, wenn Q_1, Q_2 den obigen Reihen R analog sind.

Gehen wir endlich zur Betrachtung des dritten Falles über, in dem angenommen wurde, dass eine der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ oder beide ungerade Zahlen sein sollen, so würde z. B. die Annahme

$$\mathfrak{m} = 2\mu+1, \quad \mathfrak{n} = 2\nu,$$

die Relationen liefern:

$$A_{0,0} = (-1)^{\mathfrak{q}+\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,0},$$

$$A_{0,1} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,1},$$

d. h. es wären von den vier Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ nur zwei von einander unabhängig, eine Folgerung, die, wie man aus der Gleichung

$$A_{2-m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m-\mathfrak{m},n-\mathfrak{n}}$$

sieht, ganz allgemein für den Fall, dass von den Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ mindestens eine ungerade ist, statt hat, so dass also auch $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ sich auf die Form bringen lässt:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = C_1 S_1 + C_2 S_2,$$

worin C_1, C_2 noch zu bestimmende Constanten und S_1, S_2 unendliche Reihen von der oben angegebenen Gestalt bedeuten.

Wir gelangen somit zu folgendem für die Theorie der Transformation zweiten Grades wichtigen Resultat:

> Wenn die vier Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, so liefern die oben für die Π-Function aufgestellten Relationen (9.) und (15.) keine Beziehungen zwischen den Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$, so dass sich die mit der oben (8.) angegebenen Exponentialgrösse multiplicirte ϑ-Function des transformirten Systems als Summe von vier mit Constanten multiplicirten Reihen darstellt. Ist dagegen eine der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ungerade, so lassen die oben zwischen den Coefficienten aufgestellten Beziehungen nur zwei von ihnen unbestimmt, und man erhält die Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ als Summe von nur zwei mit noch zu bestimmenden Constanten multiplicirten Reihen.

Ich mache hier darauf aufmerksam, dass diese beiden verschiedenen Fälle eine Eigenthümlichkeit der Transformation zweiter Ordnung sind, welche, wie sich sehr bald zeigen wird, in dem Bestehen einer linearen Relation zwischen je drei Producten von zwei ϑ-Functionen, wie sie hier gebraucht werden sollen, ihren Grund hat. —

Ich will ferner nicht unterlassen zu bemerken, dass zu dem ersten der beiden Hauptfälle stets das transformirte Fundamentaltheta aller von *Hermite* als Repräsentanten der nicht durch eine lineare Substitution aufeinander zurückführbaren Systeme definirten Transformationen zweiter Ordnung gehört. Denn stellt man die Transformationszahlen in folgender Form zusammen:

$$\begin{array}{cccc} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{array}$$

so sind die 15 Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der Transformation zweiter Ordnung durch die Schemata bestimmt:

$$(17.) \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & i & i' \\ 0 & 2 & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

wenn i, i', i'' die Werthe 0 und 1 annehmen; woraus in Verbindung mit der Annahme

$$m_1^\lambda = m_2^\lambda = n_1^\lambda = n_2^\lambda = 0,$$

welche das Fundamentaltheta definirt, die obige Behauptung unmittelbar als richtig erhellt. —

Da die Darstellungen der Π-Function einzig und allein aus der Berücksichtigung der vier für die Veränderung der Argumente um ganze Perioden des ursprünglichen Systems aufgestellten Bedingungsgleichungen (9.), sowie aus der Annahme hergeleitet sind, dass diese Function durch Veränderung der Argumente in die entgegengesetzten bis auf das Zeichen unverändert bleibt, so werden offenbar alle die Functionen, welche denselben Bedingungen genügen, vorausgesetzt natürlich, dass sie wie die Function Π den Charakter einer ganzen Function haben, sich in eine ähnliche Form setzen lassen, in der die darin vorkommenden unendlichen Reihen dieselben sind, während die Coefficienten sich ändern, da sie von den anderweitigen speciellen Eigenschaften dieser Functionen abhängen.

Fassen wir nun den ersten Hauptfall in's Auge, für den die Bedingungsgleichungen, denen die Π-Function genügen muss, in

$$(18.) \quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12})_\lambda = e^{-2i\pi(2v_1+\tau_{11})}\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{21}, v_2+\tau_{22})_\lambda = e^{-2i\pi(2v_2+\tau_{22})}\Pi(v_1, v_2)_\lambda \end{cases}$$

übergehen, während sie selbst nach den obigen Auseinandersetzungen die Gestalt annimmt

$$(19.)\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_{0,0}.R_1 + A_{0,1}.R_2 + A_{1,0}.R_3 + A_{1,1}.R_4,$$

so sieht man leicht, dass sich die Reihen R_1, R_2, R_3, R_4 durch die Bemerkung werden bestimmen lassen, dass den für $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ aufgestellten Bedingungen (18.) auch das Quadrat einer jeden ϑ-Function des ursprünglichen *Abel*schen Systems genügt, dass sich dieses also in eine der Gleichung (19.) analoge Form bringen lassen muss, in der R_1, R_2, R_3, R_4 dieselben Reihen bedeuten und nur die Coefficienten

$$A_{0,0}\quad A_{0,1}\quad A_{1,0}\quad A_{1,1}$$

andere Werthe annehmen. Wählt man nun vier ϑ-Quadrate so, dass zwischen ihnen keine lineare Relation stattfindet, so erhält man vier lineare Gleichungen zur Bestimmung von R_1, R_2, R_3, R_4 und kann dann (19.) in die Form setzen:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\alpha)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\alpha^2 + (\beta)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\beta^2 \\ \qquad + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\gamma^2 + (\delta)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\delta^2, \end{cases}$$

worin wir nur noch die Constanten (α), (β), (γ), (δ) zu bestimmen haben.

Wenn man für v_1, v_2 vier Substitutionen in halben Perioden finden kann, welche nur die Indices der rechten Seite der Gleichung (20.) ändern, während sie den der linken Seite unverändert lassen, so hätte man, indem man die Variablen verschwinden liesse, vier Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten (α), (β), (γ), (δ) hergestellt, deren linke Seiten identisch sind, so dass also, was ich besonders hervorhebe, in das Endresultat nicht die Nullwerthe anderer transformirter ϑ-Functionen als des $\vartheta(v_1', v_2')_\lambda$ eintreten. Nun ergiebt sich aber leicht aus den für die Argumente der transformirten ϑ-Function gefundenen Ausdrücken (5.), dass folgende für v_1, v_2 gemachte Substitutionen:

$$(21.)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad v_1 & \qquad\qquad v_2 \\ \frac{1}{2}\omega_{11} = \frac{1}{2}(\varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{21} = \frac{1}{2}(\varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{12} = \frac{1}{2}(\varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{22} = \frac{1}{2}(\varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{11}' = \frac{1}{2}(\varrho_{11}' + \sigma_{11}'\tau_{11} + \sigma_{21}'\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{21}' = \frac{1}{2}(\varrho_{21}' + \sigma_{11}'\tau_{21} + \sigma_{21}'\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{12}' = \frac{1}{2}(\varrho_{12}' + \sigma_{12}'\tau_{11} + \sigma_{22}'\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{22}' = \frac{1}{2}(\varrho_{22}' + \sigma_{12}'\tau_{21} + \sigma_{22}'\tau_{22}) \end{cases}$$

oder die durch Addition aus diesen zusammengesetzten den Index der auf der linken Seite der Gleichung (20.) befindlichen ϑ-Function unverändert lassen, indem sie die transformirten Argumente respective um: 1, 0; 0, 1; τ_{11}', τ_{12}'; τ_{21}', τ_{22}' oder um die aus Addition derselben hervorgehenden Grössen vermehren.

Die auf der linken Seite hinzutretende Exponentialgrösse ist dieselbe, welche die ϑ-Quadrate bei der Substitution der halben Perioden auf der rechten Seite als Factor erhalten.

Es bleibt nun noch vor allen Dingen zu untersuchen übrig, ob diese hier angegebenen Substitutionen auch in der That vier von einander verschiedene Gleichungen zur Berechnung der Constanten (α), (β), (γ), (δ) liefern werden, was nicht geschähe, wenn z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{11} \equiv \omega_{12} \equiv \omega_{11}' \equiv \omega_{12}' \\ \omega_{21} \equiv \omega_{22} \equiv \omega_{21}' \equiv \omega_{22}' \end{array}\right\} \pmod{2}$$

wäre, da dann nur ganze Perioden zu den Argumenten der rechten Seite hinzutreten würden. Fassen wir zuerst die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der Transformation zweiten Grades in's Auge und bemerken, dass in den vier oben (17.) aufgestellten Schematen zwei Diagonalglieder den Werth 1 haben, so ergiebt sich aus (21.), dass zwei Substitutionen existiren, die aus halben Perioden bestehen und verschieden sind, so dass die vorgelegte Gleichung, die aus diesen beiden Substitutionen und die aus der Zusammensetzung dieser beiden Substitutionen hervorgehende Gleichung vier im Allgemeinen von einander unabhängige Bestimmungsgleichungen liefern, welche zur Berechnung der Constanten dienen werden. Was nun die den oben aufgestellten 15 Fällen äquivalenten Transformationen zweiten Grades betrifft, die aus jenen durch lineare Substitutionen abgeleitet sind, so ist bekanntlich *) die ϑ-Function des durch eine Transformation ersten Grades abgeleiteten Systems gleich einer mit einer Constanten multiplicirten ϑ-Function des ursprünglichen Systems (abgesehen von einer Exponentialgrösse); es folgt daher nach dem eben Bewiesenen unmittelbar, dass es jedenfalls drei von einander verschiedene Substitutionen in halben Perioden giebt, welche die Indices der rechten Seite ändern, während sie den Index der linken Seite

---

*) Zur Erläuterung des Obigen füge ich einige Worte über die lineare Transformation hinzu:

Die Bedingungsgleichungen für das linear transformirte ϑ lauten, wenn im Uebrigen die für die Transformation zweiten Grades aufgestellten Zahlengleichungen, in denen nur statt der charakteristischen Zahl 2 die Einheit zu setzen ist, zu Hülfe genommen werden, folgendermassen:

$$(a.) \quad \left\{\begin{array}{rcl} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda &=& (-1)^m \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda &=& (-1)^n \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda &=& (-1)^q \Pi(v_1, v_2)_\lambda e^{-i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda &=& (-1)^p \Pi(v_1, v_2)_\lambda e^{-i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \end{array}\right.$$

unverändert lassen und aus einer einfachen Ueberlegung geht ferner hervor, dass dasselbe dann auch unsere Substitutionen:

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}\omega_{11} & \frac{1}{2}\omega_{21}; & \frac{1}{2}\omega'_{11} & \frac{1}{2}\omega'_{21} \\ \frac{1}{2}\omega_{12} & \frac{1}{2}\omega_{22}; & \frac{1}{2}\omega'_{12} & \frac{1}{2}\omega'_{22} \end{matrix}$$

leisten, da sie die transformirten Argumente um 1, 0; 0, 1, τ'_{11}, τ'_{21}; τ'_{12}, τ'_{22} vermehren. Hat man nun durch Anwendung der eben besprochenen Substitutionen sich vier von einander unabhängige, in den Coefficienten lineare Gleichungen hergestellt, so setze man die Argumente $v_1 = v_2 = 0$ und erhält, indem man leicht sieht, dass die Exponentialgrössen auf beiden Seiten fortfallen, Gleichungen von folgender Form:

$$(22.)\quad \begin{cases} \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (\alpha)\vartheta^2_\alpha + (\beta)\vartheta^2_\beta + (\gamma)\vartheta^2_\gamma + (\delta)\vartheta^2_\delta, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (\alpha)\varepsilon_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon} + (\beta)\varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} + (\gamma)\varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} + (\delta)\varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon}, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (\alpha)\varepsilon'_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon'} + (\beta)\varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} + (\gamma)\varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} + (\delta)\varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'}, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (\alpha)\varepsilon''_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon''} + (\beta)\varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} + (\gamma)\varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} + (\delta)\varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''}, \end{cases}$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3, \varepsilon''_4$ ± 1 oder $\pm i$ bedeuten, so dass, wenn man

$$(23.)\quad \varDelta = \begin{vmatrix} \vartheta^2_\alpha & \vartheta^2_\beta & \vartheta^2_\gamma & \vartheta^2_\delta \\ \varepsilon_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon} & \varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} & \varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} & \varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon} \\ \varepsilon'_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon'} & \varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} & \varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} & \varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'} \\ \varepsilon''_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon''} & \varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} & \varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} & \varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''} \end{vmatrix},$$

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta^2_\beta & \vartheta^2_\gamma & \vartheta^2_\delta \\ 1 & \varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} & \varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} & \varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon} \\ 1 & \varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} & \varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} & \varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'} \\ 1 & \varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} & \varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} & \varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''} \end{vmatrix},$$

---

während die transformirten Argumente durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$v'_1 = \frac{\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}, \qquad v'_2 = \frac{\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}.$$

Da nun die Gleichungen (a.) die für diejenige ϑ-Function charakteristischen Bedingungen sind, für welche:

$$m^\lambda_1 = \mathfrak{q}, \quad m^\lambda_2 = \mathfrak{p}, \quad n^\lambda_1 = \mathfrak{m}, \quad n^\lambda_2 = \mathfrak{n},$$

so erhält man, wenn man den in der Gleichung (8.) befindlichen Exponentialfactor der ϑ-Function mit $e^{f(v_1, v_2)}$ bezeichnet, die Relation:

$$e^{f(v_1, v_2)}\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{m^\lambda_1 m^\lambda_2 n^\lambda_1 n^\lambda_2} = C.\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{qpmn}},$$

worin C eine Constante bedeutet.

Δ_2, Δ_3, Δ_4 den ähnlich gestalteten Determinanten gleichsetzt, die Transformationsgleichung die Gestalt annimmt:

$$(24.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Pi(v_1, v_2)_\lambda}{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\alpha + \frac{\Delta_2}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\beta \\ &\quad + \frac{\Delta_3}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\gamma + \frac{\Delta_4}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\delta \end{aligned} \right.$$

worin $\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda$, da nach dem Obigen $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ eine gerade Function ist, im Allgemeinen nicht verschwindet.

Da wir nun die Ausdrücke für die transformirten Argumente ausser in der Form der Gleichungen (5.) noch folgendermassen schreiben können:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \sigma'_{11}v_1 + \sigma'_{21}v_2 - \tau'_{11}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau'_{12}(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2), \\ v'_2 &= \sigma'_{12}v_1 + \sigma'_{22}v_2 - \tau'_{21}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau'_{22}(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2), \end{aligned}$$

so ist leicht einzusehen, dass eine Substitution der um halbe Perioden vermehrten Argumente v_1, v_2 nur die Indices der rechten und linken Seite der Gleichung (24.) ändert. Wenden wir daher drei solcher Substitutionen auf diese Gleichung an, so ergiebt die Division je zweier von diesen so entstehenden Gleichungen die transformirten *Abel*schen Transscendenten als Functionen der ursprünglichen, also auch die algebraischen Ausdrücke, welche zwischen den Grenzen der Integrale der ineinander transformirten *Abel*schen Systeme stattfinden, während das Verschwinden der Argumente unmittelbar die transformirten Integralmoduln als Function der Moduln der vorgelegten Integrale liefert. —

Ich will noch bemerken, dass man sich die wirkliche Ausführung der Transformation durch eine schickliche Wahl der ϑ-Quadrate erleichtern kann, indem z. B. die Wahl von

$$\vartheta(v_1, v_2)^2_5, \quad \vartheta(v_1, v_2)^2_1, \quad \vartheta(v_1, v_2)^2_3, \quad \vartheta(v_1, v_2)^2_{13},$$

wie unmittelbar zu sehen, stets $(\alpha) = \frac{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda}{\vartheta^2_5}$ liefert und die Zusammensetzung der anderen Coefficienten (β), (γ), (δ) vereinfacht. —

Ich wende mich nun zu dem zweiten Hauptfall der Transformation zweiten Grades, der dadurch charakterisirt war, dass von den Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mindestens eine ungerade ist. Es war gezeigt worden, dass unter dieser Voraussetzung die transformirte Function die Form annimmt

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = C_1 S_1 + C_2 S_2,$$

worin C_1, C_2 unbestimmt gebliebene Constanten und S_1, S_2 unendliche Reihen bedeuten, die aus den Gliedern der oben für die Π-Function angenommenen Entwickelung (11.) bestehen.

Wenn es nun möglich sein wird, andere Functionen, die sich in eine unbedingt convergirende Reihe entwickeln lassen, anzugeben, welche ebenfalls den für die Π-Function aufgestellten vier charakteristischen Bedingungen (9.) genügen und mit dieser zu gleicher Zeit gerade und ungerade sind, so werden sich diese Functionen gleichfalls auf die Form:

$$C_1' S_1 + C_2' S_2$$

bringen lassen, in der die unendlichen Reihen dieselben geblieben sind, während nur die Coefficienten, die von den anderweitigen speciellen Eigenschaften dieser Functionen abhängen, sich geändert haben.

Bezeichnet man nun

$$\vartheta(v_1, v_2)_\lambda \quad \text{mit} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{m_1^\lambda m_2^\lambda n_1^\lambda n_2^\lambda},$$

so erkennt man zuerst unmittelbar, dass das Product:

$$(\alpha) \qquad \vartheta(v_1, v_2)_{0000} . \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

den Bedingungen (9.) Genüge leistet, und dass ausserdem, wenn auf dieses Product irgend eine der 15 Substitutionen der halben Perioden *) angewandt wird, das neu entstehende Product wiederum eine Function von derselben Eigenschaft ist. Wendet man nämlich auf (α) die Substitution

$$\tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \tfrac{1}{2}\mu_2, \quad \tfrac{1}{2}\nu_1, \quad \tfrac{1}{2}\nu_2$$

an, so erhält man:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} . \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{q}+\mu_1\, \mathfrak{p}+\mu_2\, \mathfrak{m}+\nu_1\, \mathfrak{n}+\nu_2},$$

woraus sich sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung ergiebt, wenn man die für die ϑ-Functionen bei Substituirung ganzer Perioden charakteristischen Gleichungen beachtet. Um jedoch eine Function zu erhalten, die allen für die Π-Function zur Bestimmung ihrer Form aufgestellten Bedingungsgleichungen genügt, bleibt noch zu zeigen, dass man diese Producte, welche die Gleichungen (9.) befriedigen, nach Belieben so wählen kann, dass dieselben entweder gerade oder ungerade Functionen werden. Wendet man nämlich auf den Ausdruck (α) die noch unbestimmt gelassene Substitution $\frac{1}{2}\mu_1$, $\frac{1}{2}\mu_2$, $\frac{1}{2}\nu_1$, $\frac{1}{2}\nu_2$ an, so wird offenbar das neue Product für negative Argumente in seinen Werth für positive übergehen multiplicirt mit:

$$(-1)^{\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+(\mu_1+\mathfrak{q})(\nu_1+\mathfrak{m})+(\mu_2+\mathfrak{p})(\nu_2+\mathfrak{n})} = (-1)^{\mathfrak{mq}+\mathfrak{np}+\mathfrak{m}\mu_1+\mathfrak{q}\nu_1+\mathfrak{p}\nu_2+\mathfrak{n}\mu_2}.$$

---

*) s. Band 64, p. 17 dieses Journals.

Da man nun offenbar die ganzen Zahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, deren Werthe 0 oder 1 sind, auf verschiedene Arten so bestimmen kann, dass nach Belieben:

$$(25.)\qquad \left.\begin{array}{r} \mathfrak{m}\mu_1+\mathfrak{q}\nu_1+\mathfrak{p}\nu_2+\mathfrak{n}\mu_2 \equiv 0 \\ \text{oder} \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2}$$

ist (mit Ausnahme des einen Falles, in welchem $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, der jedoch hier nicht in Betracht kommt), so schliessen wir, dass sich stets unter den durch die Substitution von halben Perioden erhaltenen Producten mehrere finden werden, welche sämmtlichen für die Π-Function geltenden Bedingungen genügen.

Es lassen sich somit immer zwei Producte von je zwei ϑ-Functionen bilden, welche bis auf die Coefficienten C_1, C_2 die Form der Π-Function erhalten, so dass die Reihen S_1, S_2 aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha\, \vartheta(v_1, v_2)_\beta &= C_1'.S_1+C_2'.S_2, \\ \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma} &= C_1''.S_1+C_2''.S_2 \end{aligned}$$

gefunden werden können und somit die Function Π die Form annehmen wird:

$$(26.)\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (1)\vartheta(v_1, v_2)_\alpha\vartheta(v_1, v_2)_\beta+(2)\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma},$$

worin noch die Coefficienten (1) und (2) zu bestimmen sein werden.

Ich bemerke noch zu der eben gefundenen Darstellung von $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$, dass nunmehr der eigentliche Grund ersichtlich ist, wesshalb sich in unserer Untersuchung zwei Hauptgattungen von Transformationen zweiten Grades ergaben. Während nämlich vier ϑ-Quadrate stets so gewählt werden können, dass keine lineare Abhängigkeit zwischen ihnen besteht, findet zwischen drei ϑ-Producten, die durch Substitution halber Perioden aus einander hergeleitet und zugleich gerade oder ungerade sind, stets eine lineare homogene Gleichung statt, die man sich mit Hülfe der obigen Darstellung leicht herstellen kann. —

Zur Bestimmung der in der Gleichung (26.) vorkommenden Constanten (1) und (2) lässt sich wenigstens ohne Weiteres die in dem ersten Hauptfalle der Transformation zweiten Grades angewandte Methode nicht benutzen. Während nämlich dort durch das Verschwinden der Argumente unmittelbar Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten hergestellt werden konnten, da $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ eine gerade Function sein musste, kann es hier geschehen, dass das transformirte ϑ ein ungerades ist und in Folge dessen die Gleichungen identisch verschwinden. Ich nehme zuerst an, dass λ der Index eines geraden ϑ ist, dass also

$\Pi(0,0)_\lambda$ im Allgemeinen nicht Null ist; dann wird man offenbar durch Anwendung einer Substitution in halben Perioden, welche die Indices der rechten Seite der Gleichung (26.) ändert, während sie den der linken Seite unverändert lässt, in Verbindung mit der vorgelegten Gleichung selbst die beiden zur Bestimmung der Constanten (1) und (2) dienenden Gleichungen erhalten:

$$(27.)\quad \begin{cases} \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_\lambda = (1)\vartheta_\alpha\vartheta_\beta \qquad +(2)\vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma}, \\ \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_\lambda = (1)\varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1}+(2)\varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1}, \end{cases}$$

worin ε_1 und ε_2 ± 1 oder $\pm i$ bedeuten.

Setzt man also:

$$(28.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \vartheta_\alpha\vartheta_\beta & \vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma} \\ \varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1} & \varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1} \end{vmatrix},$$

$$(29.)\qquad \Delta_1 = \varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1}-\vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma},\quad \Delta_2 = \vartheta_\alpha\vartheta_\beta-\varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1},$$

so erhält man für die transformirte ϑ-Funktion den Ausdruck:

$$(30.)\qquad \frac{\Pi(v_1,v_2)_\lambda}{\vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_\lambda} = \frac{\Delta_1}{\Delta}\vartheta(v_1,v_2)_\alpha\vartheta(v_1,v_2)_\beta + \frac{\Delta_2}{\Delta}\vartheta(v_1,v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1,v_2)_{\beta\gamma}.$$

Ich will bemerken, dass in diesem Falle durch eine passende Wahl der ϑ-Producte sich die Bestimmung der in den transformirten ϑ-Ausdrücken vorkommenden Constanten vereinfachen lässt. Für die Herstellung der ϑ-Producte war nämlich nur erforderlich, dass sie aus dem Ausdrucke

$$\vartheta(v_1,v_2)_{0000}\,.\,\vartheta(v_1,v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

durch Substitution halber Perioden hervorgingen, so jedoch, dass wenn diese Substitution durch die Transformationszahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 bezeichnet wurde,

$$(25.)\qquad \mathfrak{m}\mu_1+\mathfrak{q}\nu_1+\mathfrak{p}\nu_2+\mathfrak{n}\mu_2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

war. Die Erfüllung eben dieser Congruenz war die Bedingung dafür, dass das ϑ-Product eine gerade Function vorstelle, wobei jedoch die beiden einzelnen Factoren des Productes sich zu gleicher Zeit als gerade oder als ungerade Functionen ergeben konnten. Fügen wir jedoch noch die Congruenz

$$(31.)\qquad \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2 \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

hinzu, so sieht man leicht, dass für beliebige Combinationen der Zahlen 0 oder 1 in den beiden Congruenzen (25.) und (31.) stets gleichzeitige Lösungen existiren, so dass wir für die die Π-Function darstellenden Producte von ϑ-Functionen zwei solche werden auswählen können, dass das eine ein Product gerader, das andere ein Product ungerader ϑ-Functionen ist, dass sich also beim Verschwinden der Argumente der Werth der einen Constanten unmittelbar ergeben wird. —

Ist nun zweitens λ der Index einer ungeraden ϑ-Function, so mache man in der Gleichung (26.) eine Substitution von halben Perioden, welche z. B.

$$\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta$$

in eine gerade Function verwandelt (dass es eine solche giebt, ist früher bewiesen worden); dann wird, wie man durch eine einfache Ueberlegung findet, die linke Seite der Gleichung sowie das zweite Product der rechten Seite derselben ebenfalls in eine gerade Function übergehen, so dass eine neue Substitution, welche nunmehr den Index der linken Seite nicht ändert, für die Bestimmung der Constanten die Gleichungen liefert:

$$(32.)\quad \begin{cases} \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1} = (1)\varepsilon'_1 \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} + (2)\varepsilon'_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta}, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1} = (1)\varepsilon''_1 \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta} + (2)\varepsilon''_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta}, \end{cases}$$

worin ε'_1, ε'_2 und ε''_1, ε''_2 die Grössen ± 1 oder $\pm i$ bedeuten sollen, so dass, wenn man:

$$(33.)\qquad D = \begin{vmatrix} \varepsilon'_1 \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} & \varepsilon'_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta} \\ \varepsilon''_1 \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta} & \varepsilon''_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta} \end{vmatrix},$$

$$(34.)\quad D' = \varepsilon''_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta} - \varepsilon'_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta}, \qquad D'' = \varepsilon'_1 \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} - \varepsilon''_1 \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta}$$

setzt, die Transformationsgleichung die Form annimmt:

$$(35.)\quad \frac{\Pi(v_1, v_2)_\lambda}{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1}} = \frac{D'}{D}\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta + \frac{D''}{D}\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma}.$$

Somit ist auch der zweite Hauptfall der Transformation zweiten Grades erledigt, indem durch Substitutionen von halben Perioden aus der Gleichung (35.) genau wie oben neue Gleichungen zur Aufstellung der algebraischen Transformation sowie der Ausdrücke für die transformirten Integralmoduln hergeleitet werden können. —

Ich knüpfe eine Anwendung der eben durchgeführten Theorie der Transformation zweiten Grades an eine von Herrn *Weierstrass* mir gemachte Mittheilung, in welcher gezeigt wird,

„dass, wenn ein *Abel*sches System erster Ordnung:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_1,$$

$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_2$$

„sich in ein anderes transformiren lässt, für welches der Modul der ϑ-„Function $\tau'_{12}=0$ *) ist, sich die Constanten A und B (auf zweierlei Art) „so bestimmen lassen, dass

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}},$$

„wo $R_1(\xi)$ vom dritten Grade und ξ, $\sqrt{R_1(\xi)}$ rational durch x, $\sqrt{R(x)}$ „ausdrückbar sind. Umgekehrt muss zwischen den Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} „eine Gleichung von der angegebenen Form stattfinden, wenn sich das „Integral

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

„in der in Rede stehenden Weise in ein elliptisches soll transformiren „lassen. (Nach *Abel,* Précis. Chap. II. §. 1 théor. II. genügt es aber „Transformationen dieser Art zu betrachten)". —

Bekanntlich hat *Legendre* in dem *traité des fonctions elliptiques* das Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

auf elliptische Integrale reducirt und *Jacobi* später in seiner Kritik des *Legendre*schen Werkes (Band 8 dieses Journals) das allgemeinere Integral von der Form:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\varkappa^2\lambda^2x)}}$$

durch eine Transformation zweiten Grades auf Integrale niedrigerer Gattung zurückgeführt. Ich will nun untersuchen, ob es noch andere *Abel*sche Integrale erster Ordnung giebt, die durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reducirbar sind, und auf die obige Mittheilung mich stützend eine Methode zur Behandlung dieser Frage anwenden, die allgemein brauchbar ist und zu einer Erweiterung dieser Betrachtungen in Bezug auf *Abel*sche Integrale, die durch Transformationen höherer Grade auf Integrale von niedrigerer Gattung zurück-

---

*) oder in den von mir in dieser Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen:

$$\omega'_{12}\omega_{22}-\omega'_{22}\omega_{12}$$
$$=(\varrho'_{12}+\sigma'_{12}\tau_{11}+\sigma'_{22}\tau_{12})(\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22})-(\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22})(\varrho_{12}+\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12})=0,$$

oder:

$$\omega'_{21}\omega_{11}-\omega'_{11}\omega_{21}$$
$$=(\varrho'_{21}+\sigma'_{11}\tau_{21}+\sigma'_{21}\tau_{22})(\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12})-(\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12})(\varrho_{21}+\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{21}\tau_{22})=0.$$

führbar sind, nur eine genaue Behandlung der Transformationstheorie höherer Grade erfordert.

Da die Bedingung

$$(a.) \qquad \tau'_{12} = 0,$$

welche für τ'_{11}, τ'_{22} die Ausdrücke liefert:

$$(b.) \qquad \tau'_{11} = \frac{\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12}}{\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12}}, \quad \tau'_{22} = \frac{\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22}}{\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22}},$$

die Gleichung

$$(c.) \qquad \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14} = 0$$

zur Folge hat, weil in diesem Falle die Function

$$\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14} = \Sigma e^{[\nu_1(2v'_1-1+\tau'_{11}+\nu_1\tau'_{11})+\nu_2(2v'_2-1+\tau'_{22}+\nu_2\tau'_{22})]\pi i}$$

in das Product der beiden ungeraden elliptischen ϑ-Functionen

$$\vartheta(v'_1, \tau'_{11})_1\vartheta(v'_2, \tau'_{22})_1$$

zerfällt, so kommt es darauf an, alle die hyperelliptischen Systeme aufzustellen, die durch eine Transformation zweiten Grades in andere übergeführt werden können, für welche die Gleichung $(c.)$ erfüllt ist.

Wenn wir die oben entwickelte Theorie benutzen wollen, um

$$\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14}$$

als homogene Function des zweiten Grades der ϑ-Functionen des vorgelegten Systems auszudrücken, so müssen wir

$$m_1^\lambda = m_2^\lambda = n_1^\lambda = n_2^\lambda = 1$$

setzen, so dass die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(d.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{m} = \sigma'_{11}+\sigma'_{12}+\sigma_{12}+\sigma_{11}-\sigma_{11}\sigma'_{11}-\sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} = \sigma'_{21}+\sigma'_{22}+\sigma_{22}+\sigma_{21}-\sigma_{21}\sigma'_{21}-\sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} = -\varrho'_{21}-\varrho'_{22}-\varrho_{22}-\varrho_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{21}-\varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} = -\varrho'_{11}-\varrho'_{12}-\varrho_{12}-\varrho_{11}-\varrho_{11}\varrho'_{11}-\varrho_{12}\varrho'_{12}. \end{cases}$$

Ich behaupte nun, dass für alle diejenigen Transformationen zweiten Grades, in denen nicht $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, das transformirte $\Pi(0, 0)_{14}$ nicht Null sein kann. Da nämlich die Function $\Pi(v_1, v_2)_{14}$ eine gerade ist, so wird sie sich unter der angenommenen Bedingung, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nicht sämmtlich gerade Zahlen sind, durch die Summe von zwei ϑ-Producten ausdrücken lassen von der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_{14} = (1)\vartheta(v_1, v_2)_\alpha\vartheta(v_1, v_2)_\beta + (2)\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma},$$

worin nach der obigen Theorie die ϑ-Producte stets so gewählt werden können, dass α und β Indices gerader, $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ Indices ungerader ϑ-Functionen sind. Lässt man nun die Argumente v_1, v_2 verschwinden, so zeigt die Annahme

$$\Pi(0, 0)_{14} = 0,$$

dass $(1) = 0$ ist und wir erhalten somit die Transformationsgleichung:

$$(e.) \qquad \Pi(v_1, v_2)_{14} = (2)\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma}.$$

Da es nun, wie früher gezeigt wurde, stets Substitutionen in halben Perioden für die Argumente v_1, v_2 giebt, welche die Indices der rechten Seite von $(e.)$ ändern, während sie den der linken Seite unverändert lassen, so kann man aus $(e.)$ unmittelbar die Gleichung:

$$(f.) \qquad \Pi(v_1, v_2)_{14} = (2)\,\varepsilon\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma\delta}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma\delta}$$

herleiten, woraus folgt, dass:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma} = \varepsilon\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma\delta}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma\delta},$$

eine Relation, die offenbar nur für $\tau_{12} = 0$ oder für die hieraus durch lineare Transformation hervorgehenden *Abel*schen Systeme stattfinden kann.

Da die eben gemachten Schlüsse von dem Index 14 der transformirten ϑ-Function ganz unabhängig waren, so folgt, dass keine gerade durch eine Transformation zweiten Grades erhaltene ϑ-Function, für welche die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nicht sämmtlich gerade sind, für die Nullwerthe der Argumente verschwinden kann.

Es bleiben jetzt noch alle die Transformationen zweiten Grades zu untersuchen, in denen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen sind, sich also $\vartheta(v_1, v_2)_{14}$ als die Summe von vier mit Constanten multiplicirten ϑ-Quadraten darstellen lässt.

Diese Transformationen können entweder die oben aufgestellten Repräsentanten der 15 nicht äquivalenten Klassen selbst sein oder durch lineare Transformation aus diesen abgeleitete. Ist das Letztere der Fall, so fassen wir den Repräsentanten heraus, welcher zur Klasse der fraglichen Transformation gehört, und es wird sodann

$$\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14}$$

gleich einer mit einer Constanten multiplicirten zu jener Fundamentaltransformation gehörigen geraden ϑ-Function sein, welche aus der ersten durch eine lineare Substitution hervorgeht. Es wird also nach der eben gemachten Annahme auch diese gerade ϑ-Function, die durch eine von den Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen dargestellte Transformation zweiten Grades aus dem ursprünglichen Systeme abgeleitet ist, durch eine Summe von vier ϑ-Quadraten darstellbar sein und für die Nullwerthe der Argumente verschwinden müssen. Es bleibt mithin nur zu untersuchen übrig, welche von den 15 unter einander nicht äquivalenten Transformationen (17.) ein gerades transformirtes ϑ, welches durch die Summe von ϑ-Quadraten darstellbar ist, für die Nullwerthe der Argumente verschwinden lassen.

Setzt man also allgemein:

$$(g.)\quad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\alpha)\vartheta(v_1, v_2)^2_\alpha + (\beta)\vartheta(v_1, v_2)^2_\beta + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2)^2_\gamma + (\delta)\vartheta(v_1, v_2)^2_\delta,$$

worin

$$\Pi(0, 0)_\lambda = 0$$

angenommen wird, so wissen wir, dass es drei Substitutionen in halben Perioden für v_1, v_2 giebt, welche die Indices der rechten Seite ändern, während sie die linke Seite unverändert lassen; es wird also die nothwendige Bedingung für die Reduction der Integrale offenbar die sein, dass die auf der rechten Seite der aus $(g.)$ hervorgehenden Gleichungen entstehende Determinante, welche aus Quadraten von ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente besteht, verschwinden muss. Hierbei ist nun wesentlich zu bemerken, dass wir bei der Herstellung dieser vier Gleichungen von dem Index λ der transformirten geraden ϑ-Function unabhängig sind, da die oben angegebenen Substitutionen

$$(h.)\quad \tfrac{1}{2}\omega_{11},\quad \tfrac{1}{2}\omega_{12};\quad \tfrac{1}{2}\omega_{21},\quad \tfrac{1}{2}\omega_{22};\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{11},\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{12};\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{21},\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{22}$$

nur durch die Transformationszahlen ϱ, σ, ϱ', σ' bestimmt werden.

Da wir ferner die Indices α, β, γ, δ nach Belieben annehmen dürfen *), wobei es am zweckmässigsten sein wird, für α den Index einer geraden, für β, γ, δ die Indices von ungeraden ϑ-Functionen zu wählen, so kommt die Untersuchung endlich darauf hinaus, auf den Ausdruck:

$$(\alpha)\vartheta(v_1, v_2)^2_5 + (\beta)\vartheta(v_1, v_2)^2_1 + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2)^2_3 + (\delta)\vartheta(v_1, v_2)^2_{13}$$

für die fünfzehn in den Schematen (17.) angegebenen Transformationsfälle die durch $(h.)$ bestimmten Substitutionen anzuwenden und die aus dem Verschwinden der aus ϑ-Quadraten bestehenden Determinante hervorgehenden Relationen zwischen den Integralmoduln herzuleiten.

---

*) in soweit wenigstens, als zwischen den vier ϑ-Quadraten:

$$\vartheta(v_1, v_2)^2_\alpha,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_\beta,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_\gamma,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_\delta$$

keine lineare Relation besteht.

Führt man diese Untersuchung durch, auf deren Einzelnheiten ich hier nicht näher eingehe, da sie keine weiteren Schwierigkeiten bietet, so findet man, dass die durch die Zahlen

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

definirte Transformation die Bedingung liefert:

$$\begin{vmatrix} \vartheta_5^2 & \vartheta_1^2 & \vartheta_3^2 & \vartheta_{13}^2 \\ \vartheta_{12}^2 & \vartheta_2^2 & \vartheta_{04}^2 & \vartheta_{23}^2 \\ \vartheta_4^2 & -\vartheta_{14}^2 & -\vartheta_{34}^2 & \vartheta_{02}^2 \\ \vartheta_{03}^2 & -\vartheta_{24}^2 & -\vartheta_0^2 & \vartheta_{01}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$-\vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2 . \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{14}^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{23}^2 = 0,$$

oder

$$\mu^2 = \varkappa^2 . \lambda^2,$$

während die anderen Fälle dieselbe oder die durch lineare Transformationen aus dieser abgeleiteten Relationen

$$\varkappa^2 - \lambda^2 = \mu^2(1-\lambda^2), \quad \varkappa^2 - \lambda^2 = \lambda^2(\varkappa^2 - \mu^2)$$

liefern.

Wir gelangen somit zu dem Resultat, dass das *Jacobi*sche Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)}}$$

sowie die aus diesem durch lineare Transformation hervorgehenden die einzigen *Abel*schen Integrale erster Ordnung sind, die sich durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reduciren lassen. —

Greifswald, Januar 1866.