Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn D. Hilbert.)

Von

Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

In Ihrem geschätzten Schreiben vom 27. September 1905 bemerken Sie, daß „die Mannigfaltigkeit M*) die Grenzen $b_1 = \infty$, $b_2, b_3, \cdots$ beliebig; $b_2 = \infty$, $b_1, b_3, \cdots$ beliebig; $\cdots$ besitzt, d. h. jedenfalls an diesen Stellen ebenfalls die Kenntnis der analytischen Abhängigkeit der β von den b nötig ist, damit die Kontinuitätsmethode anwendbar wird".

Ich habe mich in meiner Arbeit darauf beschränkt zu sagen, daß die von Herrn Poincaré aufgestellten Prinzipien der méthode de continuité den Schluß gestatten, daß auch jedem Punkte von M ein Punkt von M entsprechen müsse. Mit Rücksicht auf Ihre Bemerkung möchte ich mir aber erlauben, etwas ausführlicher auf die Darlegung der in Betracht kommenden Schlüsse einzugehen, namentlich um zu zeigen, daß sich auch das Verhalten der β, wenn die b in eine der singulären Stellen der Mannigfaltigkeit M einrücken, in sehr einfacher Weise direkt angeben läßt.

Es sei

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

ein kanonisches lineares Differentialsystem, für das (wie in meiner erwähnten Abhandlung) der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden möge, daß die Wurzeln der zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen

$$|A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} r| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1), \tag{2}$$

wo

$$A_{ik}^{(\sigma+1)} = -\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)},$$

---

*) Siehe meine Abhandlung Crelles Journal Bd. 130, S. 43.

keine ganzzahligen Differenzen aufweisen. Es seien $r_1^{(\nu)}, \cdots, r_n^{(\nu)}$ die Wurzeln der Gleichung (2). Die zum singulären Punkte a_ν gehörige Integralmatrix hat die Form:

$$\left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right) = \left((x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ik}^{(\nu)}\right),$$

wo die $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ Funktionen bedeuten, die in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph sind und deren Determinante $|\varphi_{ik}^{(\nu)}|$ für $x = a_\nu$ von Null verschieden ist. Aus den Gleichungen

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right) = \left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right)^{-1}\left(\frac{d\eta_{ik}^{(\nu)}}{dx}\right)$$

oder, wenn

$$\left(\varphi_{ik}^{(\nu)}\right)^{-1} = \left(\psi_{ik}^{(\nu)}\right)$$

gesetzt wird, aus

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \frac{d\varphi_{\lambda k}^{(\nu)}}{dx} + \frac{r_\lambda^{(\nu)}}{x-a_\nu} \psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)$$

folgt die Darstellung

$$(3) \qquad \left(A_{ik}^{(\nu)}\right) = \left(\varphi_{ik}^{(\nu)}\right)_{a_\nu}^{-1} \begin{pmatrix} r_1^{(\nu)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & r_n^{(\nu)} \end{pmatrix} \left(\varphi_{ik}^{(\nu)}\right)_{a_\nu},$$

wo der den Matrizen angehängte Buchstabenindex andeuten soll, daß die Elemente der Matrix für den betreffenden Wert von x zu nehmen sind.

Es möge nun (y_{ik}) diejenige Integralmatrix bedeuten, die sich für den regulären Punkt $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix (δ_{ik}) reduziert, und es sei

$$(y_{ik}) = \left(c_{ik}^{(\nu)}\right)\left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right);$$

dann ist also

$$\left(c_{ik}^{(\nu)}\right) = \left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right)_{x_0}^{-1},$$

und folglich ist die Fundamentalsubstitution, die (y_{ik}) bei Umkreisung des Punktes a_ν erfährt, in der Form

$$\left(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}\right) = \left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right)_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_1^{(\nu)}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_n^{(\nu)}} \end{pmatrix} \left(\eta_{ik}^{(\nu)}\right)_{x_0}$$

oder in der Form

$$(4) \qquad \left(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}\right) = \left(\varphi_{ik}^{(\nu)}\right)_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_1^{(\nu)}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_n^{(\nu)}} \end{pmatrix} \left(\varphi_{ik}^{(\nu)}\right)_{x_0}$$

dargestellt.

Denken wir uns für ein bestimmtes Differentialsystem (1) die $r_k^{(\nu)}$ ein für alle Male fixiert, so hängen die $A_{ik}^{(\nu)}$ noch von gewissen willkürlichen Parametern $b_1, \cdots, b_N$, wo $N = n^2\sigma - (\sigma+1)n + 1$, ab, deren Mannigfaltigkeit M in dem Sinne als eine geschlossene zu bezeichnen ist, daß sie durch keine Mannigfaltigkeit von um Eins niedrigerer, also $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension begrenzt wird.*) In der Tat haben als singuläre Stellen von M nur diejenigen Wertesysteme der $b_1, \cdots, b_N$ zu gelten, für die mindestens eines der $A_{ik}^{(\nu)}$ unendlich wird, und diese bilden Mannigfaltigkeiten von höchstens $2N-2$ Dimensionen; wir bezeichnen die Gesamtheit dieser singulären Mannigfaltigkeiten mit S.

Gehen wir andererseits von einem bestimmten System von Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ aus, und denken wir uns die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichungen fixiert, so hängen die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ von gewissen willkürlichen Parametern $\beta_1, \cdots, \beta_N$ ab, deren Mannigfaltigkeit M ebenfalls als eine geschlossene bezeichnet werden muß, indem ihre singulären Stellen auch wieder nur diejenigen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ sind, für die mindestens eines der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ unendlich wird, so daß die Gesamtheit dieser Stellen Σ also auch aus höchstens $(2N-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten besteht.

Legen wir das Differentialsystem (1) der Betrachtung zugrunde, so sind nach einem Satze des Herrn Poincaré die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ als ganze transzendente Funktionen der $A_{ik}^{(\nu)}$ bestimmt. Die inversen dieser ganzen transzendenten Funktionen, d. h. also die $A_{ik}^{(\nu)}$ als Funktionen der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ sind im allgemeinen unendlich vieldeutig, wenn wir aber die $r_k^{(\nu)}$ fixieren, so ist nach dem Fundamentalsatze der Nr. XII meiner Arbeit**) ein eindeutiges Zweigsystem dieser inversen Funktionen festgelegt, es sind also die $\beta_1, \cdots, \beta_N$ monogene eindeutige Funktionen der $b_1, \cdots, b_N$

$$\beta_k = E_k(b_1, \cdots, b_N) \qquad (k = 1, 2, \cdots, N), \tag{5}$$

deren inverse Funktionen ebenfalls eindeutig sind. Die singulären Stellen der Funktionen (5) sind die Stellen S. — Um nun das Verhalten der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ zu untersuchen, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ in eine Stelle S einrücken, d. h. wenn eines der $A_{ik}^{(\nu)}$ so unendlich wird, daß die $r_k^{(\nu)}$ festbleiben, greifen wir auf die Gleichungen (3), (4) zurück. Nach (3) ist

$$A_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} r_\lambda^{(\nu)} \left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)_{x=a_\nu},$$

soll also $A_{ik}^{(\nu)}$ in der angegebenen Weise unendlich groß werden, so muß mindestens einer der Werte $\left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)_{x=a_\nu}$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ unendlich groß

*) Vergl. Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277 oben.

**) Crelles Journal Bd. 130, p. 35.

werden. Die Funktionen $\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)}$ sind aber ihrer Definition gemäß mit Ausnahme der Stellen

$$a_\mu(\mu \neq \nu) \quad \text{und} \quad \infty$$

allenthalben holomorph. Denken wir uns diese Funktionen in der Umgebung von $x = a_\nu$ dargestellt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = E_{i\lambda k\nu}^{(0)} + E_{i\lambda k\nu}^{(1)}(x - a_\nu) + \cdots$$

und dann nach dem Punkte $x = x_0$ hin in der durch die Querschnitte (a_ν, ∞) $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ zerschnittenen Ebene fortgesetzt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = C_{i\lambda k\nu}^{(0)} + C_{i\lambda k\nu}^{(1)}(x - x_0) + \cdots,$$

so kann man $E_{i\lambda k\nu}^{(0)}$ dem absoluten Betrage nach stets so groß wählen, daß $C_{i\lambda k\nu}^{(0)}$ dem absoluten Betrage nach größer wird als eine beliebig große positive Zahl; da aber nach (4)

$$\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_\lambda^{(\nu)}} C_{i\lambda k\nu}^{(0)}$$

ist, so heißt dies nichts anderes, als daß, wenn ein $A_{ik}^{(\nu)}$ so ins Unendliche rückt, daß die $r_k^{(\nu)}$ fest bleiben, mindestens ein $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ ebenfalls ins Unendliche rückt. Damit ist also gezeigt, daß, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ in eine Stelle von S einrücken, die durch die Funktionen (5) gegebenen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ in eine Stelle von Σ einrücken müssen. Es kann folglich*) keine Mannigfaltigkeit $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension geben, die die Mannigfaltigkeit M der $\beta_1, \cdots, \beta_N$ derart in zwei Gebiete zerschneidet, daß in dem einen dieser Gebiete alle diejenigen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ enthalten sind, die als Wertsysteme der Funktionen (5) zum Vorschein kommen, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ die ganze Mannigfaltigkeit M durchlaufen. Denn ein Punkt dieser hypothetischen Mannigfaltigkeit $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension könnte nur entweder dadurch erreicht werden, daß die Funktionaldeterminante der β nach den b verschwindet, was ausgeschlossen ist, weil die b sich aus den Gleichungen (5) als eindeutige Funktionen der β ergeben, oder dadurch, daß die b in eine Stelle S einrücken, was aber ebenfalls ausgeschlossen ist, weil dann, wie gezeigt worden ist, die β in eine Stelle Σ einrücken, und Σ höchstens von $(2N-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Der Wertevorrat der Funktionen (5) muß also die ganze Mannigfaltigkeit M erfüllen, d. h. es entspricht jedem Punkte von M auch ein Punkt von M.

Klausenburg, den 11. Oktober 1905.

*) Vergl. den analogen Schluß bei Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277, 278.