

Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich.

Von

OSKAR BOLZA in Freiburg i. Br.

Im folgenden beabsichtige ich, ein Referat über eine Arbeit „Ueber Binärformen mit linearen Substitutionen in sich“ zu geben, welche demnächst im American Journal of Mathematics in extenso erscheinen wird.

Es werden zunächst alle Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich bestimmt, sodann werden die nothwendigen und hinreichenden Relationen aufgestellt, welche für diese speciellen Formen sechster Ordnung einerseits zwischen den rationalen Invarianten, andererseits zwischen den \mathfrak{S} -Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ bestehen.

Im Zusammenhang damit wird in dem invariantentheoretischen Theil der Untersuchung eine Ergänzung zu dem Theorem von Clebsch über die lineare Transformirbarkeit zweier Binärformen sechster Ordnung in einander gegeben.

Die hier behandelten Fragen haben ein gewisses principiellcs Interesse für die Theorie der hyperelliptischen Modulfuntionen; in der That stellen die eben erwähnten Relationen zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ Kanten und Ecken des bisher noch unbekannten Fundamentalraums für die hyperelliptischen Modulfuntionen dar, und die Frage der linearen Transformirbarkeit zweier Formen sechster Ordnung in einander hängt aufs engste mit der Frage zusammen: ob die rationalen absoluten Invarianten der Binärform sechster Ordnung eindeutige Functionen der Argumente τ_{11} , τ_{12} , τ_{22} sind.

In diesem Sinne ist die vorliegende Arbeit, welche auf Anregung von Herrn Prof. F. Klein entstanden ist, als eine Vorarbeit für die Theorie der hyperelliptischen Modulfuntionen zu betrachten.

§ 1.

Bestimmung aller Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich.

Wenn eine Binärform sechster Ordnung f bei einer Reihe von linearen Substitutionen S, S', S'', \dots invariant*) bleibt, so bildet die Gesamtheit dieser Substitutionen eine Gruppe G ; und es lässt sich zeigen, dass diese Gruppe endlich ist, vorausgesetzt, dass man die Substitutionen S auf die Determinante 1 bringt.

Sehen wir von der trivialen Gruppe:

$$x_1 = \pm x'_1, \quad x_2 = \pm x'_2$$

welche jede Binärform sechster Ordnung invariant lässt, ab, so muss daher G eine der folgenden endlichen binären Gruppen sein:

- 1) eine cyklische Gruppe, oder
- 2) eine Diedergruppe, oder
- 3) die Tetraedergruppe, oder
- 4) die Oktaedergruppe, oder
- 5) die Ikosaedergruppe.

Aus der Theorie der endlichen binären Gruppen kennt man für jede derselben die Gestalt der allgemeinsten Binärform, welche bei Anwendung der Substitutionen der betreffenden Gruppe bis auf einen constanten Factor invariant bleibt; indem man nun alle diejenigen Fälle aufsucht, in welchen dieser allgemeinste Ausdruck einer invarianten Form speciell eine Form sechster Ordnung darstellt, gelangt man zu folgendem Resultat:

Jede Binärform sechster Ordnung, welche ausser den Substitutionen $x_1 = \pm x'_1, x_2 = \pm x'_2$ lineare Substitutionen in sich besitzt, und deren Wurzeln alle von einander verschieden sind, lässt sich durch eine lineare Transformation auf eine der folgenden kanonischen Formen reduciren:

Kanonische Form F :		Zugehörige binäre Gruppe:
(A) {	I. $z_1^6 + \alpha z_1^4 z_2^2 + \beta z_1^2 z_2^4 + z_2^6$	Cyklische Gruppe $n = 2$
	II. $z_1(z_1^5 + z_2^5)$	Cyklische Gruppe $n = 5$
	III. $z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$ $\alpha \geq 0, \alpha \geq \pm \frac{10}{3}$	Diedergruppe $n = 2$
	IV. $z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^6$ $\alpha \geq 0, \alpha \geq \pm \sqrt{-50}$	Diedergruppe $n = 3$
	V. $z_1^6 + z_2^6$	Diedergruppe $n = 6$
	VI. $z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)$	Oktaedergruppe

*) Darunter ist im folgenden immer verstanden: invariant bis auf einen constanten Factor.

Die beigefügten Ungleichungen für den Parameter α sind nöthig, um jedesmal diejenigen speciellen Fälle auszuschliessen, in denen die Binärform sechster Ordnung bei einer umfassenderen Gruppe invariant bleibt. Z. B. würde:

$$F = z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$$

bei $\alpha = 0$ sich auf die Form der Oktaedergruppe reduciren, während bei $\alpha = \pm \frac{10}{3}$ F sich durch eine lineare Transformation auf die Form $z_1^6 + z_2^6$ reduciren liesse. Die entsprechende Ungleichung für den Fall I ergibt sich aus dem folgenden Paragraphen.

§ 2.

Die Invariantenrelationen.

Es handelt sich jetzt darum, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass eine Binärform sechster Ordnung durch lineare Transformation auf eine der eben angegebenen kanonischen Formen reducirbar ist.

Für die Fälle I und II sind diese Bedingungen bereits von Clebsch*) in Gestalt von Invariantenrelationen mitgetheilt worden; für die übrigen Fälle findet man die Bedingungen in einer Arbeit von Herrn Maisano**) in Gestalt von Covariantenbedingungen angegeben. Aber auch in diesen Fällen lassen sich die Kriterien durch Invariantenrelationen ausdrücken. Dieselben sind, unter Benutzung der Clebsch'schen Bezeichnungsweise, in der unten folgenden Tabelle in der zweiten Colonne zusammengestellt.

In der dritten Colonne ist für jeden der vier ersten Fälle eine quadratische Covariante angegeben, welche, in den kanonischen Variablen z_1, z_2 geschrieben, die Form hat:

$$\text{Const. } z_1 z_2,$$

woraus sich unmittelbar die lineare Substitution ergibt, durch welche die Form f mit den beliebigen Variablen x_1, x_2 auf die kanonische Form F mit den kanonischen Variablen z_1, z_2 reducirt wird; man hat nur für z_1, z_2 die beiden Linearfactoren der betreffenden quadratischen Covariante zu wählen, und dieselben mit solchen constanten Factoren zu multipliciren, dass in dem Ausdruck für F der Anfangs- und Endterm den Coefficienten 1 erhält.

Für die Fälle V und VI verschwinden alle quadratischen Covarianten identisch; es ist daher hier ein anderes Verfahren anzuwenden; dasselbe beruht darauf, dass die Bestimmung der kanonischen Variablen z_1, z_2

*) Theorie der binären algebraischen Formen.

**) Sulla Sestica binaria, Atti della R. Accademia dei Lincei, 1883—84.

für unsere Formen mit linearen Substitutionen in sich identisch ist mit der Lösung des zur betreffenden Gruppe von linearen Substitutionen gehörigen Formenproblems.

Darnach erhält man für den Fall V z_1 und z_2 aus den beiden Gleichungen:

$$z_1^6 + z_2^6 = f, \quad z_1^6 - z_2^6 = \frac{\sqrt{f^2 A^2 - 2z^2}}{A},$$

für den Fall VI durch Auflösung der Gleichung:

$$16\varphi^3 + 6 \cdot \left(\frac{9}{A}\right)^{\frac{1}{3}} H \cdot \varphi + f^2 = 0,$$

deren drei Wurzeln sind:

$$\varphi_1 = (z_1 z_2)^2,$$

$$\varphi_2 = \frac{(z_1^2 - i z_2^2)^2}{4i},$$

$$\varphi_3 = \frac{-(z_1^2 + i z_2^2)^2}{4i}.$$

Wir lassen die Tabelle für die Invariantenrelationen folgen:

	Kanonische Form	Invariantencriterien	Quadr. Covariant
I.	$z_1^6 + \alpha z_1^4 z_2^2 + \beta z_1^2 z_2^4 + z_2^6$	$R = 0$ $A_{ii} A_{mm} - A_{im}^2 \geq 0$	$(lm)l_x m$
II.	$z_1(z_1^5 + z_2^5)$	$A = 0, B = 0, C = 0$ $D \geq 0$	m
III.	$z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$ $\alpha \geq 0, \alpha \geq \pm \frac{10}{3}$	$4B^3 + 5ABC + 6C^2 - 3AD = 0$ $3AB^2 - 6BC + 4A^2C - 18D = 0$ $D \geq 0, 6C^2 - B^3 \geq 0$	l
IV.	$z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^6$ $\alpha \geq 0, \alpha \geq \pm \sqrt{-50}$	$6C^2 - B^3 = 0$ $9D - 2B(6C + AB) = 0$ $D \geq 0, 2AB - 15C \geq 0$	l
V.	$z_1^6 + z_2^6$	$6B - A^2 = 0, 6C + AB = 0, D = 0$ $A \geq 0$	
VI.	$z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)$	$B = 0, C = 0, D = 0$ $A \geq 0$	

§ 3.

Excurs über die lineare Transformirbarkeit zweier Binärformen sechster Ordnung in einander.

Im allgemeinen sind zwei Formen sechster Ordnung f und f' linear in einander transformirbar, sobald die entsprechenden absoluten Invarianten beider Formen einander gleich sind, wie Clebsch mit Hilfe der typischen Darstellung der Binärform sechster Ordnung durch quadratische Covarianten bewiesen hat.

Der Beweis verliert jedoch seine Gültigkeit in denjenigen Fällen, in welchen die typische Darstellung nicht möglich ist. Es soll in diesem Paragraphen die Frage beantwortet werden ob auch in diesen Ausnahmefällen die Gleichheit der absoluten Invarianten für die lineare Transformirbarkeit zweier Formen in einander hinreichend ist.

Nach den Untersuchungen von Clebsch wird die typische Darstellung durch quadratische Covarianten nur in folgenden Fällen unmöglich:

- 1) wenn f sich durch lineare Transformation auf eine der kanonischen Formen III bis VI der Tabelle (A) reduciren lässt;
- 2) wenn f eine drei- oder mehrfache Wurzel besitzt.

Was zunächst den ersten Fall betrifft, so folgt aus den in § 2 mitgetheilten Resultaten, dass hier die Gleichheit der absoluten Invarianten in der That hinreichend ist. Denn da diese Fälle durch *Invariantencriterien* vollkommen charakterisirt sind, und da der in Fall III und IV auftretende Parameter α beidemale die *Quadratwurzel aus einer rationalen absoluten Invariante* ist, so kann man die Formen f und f' in ein und dieselbe dritte Form transformiren, nämlich in die kanonische Form der Tabelle (A).

Dagegen ist im Fall einer vier-, oder fünf-, oder sechsfachen Wurzel die Gleichheit der absoluten Invarianten nicht hinreichend, da alle drei Fälle $A = B = C = D = 0$ liefern, sich also gar nicht durch Invariantencriterien von einander unterscheiden lassen.

Ebenso ist aber auch im Fall einer dreifachen Wurzel die Gleichheit der absoluten Invarianten nicht hinreichend. Denn obgleich sich die Kriterien für das Auftreten einer dreifachen Wurzel durch Invariantenrelationen ausdrücken lassen, so lassen sich doch die verschiedenen dabei möglichen Fälle, nämlich:

- eine dreifache und drei einfache Wurzeln,
- eine dreifache, eine doppelte und eine einfache Wurzel,
- zwei dreifache Wurzeln,

nicht durch Invariantencriterien von einander trennen,

Man kann also dem Satz über die lineare Transformirbarkeit

zweier Binärformen sechster Ordnung in einander die folgende präzisere Fassung geben:

Die Gleichheit der entsprechenden rationalen absoluten Invarianten zweier Binärformen sechster Ordnung ist hinreichend für die lineare Transformirbarkeit der beiden Formen in einander, mit einziger Ausnahme derjenigen Fälle, in denen eine der beiden Formen eine drei- oder mehrfache Wurzel besitzt.

§ 4.

Die Relationen zwischen den ϑ -Moduln $\tau_{\alpha\beta}$.*).

Den Relationen, welche zwischen den *algebraischen* Invarianten der Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich bestehen, entsprechen Relationen zwischen den *transcendenten* Invarianten derselben, d. h. zwischen den ϑ -Moduln τ_{11} , τ_{12} , τ_{22} .

Man beweist zunächst:

Wenn eine Binärform sechster Ordnung f mit lauter ungleichen Wurzeln lineare Substitutionen in sich besitzt, und es ist τ_{11} , τ_{12} , τ_{22} irgend ein zu \sqrt{f} gehöriges System von ϑ -Moduln, so entspricht jeder linearen Substitution S der Variablen z_1, z_2 , welche f invariant lässt, eine lineare Transformation s der Perioden, welche das Werthsystem $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ invariant lässt.

Umgekehrt: Wenn ein zu einer Binärform sechsten Grades mit lauter ungleichen Wurzeln gehöriges System von ϑ -Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ bei einer linearen Periodentransformation s ungeändert bleibt, so bleibt die Form f bei einer linearen Substitution S der Variablen invariant.

Und wenn die lineare Substitution S der Variablen von der Substitution

$$z_1 = \pm z'_1, \quad z_2 = \pm z'_2$$

verschieden ist, so ist die entsprechende lineare Periodentransformation s nicht congruent zur Identität modulo 2, und umgekehrt.

Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass das System der ϑ -Moduln bei der Periodentransformation s invariant bleibt, stellen aber gerade die gesuchten Relationen zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ dar, und aus dieser Ableitung derselben ergibt sich zugleich ihre oben erwähnte Bedeutung als Kanten und Ecken des Fundamentalraums für die hyperelliptischen Modulfunctionen.

Die Bestimmung der linearen Periodentransformation s erfolgt dadurch, dass man die conforme Abbildung des bei der Berechnung

*) Vgl. hierzu die Angaben des Hrn. Wiltheiss in Bd. 21 dieser Annalen, p. 398.

der $\tau_{\alpha\beta}$ zu Grunde gelegten Systems von Periodenwegen betrachtet, welche durch die lineare Substitution S der Variablen z_1, z_2 vermittelt wird. Es zeigt sich dabei, dass in allen Fällen die Betrachtung einer einzigen Substitution der Variablen z_1, z_2 genügt, um alle zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ bestehenden Relationen zu erhalten.

Wir stellen in der folgenden Tabelle die Resultate zusammen, wie sie sich bei geeigneter Wahl der Periodenwege ergeben:

	Kanonische Form	Relation zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$
I.	$z_1^6 + \alpha z_1^4 z_2^2 + \beta z_1^2 z_2^4 + z_2^6$	$\tau_{12} = \frac{1}{2}$
II.	$z_1(z_1^5 + z_2^5)$	$\tau_{11} = 1 - j^2, \tau_{12} = -j - j^2, \tau_{22} = j^3$ $j = e^{\frac{4\pi i}{5}}$
III.	$z_1 z_2 (z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4)$	$\tau_{12} = \frac{1}{2}$ $\tau_{11} = \tau_{22}$
(C) IV.	$z_1^6 + \alpha z_1^3 z_2^3 + z_2^6$	$\tau_{12} = \frac{1}{2}$ $12\tau_{11}\tau_{22} + 1 = 0$
V.	$z_1^6 + z_2^6$	$\tau_{12} = \frac{i}{2}$ $\tau_{11} = \tau_{22} = \frac{i}{2\sqrt{3}}$
VI.	$z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)$	$\tau_{12} = \frac{1}{2}$ $\tau_{11} = \tau_{22} = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$

Aus der Umkehrung des im Eingang dieses Paragraphen angeführten Satzes lässt sich zeigen, dass die angegebenen Relationen zugleich *hinreichend* sind; nur müssen noch gewisse Ungleichungen hinzugefügt werden, um die verschiedenen Fälle vollkommen von einander zu trennen (siehe die analoge Bemerkung zur Tabelle (A)).

Göttingen, den 1. August 1887.