

BESTIMMUNG EINER KLASSE  
 VON BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONSGRUPPEN  
 DES DREIFACH AUSGEDEHNTEN RAUMES  
 VON  
 GEORG SCHEFFERS  
 in LEIPZIG.

In der LIE'schen Theorie der *continuierlichen Transformationsgruppen* spielen die sogenannten *Berührungstransformationen* eine äusserst wichtige Rolle, namentlich auch wegen ihrer fundamentalen Bedeutung für die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen. Für ihre Anwendung ist es von ganz besonderem Vorteil, alle *Gruppen* von Berührungstransformationen auf typische Formen zurückgeführt zu haben. Bisher ist dieses Problem für die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zum Abschlusse gebracht worden, indem SOPHUS LIE zeigte, dass alle endlichen continuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene, welche sich nicht auf blosse Punkttransformationsgruppen reducieren lassen, durch drei gewisse typische Formen dargestellt werden. Es steht zu erwarten, dass es im Raume von drei Dimensionen weit mehr Typen solcher Gruppen geben wird, und daher ist es zweckmässig, das betreffende Problem für den Raum nur schrittweise, in mehreren Einzelproblemen, in Angriff zu nehmen.

Herr Professor LIE veranlasste mich, zunächst eines dieser Einzelprobleme zu behandeln. Die vorliegende Arbeit giebt die Lösung desselben. Es ist meine Pflicht, an dieser Stelle hervorzuheben, dass ich Herrn Prof. LIE zum grössten Danke verpflichtet bin für die mannigfache

Unterstützung, die er meinen Untersuchungen gewährte. Meine Arbeit verdankt ihm ausser der Anleitung mehrere wertvolle Gesichtspunkte, durch die erst die Möglichkeit zu ihrer Durchführung gegeben wurde.

Diese im wesentlichen von LIE herrührenden Betrachtungen haben in der Einleitung ihren Platz gefunden. Eine andere LIE'sche Betrachtung ist an einer späteren Stelle wiedergegeben worden. Des besseren Verständnisses halber sehe ich mich veranlasst, in der Einleitung auch die fundamentalen Formeln für Berührungstransformationen des Raumes kurz zusammenzustellen.<sup>1</sup> Was endlich die allgemeinen Begriffe und Sätze über Transformationsgruppen überhaupt anlangt, welche im folgenden fortwährend verwendet werden, so muss ich zu ihrer Begründung auf den kürzlich erschienenen I. Abschnitt des LIE'schen Lehrbuches<sup>2</sup> verweisen.

### *Einleitung.*

A. Bezeichnen  $x_1, x_2, x_3$  Cartesische Punktcoordinaten in einem dreifach ausgedehnten Raume — dem  $R_3$  —, so wird eine durch den Punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  gehende Ebene, deren laufende Punktcoordinaten etwa  $X_1, X_2, X_3$  sind, analytisch dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$\sum_1^3 p_k (X_k - x_k) = 0.$$

Mithin lassen sich  $x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3$  als Coordinaten des durch diese Ebene im Punkte  $(x_1, x_2, x_3)$  bestimmten *Flächenelementes* auffassen. Dabei ist zu beachten, dass  $p_1, p_2, p_3$  *homogene* Bestimmungsstücke vorstellen.

<sup>1</sup> Professor LIE's wichtigste Untersuchungen über Berührungstransformationen und Gruppen von Berührungstransformationen sind in den folgenden Arbeiten auseinandergesetzt: Analytische Theorie der Berührungstransformationen, Gesellsch. d. Wissensch. zu Christiania 1873; Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Math. Ann. Bd. 8, 1874; Göttinger Nachrichten Decbr. 1874; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1878 u. 1879.

<sup>2</sup> SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*. Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Dr. F. ENGEL bearbeitet. Leipzig, Teubner 1888.

Die Bedingung dafür, dass das Flächenelement  $(x_k, p_k)$  mit dem ihm unendlich benachbarten Elemente  $(x_k + dx_k, p_k + dp_k)$  *vereinigt* liege, d. h. der Punkt des einen Elementes auf dem anderen gelegen sei, drückt sich durch die Gleichung aus:

$$(1) \quad \sum_1^3 p_k dx_k = 0.$$

Eine Transformation der Flächenelemente, welche vereinigt liegende Elemente in ebensolche überführt, d. h. eine sogenannte *Berührungstransformation* des  $R_3$ , muss also die Gleichung (1) invariant lassen.

Es sei

$$Bf \equiv \sum_1^3 \xi_k(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^3 \pi_k(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

eine *infinitesimale* Berührungstransformation des  $R_3$ . Vermöge derselben muss die linke Seite der Gleichung (1) ein Increment erhalten, das ein blosses Vielfaches dieser linken Seite ist, d. h. es muss sein

$$B\left(\sum_1^3 p_k dx_k\right) \equiv \rho \cdot \sum_1^3 p_k dx_k,$$

wo  $\rho$  eine Function der  $x, p$  bedeutet, die aber  $\equiv 0$  angenommen werden darf; d. h.

$$(2) \quad \sum_1^3 p_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \pi_i \equiv 0, \quad \sum_1^3 p_k \frac{\partial \pi_k}{\partial p_i} \equiv 0. \quad (i=1,2,3)$$

Wenn umgekehrt die  $\xi_k$  und  $\pi_k$  diese 6 Relationen identisch erfüllen, so ist auch  $Bf$  eine infinitesimale Berührungstransformation des  $R_3$ .

Die Gleichungen (2) erfüllt man in allgemeinsten Weise dadurch, dass man

$$(3) \quad \xi_k \equiv \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \pi_k \equiv - \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k=1,2,3)$$

setzt, wo  $H$  eine hinsichtlich  $p_1, p_2, p_3$  von der *ersten* Ordnung *homogene*, sonst aber beliebige Function der  $x, p$  bedeutet.<sup>1</sup> Die allgemeine Form einer infinitesimalen Berührungstransformation in den Variablen  $x, p$  ist daher:

$$(4) \quad Bf \equiv \sum_1^3 \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \equiv (Hf),$$

<sup>1</sup> Vgl. LIE, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen*. Math. Annalen, Bd. 8, p. 239, 240.

wenn nämlich unter  $(uv)$  allgemein der Ausdruck

$$(5) \quad (uv) \equiv \sum_k^3 \left( \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} \right)$$

verstanden wird.<sup>1</sup>

$H$  ist die sogenannte *characteristische Function* der Berührungstransformation  $Bf$ .

Man kann nun durch blosse Ausrechnung folgenden Satz verificieren:

- (6) Besitzen die infinitesimalen Berührungstransformationen  $B_1f$  und  $B_2f$  in den Variablen  $x, p$  die charakteristischen Functionen  $H_1$  resp.  $H_2$ , so besitzt die durch Klammeroperation entstehende infinitesimale Berührungstransformation

$$(B_1B_2) \equiv B_1(B_2f) - B_2(B_1f)$$

die charakteristische Function

$$(H_1H_2) \equiv \sum_k^3 \left( \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} - \frac{\partial H_1}{\partial x_k} \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \right).$$

Statt der drei homogenen Variablen  $p_1, p_2, p_3$  können wir auch *nicht-homogene*, —  $y_1, y_2$  —, anwenden, indem wir etwa setzen

$$y_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}.$$

Dabei empfiehlt es sich, die hierdurch entstehende Unsymmetrie auch in den Variablen  $x_1, x_2, x_3$  zum Ausdruck zu bringen; wir schreiben  $z$  statt  $x_3$ .

Wir geben kurz die den obigen entsprechenden Formeln in den Coordinaten  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  an, da wir sie im folgenden gebrauchen werden:

Anstelle der Bedingung (1) für die vereinigte Lage zweier Flächenelemente tritt die Bedingung

$$(1') \quad dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0.$$

---

<sup>1</sup> Nicht zu verwechseln mit der Operation  $(AB)$  zwischen 2 infinitesimalen Transformationen  $Af$  und  $Bf$ .

## Die infinitesimale Transformation

$$Bf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

stellt eine Berührungstransformation in den Variabeln  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  dann und nur dann dar, wenn

$$(3') \quad \begin{cases} \xi_k \equiv \frac{\partial W}{\partial y_k}, & \eta_k \equiv -\frac{\partial W}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \zeta \equiv -W + y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} \end{cases} \quad (k=1,2)$$

ist, wo  $W$  irgend eine Function von  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  bezeichnet.  $W$  möge die *characteristische Function* der Berührungstransformation  $Bf$  in den Veränderlichen  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  heissen. Nach (3') ist

$$(4') \quad Bf \equiv \{Wf\} - f \frac{\partial W}{\partial z},$$

wenn allgemein

$$(5') \quad \{uv\} \equiv \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial y_2} + y_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y_1} \right) \\ + y_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y_2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}$$

gesetzt wird. Anstelle des Satzes (6) endlich tritt hier der folgende Satz:

(6') Besitzen die infinitesimalen Berührungstransformationen  $B_1 f$  und  $B_2 f$  des  $R_3$ , geschrieben in den Variabeln  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$ , die charakteristischen Functionen  $W_1$  resp.  $W_2$ , so besitzt die durch Klammeroperation entstehende infinitesimale Berührungstransformation

$$(B_1 B_2) \equiv B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$$

die characteristische Function  $\{W_1 W_2\}$ .

Noch sei Eines hervorgehoben: Besitzt eine infinitesimale Berührungstransformation in den Variabeln  $x, p$  die characteristische Function  $H$  und ist  $W$  die characteristische Function der durch Einführung der Ver-

änderlichen  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  aus ihr hervorgehenden Berührungstransformation, so besteht die leicht zu verificierende Relation

$$(7) \quad H = -p_3 W.$$

Wir werden späterhin uns fast ausschliesslich auf die Benutzung der Veränderlichen  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$ , die wir kurz als die *nichthomogenen* bezeichnen, beschränken. Auch werden wir sowohl beim Gebrauch der homogenen wie bei dem der nicht-homogenen Coordinaten gelegentlich eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function  $u$  einfach als die Transformation  $(u)$  bezeichnen.

B. Der Raum enthält  $\infty^5$  Flächenelemente. Eine continuierliche Schar von  $\infty^2$  Flächenelementen des  $R_3$ , von denen ein jedes mit allen infinitesimal benachbarten der Schar vereinigt liegt, heisst bekanntlich ein *Verein von Flächenelementen*.

Eine *Gruppe* von Berührungstransformationen des  $R_3$  ist nun dann und nur dann *reducibel*, d. h. vermöge einer Berührungstransformation in eine Gruppe von blossen Punkttransformationen überführbar, wenn sich die  $\infty^5$  Flächenelemente des  $R_3$  in  $\infty^3$  Vereine anordnen lassen, deren Inbegriff bei der Gruppe invariant bleibt, während die einzelnen Vereine unter einander vertauscht werden können. Ist nämlich diese Anordnung möglich, so kann man durch eine Berührungstransformation die  $\infty^3$  Vereine in diejenigen  $\infty^3$  Vereine des  $R_3$  überführen, deren jeder aus allen Flächenelementen besteht, die einen und denselben Punkt gemein haben.

Denn eine Zerlegung der Gesamtheit der  $\infty^5$  Flächenelemente des  $R_3$  in  $\infty^3$  Vereine wird — in den homogenen Coordinaten  $x, p$  — durch drei Gleichungen

$$(8) \quad X_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = c_i \quad (i=1,2,3)$$

vermittelt, in denen  $X_1, X_2, X_3$  von einander unabhängige nur die Verhältnisse der  $p$  enthaltende Functionen der  $x, p$  und die  $c_i$  willkürliche Constanten bedeuten; derart, dass diese Gleichungen, wenn in ihnen für  $c_1, c_2, c_3$  bestimmte Zahlenwerte gesetzt werden, jedesmal die  $\infty^2$  Flächenelemente eines der  $\infty^3$  Vereine darstellen. Dies thun sie aber dann und nur dann, wenn sie die Bedingung (1) der vereinigten Lage nach sich ziehen, d. h. (da dies für alle Wertetripel  $c_1, c_2, c_3$  gelten soll) wenn es

noch drei Functionen  $P_1, P_2, P_3$  der  $x, p$  giebt von der Beschaffenheit, dass

$$(9) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \equiv P_1 dX_1 + P_2 dX_2 + P_3 dX_3$$

wird. Die Gleichungen

$$(10) \quad x'_k = X_k, \quad p'_k = P_k \quad (k=1,2,3)$$

bestimmen hiernach eine Berührungstransformation der  $x, p$  in die  $x', p'$ . Denn dass sie umgekehrt nach den  $x, p$  auflösbar sind, lässt sich allgemein beweisen, ebenso wie man zeigen kann, dass die Forderung (9) bei noch unbekannten  $P_1, P_2, P_3$  immer in allgemeinsten Weise durch drei beliebige von einander unabhängige Functionen  $X_1, X_2, X_3$  von  $x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}$  erfüllt werden, für welche nur jedes  $(X_i X_k) \equiv 0$  sein muss; die  $P$  bestimmen sich dann nachträglich aus den  $X$ .<sup>1</sup>

Die Berührungstransformation (10) führt nun jeden der durch (8) bestimmten  $\infty^3$  Vereine  $(c_1, c_2, c_3)$  in einen Verein über, dessen Elemente sämtlich einen Punkt  $(x'_1 = c_1, x'_2 = c_2, x'_3 = c_3)$  gemein haben. Wenn also eine Gruppe von Berührungstransformationen die Schar (8) von  $\infty^3$  Vereinen invariant lassen soll, so muss nach Einführung der neuen Variablen  $x', p'$  bei der Gruppe die Schar der  $\infty^3$  Punkte des  $R_3$  unter sich transformiert werden, d. h. die Gruppe wird zu einer Gruppe von blossen Punkttransformationen.

Da sich diese Betrachtung mit Leichtigkeit auch umkehren lässt, so ergibt sich folgendes

*Criterion der Irreducibilität:*

Eine Gruppe von Berührungstransformationen des  $R_3$  in den homogenen Variablen  $x, p$  ist dann und nur dann irreducibel, wenn es keine drei von einander unabhängige Functionen  $X_1, X_2, X_3$  von  $x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}$  giebt von der Art, dass jedes

$$(X_i X_k) \equiv 0$$

---

<sup>1</sup> Dass die Functionen  $X_k, P_k$ , welche die Gleichung (9) erfüllen, von einander unabhängig sind, ist aus der Theorie des PFAFF'schen Problems bekannt; eine einfache direkte Begründung dieses Satzes findet sich bei A. MAYER, *Direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen*. Math. Annalen, Bd. 8, p. 304 ff.

ist und überdies das Gleichungssystem

$$X_1 = \text{Const.}, \quad X_2 = \text{Const.}, \quad X_3 = \text{Const.}$$

bei den Transformationen der Gruppe invariant bleibt, d. h. die  $X$  durch Ausführung der Transformationen der Gruppe immer wieder in Functionen der  $X$  allein übergehen.

In nicht-homogenen Variablen lautet der Satz so:

Eine Gruppe von Berührungstransformationen des  $R_3$  in  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  ist dann und nur dann irreducibel, wenn es keine drei von einander unabhängige Functionen  $X_1, X_2, Z$  von  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  giebt von der Art, dass

$$[X_1 X_2] \equiv 0, \quad [X_1 Z] \equiv 0, \quad [X_2 Z] \equiv 0$$

ist und überdies  $X_1, X_2, Z$  durch Ausführung der Transformationen der Gruppe immer wieder in blosse Functionen von  $X_1, X_2, Z$  übergehen.

Hierin bezeichnet das Symbol  $[uv]$  allgemein den Ausdruck

$$(11) \quad [uv] \equiv \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial y_2} \\ + y_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y_1} \right) + y_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y_2} \right),$$

sodass also nach (5') insbesondere

$$(12) \quad \{uv\} \equiv [uv] - u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}$$

ist.

C. Ein Hauptmittel zur Vereinfachung von Gruppen besteht in der *Einführung neuer Variablen* durch eine endliche Transformation, hier natürlich durch eine Berührungstransformation. Wir schicken daher auch einige Bemerkungen hierüber voraus.

Bei einer derartigen Einführung neuer Variablen findet ein wohl zu beachtender *Unterschied* statt zwischen der homogenen und der nicht-homogenen Darstellung der Transformationen.

Ist nämlich zunächst  $H$  die charakteristische Function einer in den Veränderlichen  $x, p$  geschriebenen infinitesimalen Berührungstransforma-



tion, so hat letztere selbst nach (4) das Symbol  $(Hf)$ . Wenn wir nun vermöge irgend einer endlichen Berührungstransformation

$$(13) \quad \begin{aligned} x'_k &= x'_k(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \\ p'_k &= p'_k(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (k=1,2,3)$$

die neuen Veränderlichen  $x', p'$  anstelle der  $x, p$  einführen, so geht dadurch die infinitesimale Transformation  $(Hf)$  über in

$$\sum_1^3 \left\{ (Hx'_i) \frac{\partial f}{\partial x'_i} + (Hp'_i) \frac{\partial f}{\partial p'_i} \right\}.$$

Hier ist nach (5):

$$(Hx'_i) \equiv \sum_1^3 \left( \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_i}{\partial p_\lambda} \right), \quad (Hp'_i) \equiv \sum_1^3 \left( \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \frac{\partial p'_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \frac{\partial p'_i}{\partial p_\lambda} \right),$$

wo wieder

$$\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \equiv \sum_1^3 \left( \frac{\partial H'}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\nu} \frac{\partial p'_\nu}{\partial p_\lambda} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \equiv \sum_1^3 \left( \frac{\partial H'}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\nu} \frac{\partial p'_\nu}{\partial x_\lambda} \right)$$

ist, wenn wir die Function  $H$ , nachdem in ihr die Substitution (13) gemacht ist, durch  $H'$  bezeichnen. Da (13) eine Berührungstransformation darstellt, so ist ferner nach einem bekannten allgemeinen Satze<sup>1</sup> jedes

$$(x'_\lambda x'_i) \equiv (p'_\lambda p'_i) \equiv 0, \quad \lambda \neq i: (x'_\lambda p'_i) \equiv 0, \quad (p'_\lambda x'_\lambda) \equiv 1.$$

Mithin wird:

$$(Hx'_i) \equiv \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad (Hp'_i) \equiv - \frac{\partial H'}{\partial x'_i},$$

sodass also die Berührungstransformation  $(Hf)$ , geschrieben in den accen-  
tuirten Variablen, die Form annimmt:

$$\sum_1^3 \left( \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \frac{\partial f}{\partial x'_i} - \frac{\partial H'}{\partial x'_i} \frac{\partial f}{\partial p'_i} \right).$$

In den neuen Variablen hat sie mithin  $H'$  zur charakteristischen Function.

Dies Ergebnis können wir so aussprechen: Der Begriff der charakteristischen Function einer infinitesimalen Berührungstransformation in den

<sup>1</sup> Vgl. LIE, a. a. O. p. 236, oder auch MAYER, a. a. O. p. 308.

homogenen Variabeln  $x, p$  verhält sich der Einführung neuer homogener Variablen vermöge einer Berührungstransformation gegenüber invariant.

Dies gilt nun durchaus nicht mehr stets bei der Benutzung der nicht-homogenen Veränderlichen  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$ . Aus der obigen infinitesimalen Berührungstransformation ( $Hf$ ) gehe nämlich durch Einführung der nicht-homogenen Variablen

$$(14) \quad x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = z, \quad y_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}$$

etwa die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function  $W$  hervor. Nach (7) ist dann

$$H = -p_3 W$$

eine bloße Folge von (14). Wenn wir nun die den Gleichungen (13) entsprechenden Formeln in nicht-homogenen Variablen

$$(15) \quad \begin{cases} x'_1 = x'_1(x_1, x_2, z, y_1, y_2), \\ x'_2 = x'_2(x_1, x_2, z, y_1, y_2), \\ z' = z'(x_1, x_2, z, y_1, y_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y'_1 = y'_1(x_1, x_2, z, y_1, y_2) \\ y'_2 = y'_2(x_1, x_2, z, y_1, y_2) \end{cases}$$

benutzen, um die accentuierten Variablen in die infinitesimale Transformation ( $W$ ) einzuführen, so geht diese über in eine Berührungstransformation, welche in den  $x', z', y'$  die charakteristische Function  $\Omega$  besitze. Die dieser entsprechende Berührungstransformation in homogenen Veränderlichen  $x', p'$  hat nach dem obigen die charakteristische Function  $H'$ , und es ist nach (7):

$$H' = -p'_3 \Omega.$$

Vorher hatten wir:

$$H = -p_3 W$$

und mithin zeigt sich, dass vermöge unserer Substitutionen

$$(16) \quad \Omega = \frac{p'_3}{p_3} W$$

sein muss. Der Factor  $\frac{p'_3}{p_3}$  hat eine besondere Bedeutung. Bei der Berührungstransformation (15) ist nämlich etwa

$$dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2 = \rho(dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2),$$

während wir bei (13) haben:

$$p'_1 dx'_1 + p'_2 dx'_2 + p'_3 dx'_3 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3.$$

Erstere Gleichung muss aus letzterer durch Division derselben mit  $p'_3$  und Einführung der nicht-homogenen Veränderlichen hervorgehen und deshalb folgt, dass

$$\rho = \frac{p_3}{p'_3}$$

ist vermöge unserer Substitutionen. (16) reduciert sich also auf

$$(17) \quad \Omega = \rho W.$$

Wenn daher in eine in den nicht-homogenen Variablen  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  geschriebene infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function  $W$  neue Variablen  $x'_1, x'_2, z', y'_1, y'_2$  vermöge einer endlichen Berührungstransformation, bei der etwa

$$dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2 = \rho(dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2)$$

ist, eingeführt werden, so geht die charakteristische Function der neuen infinitesimalen Berührungstransformation aus  $\rho W$  durch die Substitution der neuen Variablen hervor.

Wie man sieht, verhält sich der Begriff der charakteristischen Function einer Berührungstransformation in  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  im allgemeinen nicht invariant gegenüber der Einführung neuer nicht-homogener Variablen vermöge einer Berührungstransformation.

D. Wir wenden uns jetzt nach diesen allgemeineren Bemerkungen zu unserem eigentlichen Probleme, das wir so aussprechen:

**Problem:** *Es sollen alle Typen von irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen in  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  gefunden werden, welche endlich und continuierlich sind und bei denen eine Schar von Gleichungen*

$$\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{Const.}$$

*invariant bleibt.*

Da nach einem allgemeinen Satze<sup>1</sup> jede Function  $\Phi$  von  $x_1, x_2, z, y_1, y_2$  vermöge einer Berührungstransformation in jede andere derartige Function verwandelt werden kann, so können wir auch die hier vorliegende Gleichungenschar  $\Phi = \text{Const.}$  durch eine Berührungstransformation etwa in die Gleichungenschar

$$x_2 = \text{Const.}$$

überführen. Wir dürfen uns deshalb unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung darauf beschränken, alle Typen von endlichen continuierlichen und irreduciblen Gruppen von Berührungstransformationen des  $R_3$  aufzustellen, bei denen  $x_2$  nur von  $x_2$  selbst abhängige Incremente erhält, sodass jeder Verein von Flächenelementen, der durch eine Curve parallel der  $x_1z$ -Ebene des  $R_3$  dargestellt wird, vermöge der Transformationen dieser Gruppen in ebensolche Vereine übergeführt wird.

Es seien nun

$$B_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_k \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{k2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

die  $r$  unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe.  $B_k x_2$  muss dann eine Function von  $x_2$  allein sein, mit anderen Worten:  $\xi_{k2}$  darf nur von  $x_2$  abhängen. Die verkürzten Transformationen

$$\xi_{k2}(x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

erzeugen daher für sich eine Gruppe und zwar — als Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit  $x_2$  — eine höchstens dreigliedrige.<sup>2</sup> Daraus folgt, dass wir annehmen können, dass mindestens  $r-3$  von den  $B_k f$  frei von dem Gliede in  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  seien, also die Form haben:

$$A_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_k \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{k2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad (k=1, 2, \dots, s, s \geq r-3).$$

<sup>1</sup> Vgl. LIE, a. a. O. p. 296. Das dort mit XXI bezeichnete Theorem zieht den oben berührten Satz nach sich.

<sup>2</sup> Siehe LIE, *Theorie der Transformationsgruppen* I. Math. Annalen, Bd. 16, p. 441 ff.

Zu diesen Transformationen  $A_k f$  treten noch 0, 1, 2 oder 3 Transformationen hinzu, welche  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  enthalten und — wie man ohne Mühe einsieht — in der Form angenommen werden können:

$$C_1 f = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{11} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{12} \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$C_2 f = X_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{21} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{22} \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$C_3 f = X_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_3 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{31} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{32} \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Mithin sind 4 verschiedene Fälle zu unterscheiden. In ihnen treten je folgende infinitesimale Transformationen in der gesuchten Gruppe auf:

- 1)  $A_1 f, A_2 f, \dots, A_s f;$
- 2)  $A_1 f, A_2 f, \dots, A_s f, \quad C_1 f;$
- 3)  $A_1 f, A_2 f, \dots, A_s f, \quad C_1 f, C_2 f;$
- 4)  $A_1 f, A_2 f, \dots, A_s f, \quad C_1 f, C_2 f, C_3 f.$

Zu allen diesen infinitesimalen Berührungstransformationen gehören charakteristische Functionen. Die zu  $A_k f$  gehörige bezeichnen wir durch  $W_k$ . Nach (3') ist dann  $\frac{\partial W_k}{\partial y_2}$  bis auf eine infinitesimale Constante das Increment von  $x_2$  bei  $A_k f$ .  $x_2$  aber wird durch  $A_k f$  nicht transformiert und folglich ist

$$\frac{\partial W_k}{\partial y_2} \equiv 0,$$

d. h. die  $W_k$  sind frei von  $y_2$ .

Daher kommt  $y_2$  überhaupt nicht in den  $\xi_{k1}, \zeta_k, \eta_{k1}, \eta_{k2}$  vor, wie ebenfalls aus den Formeln (3') erhellt. Auch jedes  $(A_i A_k)$  und schliesslich auch jedes  $(A_i C_k)$  ist frei von  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ , d. h. diese Klammerausdrücke sind linear mit constanten Coefficienten aus  $A_1 f, \dots, A_s f$  ableitbar, mit anderen Worten:  $A_1 f, \dots, A_s f$  erzeugen in allen oben unterschiedenen Fällen eine  $s$ -gliedrige Untergruppe der ganzen Gruppe — nämlich diejenige, bei der  $x_2$  invariant bleibt — und zwar ist diese Untergruppe in der ganzen

Gruppe invariant. Es erhellt hieraus, dass wir unser Bestreben zunächst darauf zu richten haben, alle Typen von Berührungstransformationsgruppen von der Form  $A_1f, \dots, A_sf$  aufzustellen, und dann später zu diesen Typen 1, 2 oder 3 Transformationen von der Form  $Cf$  in geeigneter Weise hinzuzufügen haben.

Dabei aber erhebt sich noch eine fundamentale Frage:

Gesetzt nämlich, dass die ganze Gruppe der  $Af$  und  $Cf$  (in irgend einem unserer Fälle) irreducibel ist, ist dann auch ihre invariante Untergruppe  $A_1f, \dots, A_sf$  irreducibel oder nicht?

Könnten wir diese Frage bejahend beantworten, so brauchten wir nicht alle Typen von Gruppen  $A_1f, \dots, A_sf$ , sondern nur die irreducibelen aufzustellen, was eine ganz bedeutende Erleichterung gewähren würde. Dass dem nun in der That so ist, werden die folgenden Betrachtungen als Endresultat ergeben.

E. Die aus den  $A_kf$  verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\bar{A}_kf \equiv \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

bilden, da sie von  $y_2$  frei sind, ebenso wie die  $A_kf$  selbst eine Gruppe (freilich im allgemeinen keine Gruppe von Berührungstransformationen des  $R_3$ ). Diese Gruppe enthält allerdings  $x_2$ ; aber  $x_2$  hat in ihr nicht den Character einer Variablen. Die  $\bar{A}_kf$  sind in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  Berührungstransformationen, was man geometrisch leicht einsehen kann. Da nämlich die  $A_kf$  Berührungstransformationen des  $R_3$  vorstellen, so führen sie vereinigte Flächenelemente wieder in vereinigte über. Greifen wir nun in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  zwei vereinigte Linienelemente heraus, so können wir durch jedes derselben irgend ein Flächenelement des  $R_3$  legen. Diese beiden Flächenelemente liegen offenbar auch vereinigt, und  $A_kf$  führt sie wieder in vereinigte Flächenelemente über. Da jedoch  $A_kf$   $x_2$  invariant lässt, so müssen die beiden transformierten Flächenelemente mit der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  je ein Linienelement gemein haben, und diese beiden Linienelemente liegen natürlich wieder vereinigt. Andererseits giebt  $\bar{A}_kf$  an, wie die Linienelemente  $(x_1, z, y_1)$  der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  transformiert werden, wenn  $A_kf$  selbst die Flächenelemente  $(x_1, x_2, z, y_1, y_2)$  des  $R_3$  untereinander vertauscht. Also führt  $\bar{A}_kf$  ver-

einigte Linienelemente in jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  wieder in vereinigte Linienelemente über, was zu beweisen war.

Man kann nun leicht einsehen, dass, wenn die Gruppe der  $\bar{A}_k f$  in der Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = \text{Const.}$  — als Gruppe von Berührungstransformationen in dieser Ebene — reducibel ist, dann auch die  $A_k f$  eine reducible Gruppe von Berührungstransformationen des  $R_3$  erzeugen. Ist nämlich die Gruppe der  $\bar{A}_k f$  in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  reducibel, so lässt sich vermöge einer Berührungstransformation in  $x_1, z, y_1$  in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  erreichen, dass die Gruppe  $\bar{A}_k f$  in eine Gruppe von blossen Punkttransformationen übergeht. Die  $\bar{A}_k f$  führen also dabei alle Linienelemente der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  durch einen Punkt wieder in ebensolche über. Die zugehörigen  $A_k f$  müssen dann natürlich auch alle Flächenelemente des  $R_3$  durch einen Punkt in ebensolche überführen, d. h. auch die  $A_k f$  sind blosse Punkttransformationen.

Zur Vollständigkeit dieses Beweises erübrigt nur noch zu bemerken, dass es stets eine Berührungstransformation des  $R_3$  gibt, welche in jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  eine gegebene Berührungstransformation derselben darstellt und  $x_2$  selbst nicht transformiert. Von dieser Behauptung möge man sich durch einfache Berechnung überzeugen.

Wir wollen noch bemerken, dass es nicht schwer ist, die im vorhergehenden gemachten geometrischen Betrachtungen in die Sprache der Analysis zu übersetzen.

F. Nunmehr werden wir zeigen, dass, wenn die Gruppe  $A_k f$  reducibel ist, auch die im Abschnitt D. unter 2), 3), 4) aufgezählten Gruppen  $A_1 f, \dots, A_i f, C_1 f, \dots, C_i f (i = 1, 2, 3)$  reducibel sind.

Ist die Gruppe  $A_k f$  reducibel, so gilt dasselbe offenbar von der Gruppe  $\bar{A}_k f$  in den Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  In jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  muss also mindestens eine Schar von  $\infty^2$  Vereinen von Flächenelementen existieren, die bei den  $\bar{A}_k f$  in sich transformiert wird. Existiert nur eine solche Schar in jeder der Ebenen, so ist der Nachweis geliefert. Denn eine solche Schar von Vereinen wird durch  $\infty^2$  Curven (oder im besonderen durch die  $\infty^2$  Punkte) einer Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  dargestellt. Bei den  $A_k f$  bleibt in jeder Ebene eine bestimmte Schar invariant, und da die  $A_k f$  eine invariante Untergruppe der ganzen Gruppe  $A_k f, C_i f$  darstellen, so führt nun auch jedes  $C f$  die invariante Schar einer jeden Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  in die

*einzig* invariante Schar einer zweiten Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  über. Daher lässt die ganze Gruppe  $A_k f, C_i f$  insgesamt  $\infty^3$  Curven (resp. alle  $\infty^3$  Punkte) in den Ebenen invariant. Diese Curven stellen in  $R_3$  eine invariante Schar von  $\infty^3$  Vereinen von Flächenelementen dar (und zwar selbstverständlich eine solche, die wirklich alle  $\infty^5$  Flächenelemente des  $R_3$  umfasst), d. h. die ganze Gruppe  $A_k f, C_i f$  ist auch reducibel.

Dieser Beweis gilt auch dann, wenn in jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  eine *discrete* Zahl von invarianten Scharen von  $\infty^2$  Curven bei der Gruppe  $A_k f$  existiert, aber nicht mehr, wenn *unendlich viele* Scharen in jeder Ebene vorhanden sind. In diesem letzteren Falle verfahren wir nach LIE vielmehr wie folgt:

Existieren in jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  unendlich viele bei den  $A_k f$  invariante Scharen von je  $\infty^2$  Curven, so betrachten wir die durch ein Linienelement einer Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  hindurchgehenden Curven der Scharen. Von *jeder* einzelnen Schar geht durch dasselbe eine oder jedenfalls nur eine discrete Zahl von Curven hindurch. Ist letzteres der Fall, so können wir bei einer der Scharen aus dieser discreten Reihe eine bestimmte Curve auswählen. Damit ist auch bei jeder anderen Schar der Ebene eine bestimmte Curve ausgewählt, da ja die unendlich vielen Scharen eine *continuirliche* Mannigfaltigkeit bilden. Wir können daher überhaupt für die folgende Betrachtung annehmen, dass durch ein bestimmtes Linienelement nur je eine Curve jeder Schar hindurchgehe.

Jedes Linienelement  $L(x_1, z, y_1)$  der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  interpretieren wir nun als Punkt  $A$  eines dreifach ausgedehnten Raumes  $P_3$  mit den Coordinaten  $x_1, z, y_1$ . Alsdann entspricht einer durch das Element  $L$  gehenden Curve  $k$  (d. h. einem Verein von Linienelementen, dem  $L$  angehört) der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  eine durch diesen Punkt  $A$  des  $P_3$  laufende Curve  $\alpha$ , welche in  $A$  eine Tangentialrichtung  $\tau_\alpha$  besitzt, die dem durch die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

im  $P_3$  dargestellten *ebenen Strahlenbüschel* mit dem Scheitel  $A$  angehört, denn diese Gleichung ist ja die Bedingung der vereinigten Lage zweier Linienelemente in  $x_1, z, y_1$ . Da bei den  $A_k f$  jede der unendlich vielen Scharen von  $\infty^2$  Curven der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  einzeln invariant ist und von jeder dieser Scharen eine Curve  $k$  durch  $L$  geht, so ist klar, dass,



wenn ein  $A_k f L$  nach  $L'$  transformiert, alsdann die Curve  $k$  in eine ganz bestimmte Curve  $k'$  durch  $L'$  übergeht.  $L'$  und  $k'$  entspricht im  $P_3$  ein Punkt  $A'$  und eine durch ihn laufende Curve  $z'$ , die in  $A'$  eine Tangentialrichtung  $\tau'_x$  besitzt, welche einem gewissen ebenen Strahlenbüschel angehört. Bleibt bei  $A_k f L$  fest, so gilt dasselbe von  $A$  und den Richtungen  $\tau_x$  durch  $A$ .

Also sehen wir: Bei der Gruppe  $A_k f$  sind den Punkten  $A$  *sämtliche* durch  $A$  gehende Richtungen  $\tau_x$  des ebenen Büschels *als invariant zugeordnet*.

Nun führen wir eine Transformation  $Cf$  aus, welche jene beliebig gewählte Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  invariant lässt. Wenn etwa  $Cf A$  in  $A'$  überführt, so werden allerdings auch die Richtungen des Büschels in  $A$  in die des Büschels in  $A'$  transformiert, jedoch nicht mehr in derselben Weise wie durch irgend ein  $A_k f$ , das auch  $A$  nach  $A'$  führt, denn  $Cf$  transformiert ja auch die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  Wir werden aber zeigen, dass bei den  $Cf$  jedem Punkte  $A$  des  $P_3$  nun zwar nicht jede einzelne Richtung des Büschels, aber doch *wenigstens eine* Richtung desselben als invariant zugeordnet ist. Wir betrachten hierzu insbesondere alle  $Cf$  unserer Gruppe  $A_k f, C_i f$ , welche den Punkt  $A$  des  $P_3$  invariant lassen. Da überhaupt *höchstens drei*  $Cf$  vorhanden sind, so giebt es sicher *höchstens zwei*  $Cf$ , bei denen  $A$  fest bleibt. Diese vertauschen dann die Richtungen  $\tau_x$  des durch  $A$  gehenden Büschels und zwar vermöge einer höchstens zweigliedrigen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit dieser Richtungen. Eine solche aber lässt *mindestens eine* Richtung  $\tau_x$  fest. Folglich bleibt, wenn  $A$  in dieser Weise festgehalten wird, auch eine Richtung  $\tau_x$  durch  $A$  invariant.

Wir finden daher: *Bei der Gruppe  $A_k f, C_i f$  werden die Punkte  $A$  des  $P_3$  untereinander transformiert. Aber mit dem Punkte  $A$  bleibt stets mindestens eine der durch ihn gehenden Richtungen  $\tau_x$  invariant verbunden.*

Es sind jedoch 3 Fälle möglich: Es sind mit  $A$  invariant verbunden:

- entweder nur eine Richtung  $\tau_x$
- oder zwei Richtungen  $\tau_x$
- oder endlich alle Richtungen  $\tau_x$ .

Im ersten und zweiten Falle fahren wir so fort: Gehen wir von  $A$  aus in einer der mit  $A$  invariant verbundenen Richtungen  $\tau_x$  zu einem benachbarten  $A$  über und schreiten in dieser Weise weiter, so erhalten wir eine

Curve des  $P_3$  von der Eigenschaft, dass jedem ihrer Punkte die Tangentialrichtung als invariant zugeordnet ist. Wir erhalten im ganzen entweder eine oder zwei Scharen von  $\infty^2$  Curven des  $P_3$ , und jede Schar ist bei der Gruppe  $A_k f, C_i f$  invariant. Einer solchen Schar entsprechen auch in jeder der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$   $\infty^2$  Curven und durch die  $Cf$  werden die der einen Ebene in die der anderen transformiert. Hiermit ist aber das erreicht, was in dem vorherbetrachteten einfacheren Falle (wo in jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  nur eine bei den  $A_k f$  invariante Schar existierte) sich ergab. Wir können also auf das dort Gesagte weiter verweisen. Im dritten Falle, wo mit dem Punkte  $A$  alle Richtungen  $\tau_x$  des ebenen Büschels invariant verbunden sind, haben wir allerdings wieder  $\infty^1$  invariante Scharen von je  $\infty^2$  Curven — wie oben —, aber jetzt derart, dass alle Transformationen  $Cf$ , welche die Ebene  $x_2 = x_2^0$  in dieselbe Ebene  $x_2 = x_2^1$  überführen, auch eine jede dieser Scharen der Ebene ( $x_2^0$ ) in je ein und dieselbe Schar der Ebene ( $x_2^1$ ) überführen, sodass auch hier die Reducibilität der Gruppe  $A_k f, C_i f$  nachgewiesen ist (indem jetzt die Reduction auf blosse Punkttransformationen auf unendlich viele Weisen möglich wird).

Hiermit ist der versprochene Nachweis geführt:

*Wenn die Gruppe  $A_k f$  reducibel ist, so gilt dasselbe von der Gruppe  $A_k f, C_i f$ .*

Andererseits erkannten wir schon vorher:

*Wenn die Gruppe  $\bar{A}_k f$  in der Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = \text{Const.}$  reducibel ist, so gilt dasselbe von der Gruppe  $A_k f$  des  $R_3$ .*

Fassen wir beide Sätze zusammen, so folgt:

*Ist die Gruppe  $\bar{A}_k f$  in der Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = \text{Const.}$  reducibel, so gilt dasselbe von der ganzen Gruppe  $A_k f, C_i f$ .*

Nach den früheren Bemerkungen können wir uns mithin in allem Folgenden darauf beschränken, diejenigen Gruppen  $A_k f$  zu betrachten, deren zugehörige verkürzte Gruppen  $\bar{A}_k f$  in der Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = \text{Const.}$  irreducibel sind. (Vgl. Schlussbemerkung von Abschnitt D.)

In der Ebene  $(x_1, z, y_1)$  giebt es nun, wie LIE gezeigt hat, nur drei irreducibele Gruppentypen, nämlich diese:

*Erstens:*<sup>1</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2} y_1^2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Zweitens:* Die vorigen Transformationen und überdies

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Drittens:* Ausser den 7 genannten Transformationen noch

$$\frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(z - x_1 y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{1}{2} y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{1}{2} x_1 y_1^2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\left(x_1 z - \frac{1}{2} x_1^2 y_1\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(y_1 z - \frac{1}{2} x_1 y_1^2\right) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \left(z^2 - \frac{1}{4} x_1^2 y_1^2\right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Kürzer schreiben sich diese Gruppen in ihren charakteristischen Functionen, nämlich

*Erstens:*<sup>1</sup>

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2;$$

*Zweitens:*

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z;$$

*Drittens:*

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z,$$

$$x_1(x_1 y_1 - 2z), y_1(x_1 y_1 - 2z), (x_1 y_1 - 2z)^2.$$

Wenn wir also in den  $\bar{A}_k f$   $x_2 = \text{Const.}$  setzen, so müssen sich diese Transformationen auf die einer der drei soeben angegebenen Gruppen reducieren, wie wir annehmen dürfen. Damit ist dann die *allgemeine Form der  $\bar{A}_k f$*  und hiermit auch unmittelbar die der  $A_k f$  selbst gefunden. Wie dieselben weiter zu behandeln sind, werden wir im folgenden darlegen.

<sup>1</sup> Siehe LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, Abhandlung IV und V im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1878, 1879.

§ 1. Die Gruppen  $A_k f$ , welche die Linienelemente der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  6- oder 7-gliedrig transformieren.

Wir betrachten in diesem Paragraphen diejenigen Gruppen  $A_k f$ , bei welchen sich die verkürzten Transformationen  $\bar{A}_k f$  für  $x_2 = \text{Const.}$  auf den *ersten* oder *zweiten* der pag. 129 angegebenen Typen der Ebene reducieren, bei denen also  $\bar{A}_k f$  die allgemeine Form hat:

$$\begin{aligned} \bar{A}_k f = & X_{k1} \frac{\partial f}{\partial z} + X_{k2} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial z} \right) + X_{k3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_{k4} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ & + X_{k5} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) + X_{k6} \left( y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2} y_1^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) + X_{k7} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

( $k=1, 2, \dots, s$ )

wo die  $X$  Functionen von  $x_2$  allein bezeichnen und im *ersten* Falle insbesondere jedes  $X_{k7} \equiv 0$  zu setzen ist. Mit Hülfe der Formeln (3') der Einleitung können wir aus den Incrementen von  $x_1$  und  $z$ , da  $x_2$  bei den  $A_k f$  das Increment 0 hat, die zugehörige charakteristische Function  $W_k$  von  $A_k f$  berechnen. Es zeigt sich, dass diese die Form hat:

$$(1) \quad W_k \equiv \frac{1}{2} A_k x_1^2 + B_k x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_k y_1^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k + G_k (x_1 y_1 - 2z),$$

wo  $A_k, B_k, \dots, G_k$  Functionen von  $x_2$  allein sind, die sich durch die  $X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{k7}$  in einer uns gleichgültigen Weise ausdrücken, und dass im *ersten* Falle insbesondere jedes  $G_k \equiv 0$  ist.

Es kommt nun darauf an, die Functionen  $A_k, \dots, G_k$  von  $x_2$  so zu bestimmen, dass  $W_1, \dots, W_s$  wirklich die charakteristischen Functionen einer Gruppe sind, d. h. dass jedes  $\{W_i, W_k\}$  sich in der Form

$$\{W_i, W_k\} \equiv \sum_{\sigma} c_{ik\sigma} W_{\sigma}$$

darstellt, wo die  $c_{ik\sigma}$  blosse Constanten sein müssen. Es gilt nämlich bekanntlich der Satz:

Sind  $A_1 f, \dots, A_s f$  infinitesimale Berührungstransformationen in  $x_1, x_2, y_1, y_2, z$  und  $W_1, \dots, W_s$  ihre charakteristischen Functionen, so zieht die Relation

$$(A_i A_k) \equiv \sum_{\sigma=1}^s c_{ik\sigma} A_{\sigma} f$$

die Relation

$$\{W_i W_k\} \equiv \sum_{\sigma=1}^s c_{ik\sigma} W_{\sigma}$$

nach sich und umgekehrt. Die  $c_{ik\sigma}$  bedeuten hierbei Constanten.

Wir haben im vorhergehenden gleich zwei Fälle zusammengefasst, nämlich denjenigen, in welchem die zugehörige Gruppe der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  6-, und den, in welchem sie 7-gliedrig ist. Dass sich aber letzterer Fall auf den ersteren zurückführen lässt, kann so eingesehen werden:

Im zweiten Falle wird eine Anzahl der Functionen  $W_k$  die Grösse  $x_1 y_1 - z z$ , die wir kurz  $\omega$  nennen werden, wirklich enthalten. Wir wollen diese Functionen zur Unterscheidung mit  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$  bezeichnen und unter den  $W$  dann nur solche der Functionen (1) verstehen, welche von  $\omega$  frei sind. Vorausgesetzt wird natürlich, dass die  $\varrho$  linear unabhängig von einander seien und dass kein Ausdruck  $\sum \text{Const. } \varrho$  frei von  $\omega$  werde. Jedes  $\{W_i W_k\}$  muss sich nun in der Form

$$\sum \text{Const. } \varrho + \sum \text{Const. } W$$

darstellen. Aber die allgemeine Combinationsformel (5') der Einleitung lehrt, dass  $\{W_i W_k\}$  ebenso wie  $W_i$  und  $W_k$  selbst frei von  $\omega$  ist, d. h. es muss sein:

$$\{W_i W_k\} \equiv \sum \text{Const. } W.$$

Die infinitesimalen Transformationen  $(W_1), (W_2), \dots$  bilden also für sich eine Untergruppe. Dieselbe ist in der ganzen Gruppe invariant. Wenn wir nämlich  $\{W_i \varrho_k\}$  bilden, so erkennen wir unschwer, dass auch dies frei von  $\omega$  ist. Schliesslich lehrt nun auch die Bildung von  $\{\varrho_i \varrho_k\}$ , dass dieser Klammerausdruck  $\omega$  nicht enthält. Daraus erhellt aber, dass wir unsere ganze Gruppe symbolisch in folgender Form schreiben können:

$$(2) \quad \boxed{\boxed{W_1, W_2, \dots, W_t} \quad \varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \dots \quad \varrho_r} \quad t+r=s$$

wo jede Umrahmung die charakteristischen Functionen einer Untergruppe enthält und überdies andeutet, dass die betreffende Untergruppe in der sie zunächst umfassenden (und offenbar überhaupt in jeder sie umfassenden) Untergruppe invariant ist.

Aus dieser bemerkenswerten Gestalt (2) unserer Gruppe geht nun hervor, dass *die von  $(W_1), (W_2), \dots, (W_i)$  erzeugte Untergruppe irreducibel sein muss, sobald die ganze Gruppe irreducibel ist.*

In der That, wenn die Gruppe der  $(W)$  reducibel wäre, so lehrt eine Betrachtung ganz analog der in der Einleitung unter F. durchgeführten, dass auch die nächste grössere Untergruppe  $(W_1), \dots, (W_i), (\mathcal{Q}_1)$  reducibel sein müsste. Anstelle der a. a. O. mit  $A_k f$  bezeichneten infinitesimalen Transformationen treten nämlich jetzt die  $(W_k)$ , anstelle der  $C_i f$  tritt die eine infinitesimale Transformation  $(\mathcal{Q}_1)$ , welche allerdings nicht wie jene  $Cf$  die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  unter einander vertauscht. Doch dies thut nichts zur Sache und es bedarf auch keiner weiteren Erläuterung des Beweisganges, da er sich ganz dem früheren anschliesst. Ebenso können wir ferner zeigen, dass, wenn die Gruppe  $(W_1), \dots, (W_i), (\mathcal{Q}_1)$  reducibel wäre, dasselbe von der Gruppe  $(W_1), \dots, (W_i), (\mathcal{Q}_1), (\mathcal{Q}_2)$ , in der jene als invariante Untergruppe enthalten ist, gelten würde u. s. w. Schliessliches Ergebnis ist, dass die *ganze* Gruppe der  $(W)$  und  $(\mathcal{Q})$  reducibel sein müsste, was aber der Voraussetzung widerspricht, die wir über sie machen müssen.

*Diejenigen infinitesimalen Transformationen der ganzen Gruppe also, deren charakteristische Functionen von  $\omega$  frei sind, erzeugen eine irreducibele invariante Untergruppe, sobald die ganze Gruppe irreducibel ist.*

Hieraus ersehen wir, dass wir uns zunächst auf die Erledigung des ersten Falles, in welchem  $W_1, \dots, W_i$  frei von  $\omega = x_1 y_1 - 2z$  sind, beschränken können. Sind alle Gruppen in diesem Falle bestimmt, so haben wir nur noch infinitesimale Transformationen hinzuzufügen, deren charakteristische Functionen  $\omega$  enthalten.

Wir behandeln also zunächst das Problem, *alle Typen von endlichen continuierlichen und irreducibelen Gruppen von Berührungstransformationen zu finden, deren charakteristische Functionen die allgemeine Form haben:*

$$(3) \quad W_k \equiv \frac{1}{2} A_k x_1^2 + B_k x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_k y_1^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k, \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

wo die  $A_k, B_k, \dots, F_k$  blosse Functionen von  $x_2$  bezeichnen.

Wenden wir unseren Blick zurück auf die in der Einleitung unter C. über die *Einführung neuer Variablen* gemachten Bemerkungen, so sehen wir sofort, dass die Formen (3) (ja auch die Formen (1), was zu bemerken für späterhin wichtig ist) im wesentlichen ungeändert bleiben, wenn neue Variablen  $x'_1, x'_2, z', y'_1, y'_2$  vermöge einer solchen Berührungstransformation eingeführt werden, bei denen Gleichungen bestehen von der Form:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha x'_1 + \beta y'_1 + \varepsilon, & y_1 = \gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta, \\ x_2 = x'_2, \\ z = \rho z' + \frac{1}{2} \lambda x_1'^2 + \mu x'_1 y'_1 + \frac{1}{2} \nu y_1'^2 + \sigma x_1 + \tau y_1 + \upsilon, \end{cases}$$

in denen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$  blosse Functionen von  $x_2 = x'_2$  bedeuten. Solche Berührungstransformationen giebt es aber in der That. Wir brauchen nur die Gleichungen (4) der Bedingung zu unterwerfen:

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = \rho (dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2), \quad (\rho \neq 0)$$

aus der sich durch Ausrechnung ergibt, dass diese eine Gleichung in die Forderungen zerfällt:

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda x'_1 + \mu y'_1 + \sigma - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta) \alpha = -y'_1 \rho, \\ \mu x'_1 + \nu y'_1 + \tau - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta) \beta = 0, \\ \rho y'_2 + \rho z' + \frac{1}{2} \lambda x_1'^2 + \mu x'_1 y'_1 + \frac{1}{2} \nu y_1'^2 + \sigma x'_1 + \tau y'_1 + \upsilon \\ \quad - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta)(\alpha x'_1 + \beta y'_1 + \varepsilon) = y_2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung (5) bestimmt  $y_2$  durch die accentuierten Variablen, während die beiden ersteren wieder zerfallen in:

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda = \alpha \gamma, & \mu + \rho = \alpha \delta, & \sigma = \alpha \zeta, \\ \mu = \beta \gamma, & \nu = \beta \delta, & \tau = \beta \zeta, \\ \text{d. h.} & \rho = \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0. \end{cases}$$

Wählt man somit  $\lambda, \mu, \nu, \tau, \rho$  in dieser Weise, so kann man die Gleichungen (4) zu einer vollständigen Berührungstransformation des  $R_3$  ergänzen. Über die Functionen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \nu$  von  $x_2$  kann man dabei noch beliebig, doch so, dass  $\rho \neq 0$  wird, verfügen.

Um nun die accentuierten Variabeln in die charakteristischen Functionen  $W_k$  einzuführen, haben wir zu beachten, dass

$$dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2 = \frac{1}{\rho} (dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2)$$

ist. Nach dem früheren (pag. 121) müssen wir also  $W_k$  erst mit  $\frac{1}{\rho}$  multiplicieren und dann in das Product  $\frac{1}{\rho} W_k$  die  $x'_1, x'_2, z', y'_1$  vermöge (4) einführen. Dadurch ergibt sich die neue charakteristische Function (in der wir, wie überhaupt von jetzt ab, die lästigen Accente weglassen, da wir nur noch die neuen Variabeln gebrauchen, also keine Verwechslung vorkommen kann):

$$(7) \quad \begin{aligned} \overline{W}_k \equiv & \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} A_k \alpha^2 + B_k \alpha \gamma + \frac{1}{2} C_k \gamma^2 \right] x_1^2 \\ & + \frac{1}{\rho} [A_k \alpha \beta + B_k (\alpha \delta + \beta \gamma) + C_k \gamma \delta] x_1 y_1 \\ & + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} A_k \beta^2 + B_k \beta \delta + \frac{1}{2} C_k \delta^2 \right] y_1^2 \\ & + \frac{1}{\rho} [A_k \alpha \varepsilon + B_k (\alpha \zeta + \varepsilon \gamma) + C_k \gamma \zeta + D_k \alpha + E_k \gamma] x_1 \\ & + \frac{1}{\rho} [A_k \beta \varepsilon + B_k (\beta \zeta + \varepsilon \delta) + C_k \delta \zeta + D_k \beta + E_k \delta] y_1 \\ & + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} A_k \varepsilon^2 + B_k \varepsilon \zeta + \frac{1}{2} C_k \zeta^2 + D_k \varepsilon + E_k \zeta + F_k \right]. \end{aligned}$$

Nun werden wir die Functionen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ , über die wir noch verfügen können, so zu wählen suchen, dass möglichst viele Terme in einem  $W_k$  verschwinden. Wir fragen zunächst, ob wir in (7) die Coefficienten von  $x_1^2$  und  $y_1^2$  zum Verschwinden bringen können. Dazu ist notwendig, dass

$$\begin{aligned} A_k \alpha^2 + 2B_k \alpha \gamma + C_k \gamma^2 &\equiv 0, \\ A_k \beta^2 + 2B_k \beta \delta + C_k \delta^2 &\equiv 0 \end{aligned}$$



sei. Die quadratische Gleichung

$$A_k \xi^2 + 2B_k \xi \eta + C_k \eta^2 = 0$$

muss also durch  $\xi = \alpha, \eta = \gamma$  und durch  $\xi = \beta, \eta = \delta$  befriedigt werden, mit anderen Worten, sie muss die Gleichung sein:

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ \alpha^2 & \alpha\gamma & \gamma^2 \\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt (bis auf einen Proportionalitätsfactor, den wir gleich 1 annehmen):

$$(8) \quad A_k = \gamma\delta\rho, \quad -2B_k = (\alpha\delta + \beta\gamma)\rho, \quad C_k = \alpha\beta\rho,$$

weil nämlich  $\rho \equiv \alpha\delta - \beta\gamma$  ist. Zwischen diesen drei Functionen von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  besteht aber eine Relation

$$B_k^2 - A_k C_k = \frac{1}{4} \rho^4 \neq 0.$$

Also lässt sich unser Wunsch nur dann erfüllen, wenn wenigstens ein  $W_k$  existiert, in welchem  $B_k^2 - A_k C_k \neq 0$  ist. Aber dann ist er auch sicher erfüllbar, wie man sofort sieht. Den *Ausnahmefall*, in welchem in (3) jedes  $B_k \equiv \sqrt{A_k C_k}$  ist, wollen wir weiter unten vornehmen, um hier keine Störung zu bereiten.

Im *allgemeinen* ist unsere Absicht, in einem  $\overline{W}_k$  die Coefficienten von  $x_1^2$  und  $y_1^2$  zum Verschwinden zu bringen, erreichbar. Wir haben dazu  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gemäss (8) zu wählen, doch derart, dass  $\rho \equiv \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  bleibt. Dann hat  $x_1 y_1$  in  $\overline{W}_k$  nach (7) den Coefficienten  $-\frac{1}{2}\rho^2 \neq 0$ .  $x_1$  und  $y_1$  haben ferner die Coefficienten:

$$\frac{1}{\rho} [A_k \alpha \varepsilon + B_k (\alpha \zeta + \varepsilon \gamma) + C_k \gamma \zeta + D_k \alpha + E_k \gamma],$$

$$\frac{1}{\rho} [A_k \beta \varepsilon + B_k (\beta \zeta + \varepsilon \delta) + C_k \delta \zeta + D_k \beta + E_k \delta].$$

Wollen wir auch diese zum Verschwinden bringen, so haben wir zwei in  $\varepsilon$  und  $\zeta$  lineare Gleichungen zu erfüllen, deren Determinante lautet:

$$\frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} A_k\alpha + B_k\gamma & B_k\alpha + C_k\gamma \\ A_k\beta + B_k\delta & B_k\beta + C_k\delta \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\rho^2} (A_k C_k - B_k^2)(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

d. h. nach (8):

$$-\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \cdot \rho \equiv -\frac{1}{4} \rho^3 \neq 0.$$

Also lassen sich auch diese Forderungen durch passende Wahl von  $\varepsilon$  und  $\zeta$  erfüllen.

Damit wäre dann erreicht, dass ein  $\overline{W}_k$  die bemerkenswert einfache Form annimmt:

$$\overline{W}_k \equiv -\frac{1}{2} \rho^2 x_1 y_1 + \varphi(x_2).$$

In dem oben bemerkten *Ausnahmefall* hat jedes  $W_k$  die Form

$$(A_k x_1 + \Gamma_k y_1)^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k$$

und es ist klar, dass mindestens zwei Ausdrücke  $A_k x_1 + \Gamma_k y_1$  und  $A_i x_1 + \Gamma_i y_1$  von einander unabhängig und  $\neq 0$  sein müssen, weil sonst die zugehörige Gruppe der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  nicht 6-, sondern weniger-gliedrig wäre. Dann können wir die allgemeinste charakteristische Function der Gruppe bilden

$$\lambda \{(A_k x_1 + \Gamma_k y_1)^2 + \dots\} + \mu \{(A_i x_1 + \Gamma_i y_1)^2 + \dots\}, \quad (\lambda, \mu = \text{Const.})$$

wo wir nur die quadratischen Glieder angegeben haben. Diese aber hat jene Ausnahmeform nur, wenn für alle Werte der Constanten  $\lambda, \mu$ :

$$(\lambda A_k \Gamma_k + \mu A_i \Gamma_i)^2 \equiv (\lambda A_k^2 + \mu A_i^2)(\lambda \Gamma_k^2 + \mu \Gamma_i^2)$$

ist, d. h. im besonderen  $\lambda\mu \equiv 0$  ist. Die Annahme, dass alle charakteristischen Functionen der Gruppe jene Ausnahmeform haben, ist also an sich undenkbar.

Wir kehren deshalb zum allgemeinen Falle zurück. Wie wir gesehen haben, dürfen wir annehmen, dass unter den charakteristischen Functionen (3) der gesuchten Gruppe eine von der Form

$$W = \lambda x_1 y_1 + \mu, \quad (\lambda \neq 0)$$

enthalten sei, in der  $\lambda$  und  $\mu$  Functionen von  $x_2$  bezeichnen. Ehe wir hieraus weitere Schlüsse ziehen, bemerken wir: Alle charakteristischen Functionen (3) haben die Form  $u_2 + u_1$ , wo  $u_2$  quadratisch und homogen,  $u_1$  linear in  $x_1, y_1$  ist. Combinieren wir nun zwei solche Functionen  $u_2 + u_1$  und  $v_2 + v_1$  mit einander nach der allgemeinen Combinationsformel (5') der Einleitung, so sehen wir, dass in  $\{u_2 + u_1, v_2 + v_1\}$  die quadratischen Glieder nur diese sind:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial y_1}.$$

Diese Bemerkung ist für das folgende, wo es uns immer nur auf die quadratischen Glieder ankommt und wir deshalb nur diese berechnen, von Nutzen.

Sicherlich muss ein  $W_k$  ein von Null verschiedenes  $A_k$  haben. Wir combinieren dasselbe mit obigem  $W$  und erhalten:

$$\begin{aligned} (B_k x_1 + C_k y_1) \lambda y_1 - (A_k x_1 + B_k y_1) \lambda x_1 + \dots \\ \equiv -\lambda(A_k x_1^2 - C_k y_1^2) + \dots \end{aligned}$$

Unter den  $W_k$  kommt daher sicher eine Function vor von der Form:

$$\frac{1}{2}(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \dots, \quad (\sigma \neq 0),$$

wo natürlich  $\sigma$  und  $\tau$  Functionen von  $x_2$  bedeuten. Ihre Combination mit  $W$  giebt:

$$\lambda(\tau y_1^2 - \sigma x_1^2) + \dots$$

Combinieren wir dies wieder mit  $W$  und fahren wir so fort, so ergeben sich successive die Functionen:

$$\begin{aligned} \sigma x_1^2 + \tau y_1^2 + \dots, \\ \lambda^2(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \dots, \\ \lambda^4(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \dots, \\ \dots \end{aligned}$$

wo  $\sigma \neq 0$  ist. Dies kann, wenn die Gruppe *endlich* sein soll, nur so ge-

schehen, dass  $\lambda = \text{Const.}$  ist. Dann aber darf  $\lambda$ , da es  $\neq 0$  ist, gleich 1 und also:

$$W = x_1 y_1 + \mu(x_2)$$

gesetzt werden. Wie wir soeben sahen, kommen die Functionen vor:

$$\sigma x_1^2 + \tau y_1^2 + \dots, \quad \sigma x_1^2 - \tau y_1^2 + \dots,$$

d. h. auch

$$\sigma x_1^2 + \dots,$$

wo sicher  $\sigma \neq 0$  ist.

Ganz analog (indem wir wissen, dass schliesslich unter den  $W_k$  noch eines, dessen  $C_k \neq 0$  ist, existieren muss) ergibt sich eine charakteristische Function

$$\rho y_1^2 + \dots,$$

wo  $\rho$  sicher  $\neq 0$  ist. Wir bilden:

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \rho y_1^2 + \dots\} \equiv -4\sigma\rho x_1 y_1 + \dots,$$

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \sigma\rho x_1 y_1 + \dots\} \equiv -2\sigma^2\rho x_1^2 + \dots,$$

$$\{\sigma^2\rho x_1^2 + \dots, \rho y_1^2 + \dots\} \equiv -4\sigma^2\rho^2 x_1 y_1 + \dots$$

u. s. w. So ergeben sich successive:

$$\sigma\rho x_1 y_1 + \dots, \quad \sigma^2\rho^2 x_1 y_1 + \dots, \quad \sigma^3\rho^3 x_1 y_1 + \dots,$$

was nur so angehen kann, dass  $\sigma\rho = \text{Const.}$ , d. h. etwa  $\equiv 1$  ist. Dann haben wir die beiden charakteristischen Functionen

$$\sigma x_1^2 + \dots, \quad \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots$$

Wir bilden weiterhin:

$$\left\{ \sigma x_1^2 + \dots, \frac{1}{2} A_i x_1^2 + B_i x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_i y_1^2 + \dots \right\} \equiv -2\sigma x_1 (B_i x_1 + C_i y_1) + \dots,$$

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \sigma x_1 (B_i x_1 + C_i y_1) + \dots\} \equiv -2\sigma^2 C_i x_1^2 + \dots,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots, \sigma^2 C_i x_1^2 + \dots \right\} \equiv 4\sigma C_i x_1 y_1 + \dots,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots, \sigma C_i x_1 y_1 + \dots \right\} \equiv 2C_i y_1^2 + \dots$$

Wenn also

$$\frac{1}{2} A_i x_1^2 + B_i x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_i y_1^2 + \dots$$

vorkommt, so kommt auch

$$C_i y_1^2 + \dots$$

vor, analog natürlich auch

$$A_i x_1^2 + \dots$$

und daher schliesslich noch

$$B_i x_1 y_1 + \dots$$

Ausser solchen Functionen, welche nur linear in  $x_1, y_1$  sind, enthält also die Gruppe nur noch solche von der Form:

$$\begin{aligned} & x_1 y_1 + \mu(x_2), \\ & \sigma x_1^2 + \dots, \quad \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots, \\ & A_i x_1^2 + \dots, \quad B_i x_1 y_1 + \dots, \quad C_i y_1^2 + \dots \end{aligned}$$

Da sich ergibt

$$\begin{aligned} \{\sigma x_1^2 + \dots, B_i x_1 y_1 + \dots\} &\equiv -2\sigma B_i x_1^2 + \dots, \\ \{\sigma B_i x_1^2 + \dots, B_i x_1 y_1 + \dots\} &\equiv -2\sigma B_i^2 x_1^2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

so muss  $B_i \equiv \text{Const.}$  sein. Da schon die charakteristische Function  $x_1 y_1 + \mu$  vorkommt, so können wir  $B_i \equiv 0$  setzen. Weiter ist

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, C_i y_1^2 + \dots\} \equiv -4\sigma C_i x_1 y_1 + \dots,$$

also  $\sigma C_i \equiv \text{Const.}$  Ebenso kommt  $\frac{1}{\sigma} A_i \equiv \text{Const.}$ , d. h.

$$A_i \equiv \text{Const. } \sigma, \quad C_i \equiv \text{Const. } \frac{1}{\sigma},$$

sodass wir offenbar, da schon  $\sigma x_1^2 + \dots$  und  $\frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots$  vorkommen,

$$A_i \equiv C_i \equiv 0$$

setzen dürfen. Mithin bleiben von den quadratischen Functionen nur diese übrig

$$W_1 \equiv \sigma x_1^2 + \dots, \quad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu(x_2), \quad W_3 \equiv \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots$$

Durch *Einführung neuer Variabeln* vermöge der Berührungstransformation

$$(9) \quad x'_1 = x_1 \sqrt{\sigma}, \quad y'_1 = y_1 \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad x'_2 = x_2, \quad y'_2 = y_2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} x_1 y_1, \quad z' = z,$$

bei der

$$dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2 \equiv dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

wird, erkennen wir sofort, dass diese drei characteristischen Functionen auf die speciellere Form gebracht werden können

$$W_1 \equiv x_1^2 + \dots, \quad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu(x_2), \quad W_3 \equiv y_1^2 + \dots,$$

während die linearen  $W_k$  ihre Form nicht wesentlich ändern.

Es ist etwa:

$$W_1 \equiv x_1^2 + ax_1 + by_1 + c,$$

$$W_3 \equiv y_1^2 + dx_1 + ey_1 + f,$$

wo  $a, b, \dots, f$  Functionen von  $x_2$  sind. Ihre Combination mit  $W_2$  liefert die characteristischen Functionen

$$-2x_1^2 - ax_1 + by_1, \quad 2y_1^2 - dx_1 + ey_1.$$

Addieren wir die Hälfte der ersteren zu  $W_1$  und subtrahieren wir die Hälfte der letzteren von  $W_3$ , so ergeben sich die Functionen

$$\frac{1}{2} ax_1 + \frac{3}{2} by_1, \quad \frac{3}{2} dx_1 + \frac{1}{2} ey_1.$$

Ziehen wir ihr doppeltes von  $W_1$  resp.  $W_3$  ab, so kommt

$$x_1^2 - 2by_1 + c, \quad y_1^2 - 2dx_1 + f.$$

Wenn wir mit diesen wie soeben mit  $W_1$  und  $W_3$  verfahren, so kommen die characteristischen Functionen  $by_1$  und  $dx_1$ , sodass wir einfach

$$W_1 \equiv x_1^2 + \lambda, \quad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu, \quad W_3 \equiv y_1^2 + \nu$$

setzen dürfen, wo  $\lambda, \mu, \nu$  blosse Functionen von  $x_2$  sind. Klammeroperationen zwischen diesen dreien lehren leicht, dass wir sie endlich in der Gestalt annehmen können

$$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2.$$

Die übrigen, in  $x_1$  und  $y_1$  linearen charakteristischen Functionen der Gruppe, von denen sicher drei existieren müssen, da die zugehörige Gruppe in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  6-gliedrig sein soll, haben die Form

$$a(x_2)x_1 + b(x_2)y_1 + c(x_2).$$

Ihre Combinationen mit  $x_1^2, x_1 y_1$  und  $y_1^2$  ergeben, dass  $ax_1, bx_1, ay_1, by_1, c, a^2, ab, b^2$  charakteristische Functionen sein müssen.

Somit ergibt sich schliesslich die typische Form

I.

$x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2,$ $A_i(x_2)x_1, \quad A_i(x_2)y_1, \quad B_k(x_2), \quad \begin{smallmatrix} i=1,2,\dots,t \\ k=1,2,\dots,t \end{smallmatrix}$ wo jedes $A_i A_j \equiv \sum \text{Const. } B$ sein muss.
--

Wir könnten diese Gruppe auch in ihren *infinitesimalen Transformationen* schreiben. Doch unterlassen wir dies, da sie dadurch nur unübersichtlich wird.

Um nun den *zweiten Fall* zu behandeln, in welchem auch charakteristische Functionen  $\mathcal{Q}$  mit einem Gliede in  $\omega = x_1 y_1 - 2z$  auftreten (vgl. pag. 132), haben wir zunächst eine solche Function  $\mathcal{Q}_1$  zum Typus I. hinzuzufügen. Ihre Combinationen mit jenen Functionen müssen in Gemässheit der Gestaltung (2) der Gruppe sich durch die Functionen des Typus I. allein linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Wir erhalten aber, wenn wir setzen:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{2} A x_1^2 + B x_1 y_1 + \frac{1}{2} C y_1^2 + D x_1 + E y_1 + F + G \omega,$$

durch Combination mit  $x_1^2$ :

$$- 2x_1(Bx_1 + Cy_1 + E),$$

mit  $x_1 y_1$ :

$$A x_1^2 - C y_1^2 + D x_1 - E y_1,$$

mit  $y_1^2$ :

$$2y_1(Ax_1 + By_1 + D),$$

mit  $A_ix_1$ :

$$-A_i(Bx_1 + Cy_1 + E - Gx_1),$$

mit  $A_iy_1$ :

$$A_i(Ax_1 + By_1 + D + Gy_1),$$

mit  $B_k$ :

$$2B_kG.$$

Also sind  $A, B, C$  Constanten, die wir offenbar  $\equiv 0$  annehmen können. Ferner wird

$$E \equiv \sum \text{Const. } A_i, \quad D \equiv \sum \text{Const. } A_i$$

und deshalb darf auch  $E \equiv D \equiv 0$  angenommen werden.  $B_kG$  muss unter den  $B_k$  enthalten sein, also auch  $(B_kG) \cdot G = B_kG^2$ , ferner  $B_kG^3$  etc., woraus aber, da nicht alle  $B_k \equiv 0$  sind, lediglich  $G \equiv \text{Const.}$  folgt, sodass wir

$$Q_1 \equiv x_1y_1 - 2z$$

setzen müssen.

Damit ist der Typus gefunden:

II.

$  \begin{aligned}  &x_1^2, & x_1y_1, & y_1^2, \\  &A_ix_1, & A_iy_1, & B_k, \\  &(\text{wo jedes } A_iA_j \equiv \sum \text{Const. } B_k) \\  &\quad i=1, 2, \dots, s, \quad k=1, 2, \dots, t. \\  &x_1y_1 - 2z.  \end{aligned}  $
---

Eine weitere Function  $Q_2$  mit  $\omega$  können wir offenbar *nicht* hinzufügen; sie würde sich ja auch auf  $x_1y_1 - 2z$  reducieren.

Ob nun die beiden Typen I. und II., welche hiernach die einzigen sind, die es giebt, wirklich irreducibel sind oder nicht, wollen wir erst an einer späteren Stelle entscheiden. Wir werden ihre Irreducibilität nachweisen, natürlich nur unter der Annahme  $s, t > 0$ .



§ 2. Die Gruppen  $A_k f$ ,  $C_i f$ , deren Untergruppen  $A_k f$  die Linien-elemente der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  6- oder 7-gliedrig transformieren.

Wir wissen (vgl. pag. 123), dass, wenn die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  bei einer der gesuchten irreducibelen Gruppen von Berührungstransformationen des  $R_3$  wirklich unter einander vertauscht werden, alsdann diejenigen Transformationen der Gruppe, welche diese Ebenen sämtlich einzeln stehen lassen, eine *invariante Untergruppe* erzeugen. Wenn nun bei diesen Transformationen die Linienelemente der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  6- oder 7-gliedrig vertauscht werden, so können wir diese Untergruppe offenbar in der Form I. resp. II. des vorhergehenden Paragraphen annehmen, denn diese Formen werden aus den allgemeinen Formen derartiger Gruppen dadurch gewonnen, dass man gewisse Berührungstransformationen ausführt (vgl. im vorigen Paragraphen die Formeln (4), (5), (6) und (9)), bei denen stets  $x_2$  selbst ungeändert bleibt. (Wäre bei denselben auch  $x_2$  transformiert worden, so dürften wir die Untergruppen nicht ohne weiteres in der Form I. oder II. wählen.) Zu diesen Untergruppen treten dann noch 1, 2 resp. 3 Transformationen hinzu, welche die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  unter einander vertauschen und die wir früher (pag. 123) durch  $C_1 f$ ,  $C_2 f$ ,  $C_3 f$  bezeichnet haben.

Bei  $C_1 f$  erhält  $x_2$  das Increment  $\partial t$ , bei  $C_2 f$  das Increment  $x_2 \partial t$  und bei  $C_3 f$  das Increment  $x_2^2 \partial t$ . Wenn wir aber unter  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  die zu  $C_1 f$ ,  $C_2 f$ ,  $C_3 f$  gehörigen charakteristischen Functionen verstehen, so hat  $x_2$  bei diesen drei Transformationen nach den Formeln (3') der Einleitung die respectiven Incremente

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_2} \partial t, \quad \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \partial t, \quad \frac{\partial W_3}{\partial y_2} \partial t.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_2} \equiv 1, \quad \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \equiv x_2, \quad \frac{\partial W_3}{\partial y_2} \equiv x_2^2$$

und  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  haben somit die Formen:

$$(I) \quad W_m \equiv x_2^{m-1} y_2 + \Phi_m(x_1, x_2, y_1, z). \quad (m=1,2,3)$$

Die Functionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  müssen wir nun im folgenden durch die Forderung einschränken, dass  $C_1f, C_2f, C_3f$  mit den Transformationen  $Af$  der Gruppe I. resp. II. wieder Gruppen bilden müssen, sodass I. resp. II. in diesen Gruppen die Rolle invarianter Untergruppen spielen. *Es muss also jedes  $(A_kf, C_mf)$  sich durch die Transformationen  $Af$  von I. resp. II. allein linear mit constanten Coefficienten ausdrücken.* Dies gilt stets, ob nun nur  $C_1f$  oder ausserdem  $C_2f$  oder schliesslich alle drei  $Cf$  zu den Transformationen I. resp. II. hinzutreten. Wenn aber  $(A_kf, C_mf)$  sich durch die  $Af$  allein ausdrücken soll, so muss dasselbe für die Combination der zugehörigen charakteristischen Functionen gelten. Daher berechnen wir im folgenden die Combinationen der  $W_1, W_2, W_3$  mit den charakteristischen Functionen der Typen I. und II. in Gemässheit der Formel (5') der Einleitung.

Es kommt nach (1):

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} 1. & \{x_1^2, W_m\} \equiv -2x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} - x_1^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 2. & \{x_1 y_1, W_m\} \equiv x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1}, \\ 3. & \{y_1^2, W_m\} \equiv 2y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + y_1^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 4. & \{A_i x_1, W_m\} \equiv -A_i \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} - A'_i x_1 x_2^{m-1} - A_i x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 5. & \{A_i y_1, W_m\} \equiv A_i \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} - A'_i y_1 x_2^{m-1}, \\ 6. & \{B_k, W_m\} \equiv -B'_k x_2^{m-1} - B_k \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 7. & \{x_1 y_1 - 2z, W_m\} \equiv x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} + 2z \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} - 2\Phi_m. \end{array} \right.$$

Um uns bequemer ausdrücken zu können, wollen wir den Fall, in welchem die Linienelemente der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  bei festgehaltenen Ebenen vermöge I. transformiert werden, *den Fall  $G_6$* , den, in welchem sie vermöge II. transformiert werden, *den Fall  $G_7$*  nennen.

Nach dem obengesagten müssen sich nun im Falle  $G_6$  die Functionen  $(2)_1, (2)_2, \dots, (2)_6$  durch die in I. vorkommenden, im Falle  $G_7$

die Functionen  $(2)_1, (2)_2, \dots, (2)_7$  durch die in II. vorkommenden charakteristischen Functionen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. In beiden Fällen müssen also die Functionen  $(2)_1, \dots, (2)_6$  jedenfalls linear in  $z$  sein und zwar muss  $z$  einen constanten Coefficienten haben (der im Falle  $G_6$  sogar gleich Null anzunehmen ist).  $(2)_5, (2)_6$  und  $(2)_4$  lehren also, dass

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1}$$

sämtlich nur linear in  $z$  sein können (denn die  $A_i$  und  $B_k$  in I. oder II. sind nicht sämtlich  $\equiv 0$ ).  $\Phi_m$  hat daher die Form:

$$(3) \quad \Phi_m \equiv \chi_m(x_2)z^2 + \phi_m(x_1, x_2, y_1)z + \varphi_m(x_1, x_2, y_1), \quad (m=1,2,3)$$

wo  $\chi_m$  nur von  $x_2$  abhängt.

Aber noch mehr! Infolge von (3) kommen in den Functionen  $(2)_1, \dots, (2)_6$  folgende Coefficienten von  $z$  vor:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad -2x_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} - 2x_1^2 \chi_m, \\ 2. \quad x_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1}, \\ 3. \quad 2y_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} + 2y_1^2 \chi_m, \\ 4. \quad -A_i \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} - 2A_i x_1 \chi_m, \\ 5. \quad A_i \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}, \\ 6. \quad -2B_k \chi_m. \end{array} \right.$$

Sie müssen constant sein. Nach  $(4)_4$  und  $(4)_5$  ist also:

$$A_i \left( x_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} \right) - 2A_i x_1 y_1 \chi_m \equiv x_1 \text{ Const.} + y_1 \text{ Const.},$$

daher nach  $(4)_2$  auch:

$$A_i \cdot \text{Const.} - 2A_i x_1 y_1 \chi_m \equiv x_1 \text{ Const.} + y_1 \text{ Const.},$$

was, da  $A_i$  nur von  $x_2$  abhängt, nicht anders möglich ist, als dass sämtliche Summanden einzeln gleich Null sind. Wir erhalten dadurch

$$(5) \quad \chi_m \equiv 0,$$

und ausserdem muss  $(4)_2$  gleich Null sein, d. h. es ist

$$(6) \quad \phi_m \equiv \phi_m(x_1 y_1, x_2).$$

$(4)_1$  und  $(4)_3$  werden nunmehr zu

$$- 2x_1^2 \frac{\partial \phi_m}{\partial (x_1 y_1)}, \quad 2y_1^2 \frac{\partial \phi_m}{\partial (x_1 y_1)}.$$

Dies aber sind nur dann Constanten, wenn  $\phi_m$  frei von  $x_1 y_1$  ist.

Somit ergibt sich nach (3), (5) und (6):

$$\Phi_m \equiv \phi_m(x_2)z + \varphi_m(x_1, x_2, y_1). \quad (m=1,2,3)$$

Es ist aber für die folgenden Betrachtungen bequemer,  $\Phi_m$  in dieser Form zu schreiben

$$(7) \quad \Phi_m \equiv -\frac{1}{2} \phi_m(x_2) \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_m(x_1, x_2, y_1), \quad (m=1,2,3)$$

wo  $\phi_m$  eine Function von  $x_2$  allein bedeutet. Diese Form stimmt im wesentlichen mit der vorhergehenden überein.

Wenn wir diesen Wert (7) in die Formeln (2) einführen, so ergibt sich, dass

$$\{x_1^2, W_m\} \equiv \{x_1^2, \omega_m\} \equiv S_1,$$

$$\{x_1 y_1, W_m\} \equiv \{x_1 y_1, \omega_m\} \equiv S_2,$$

$$\{y_1^2, W_m\} \equiv \{y_1^2, \omega_m\} \equiv S_3,$$

$$\{A_i x_1, W_m\} \equiv \{A_i x_1, \omega_m\} - A'_i x_1 x_2^{m-1} - \frac{1}{2} A_i \phi_m x_1 \equiv S_4,$$

$$\{A_i y_1, W_m\} \equiv \{A_i y_1, \omega_m\} - A'_i y_1 x_2^{m-1} - \frac{1}{2} A_i \phi_m y_1 \equiv S_5,$$

$$\{B_k, W_m\} \equiv \{B_k, \omega_m\} - B'_k x_2^{m-1} - B_k \phi_m \equiv S_6,$$

$$\{x_1 y_1 - 2z, W_m\} \equiv \{x_1 y_1 - 2z, \omega_m\} \equiv S_7.$$

Die rechten Seiten  $S_1, \dots, S_6$  resp.  $S_1, \dots, S_7$  müssen sich, wie wir wissen, als charakteristische Functionen des Typus I. resp. II. darstellen.

Wir bilden nun:

$$\frac{2}{x_1} S_4 + \frac{2}{y_1} S_5 \equiv A_i \left( \frac{2}{y_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial y_1} \right) - 4 A'_i x_2^{m-1} - 2 A_i \phi_m$$

und

$$\frac{1}{x_1^2} S_1 + \frac{1}{y_1^2} S_3 \equiv \frac{2}{y_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial y_1},$$

Relationen, von deren Richtigkeit man sich durch Ausrechnung überzeuge. Hieraus folgt:

$$\frac{2}{x_1} S_4 + \frac{2}{y_1} S_5 \equiv A_i \left( \frac{1}{x_1^2} S_1 + \frac{1}{y_1^2} S_3 \right) - 4 A'_i x_2^{m-1} - 2 A_i \phi_m.$$

Die  $S$  besitzen, da sie charakteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen, sämtlich die Form:

$$\begin{aligned} & \text{Const. } x_1^2 + \text{Const. } x_1 y_1 + \text{Const. } y_1^2 \\ & + \sum \text{Const. } A x_1 + \sum \text{Const. } A y_1 + \sum \text{Const. } B + \text{Const. } (x_1 y_1 - 2z). \end{aligned}$$

Wenn wir also in unserer letzten Identität die von  $x_1, y_1, z$  freien Glieder links und rechts vergleichen, so ergibt sich:

$$\sum \text{Const. } A \equiv \text{Const. } A_i - 4 A'_i x_2^{m-1} - 2 A_i \phi_m,$$

d. h.:

$$(8) \quad 2 A'_i x_2^{m-1} + A_i \phi_m \equiv \sum \text{Const. } A.$$

Daraus folgt nach den obigen Werten von  $S_4$  und  $S_5$ , dass ebenso wie  $S_4$  und  $S_5$  selbst auch  $\{A_i x_1, \omega_m\}$  und  $\{A_i y_1, \omega_m\}$  charakteristische Functionen des Typus I. resp. II. sein müssen. Weil ferner in  $S_6$

$$\{B_k, \omega_m\} \equiv 0$$

ist, da  $B_k$  und  $\omega_m$  blosse Functionen von  $x_2$  resp.  $x_1, x_2, y_1$  sind, so ergibt sich, da  $S_6$  auch charakteristische Function von I. resp. II. sein muss:

$$(9) \quad B'_k x_2^{m-1} + B_k \phi_m \equiv \sum \text{Const. } B.$$

Unsere Betrachtungen lehren also, dass die Combinationen der charakteristischen Functionen von I. resp. II. mit  $\omega_m$  allein (statt mit  $W_m$ ) wieder charakteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen, d. h. dass die

Gruppe I. resp. II. mit der zu  $\omega_m$  gehörigen infinitesimalen Berührungstransformation eine Gruppe erzeugt, welche die Gruppe I. resp. II. zur invarianten Untergruppe hat. Diese (grössere) Gruppe muss nun wieder eine der typischen Formen I. resp. II. haben, d. h.  $\omega_m$  hat die Form:

$$\omega_m \equiv ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F + g(x_1y_1 - 2z),$$

wo  $a, b, c, g$  Constanten sind (von denen im Falle  $G_6$   $g = 0$  ist) und  $D, E, F$  Functionen von  $x_2$  bedeuten.

In der charakteristischen Function(1), welche jetzt die Form hat

$$W_m \equiv x_2^{m-1}y_2 - \frac{1}{2}\phi_m(x_1y_1 - 2z) + \omega_m,$$

können nun aber offenbar die Glieder gestrichen werden, welche für sich genommen charakteristische Functionen von I. resp. II. sind. Mithin dürfen wir setzen

$$\omega_m \equiv Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Gerade so wie pag. 141 ergibt sich hier weiter, dass  $Dx_1, Ex_1, Dy_1, Ey_1$  charakteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen und also  $D \equiv E \equiv 0$  gesetzt werden kann.  $\omega_m$  reducirt sich also schliesslich auf eine blosser Function von  $x_2$ .

Im Falle  $G_7$  muss übrigens wegen

$$\{x_1y_1 - 2z, \omega_m\} \equiv -2\omega_m$$

$\omega_m$  charakteristische Function von II. sein, d. h. dann darf  $\omega_m \equiv 0$  gesetzt werden.

Die Formeln (8), (9) und nach (1) und (7):

$$(10) \quad W_m \equiv x_2^{m-1}y_2 - \frac{1}{2}\phi_m(x_2)(x_1y_1 - 2z) + \omega_m(x_2),$$

wo im Fall  $G_7$   $\omega_m \equiv 0$  ist, stellen das Resultat unserer Betrachtungen dar.

Wenn wir nunmehr vermöge der endlichen Berührungstransformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho(x'_2)x'_1, & y_1 &= \rho y'_1, \\ x_2 &= x'_2, & y_2 &= \rho^2 y'_2 - \rho \rho' (x'_1 y'_1 - 2z') + \sigma'(x'_2), \\ z &= \rho^2 z' + \sigma(x'_2), \end{aligned}$$

wo

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = \rho^2 (dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2)$$

ist und im Falle  $G_7$   $\sigma(x_2) \equiv 0$  angenommen werden soll, neue Variablen in Gemässheit der unter C. in der Einleitung gemachten Bemerkungen einführen, so ändern sich die Typen I. und II. nicht wesentlich. Wohl aber ist  $W_m$  zu ersetzen durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \left( x_2^{m-1} y_2 - \frac{1}{2} \phi_m \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_m \right) &= \frac{x_2'^{m-1}}{\rho^2} [\rho^2 y'_2 - \rho \rho' (x'_1 y'_1 - 2z') + \sigma'] \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi_m \cdot (x'_1 y'_1 - 2z') + \frac{1}{\rho^2} \omega_m + \frac{1}{\rho^2} \phi_m \sigma. \end{aligned}$$

Wählen wir also  $\rho(x'_2)$  und  $\sigma(x'_2)$  so, dass:

$$-\frac{\rho'(x'_2)}{\rho(x'_2)} - \frac{1}{2} \phi_1 \equiv 0, \quad \sigma'(x'_2) + \omega_1(x'_2) + \sigma(x'_2) \phi_1 \equiv 0$$

wird, was immer möglich ist, ohne dass  $\rho \equiv 0$  zu werden braucht, so folgt, dass  $W_1$  die einfache Form annimmt:

$$(11) \quad W_1 \equiv y_2,$$

wenn nämlich in den neuen Variablenbezeichnungen die unnötigen Accente weggelassen werden (und zwar gilt dies auch im Fall  $G_7$ , denn dann ist ja  $\omega_1 \equiv \sigma \equiv 0$  zu nehmen).

$W_2$  und  $W_3$  ändern ihre Form nicht wesentlich bei Einführung jener neuen Variablen.

Wir erledigen nun nach einander die 3 Fälle, wo 1) nur  $W_1$ , 2) auch  $W_2$ , 3) alle drei  $W$  zu den charakteristischen Functionen I. resp. II. hinzutreten. Zu bemerken ist, dass die obigen Formeln für alle drei Fälle gelten. Auch ist klar, dass mit (8), (9) und (10) alle Bedingungen, welche aus der Forderung der Gruppeneigenschaft fliessen, erschöpft sind, ausgenommen die aus den Combinationen der  $W$  unter einander folgenden.

*Erster Fall:  $m = 1$ .*

Hier tritt zu I. resp. II. nur hinzu nach (11):

$$W_1 \equiv y_2$$

und (8) und (9) liefern für  $m = 1$ :

$${}_2A'_i \equiv \sum \text{Const. } A, \quad B'_k \equiv \sum \text{Const. } B.$$

Diese Gleichungen lehren, dass die  $A$  die Formen haben:

$$x_2^{\sigma_i} e^{a_i x_2} \quad (\sigma_i = 0, 1, \dots, s_i, \quad a_i = \text{Const.}, \quad i = 1, 2, \dots, s)$$

und die  $B$  die Formen:

$$x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2} \quad (\tau_k = 0, 1, \dots, t_k, \quad \beta_k = \text{Const.}, \quad k = 1, 2, \dots, t),$$

aber natürlich derart, dass immer, wie in Typus I. und II. verlangt wird, das Product zweier  $A$  ein  $B$  ist.

Berücksichtigen wir dies, so können wir schliesslich im vorliegenden Falle folgende beiden Typen angeben:

$x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2,$ $x_2^{\sigma_i} e^{a_i x_2} x_1, \quad x_2^{\sigma_i} e^{a_i x_2} y_1, \quad x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2},$ $y_2,$ <p>III.     <math>\sigma_i = 0, 1, 2, \dots, s_i, \quad a_i = \text{Const.}, \quad i = 1, 2, \dots, s,</math></p> <p>          <math>\tau_k = 0, 1, 2, \dots, t_k, \quad \beta_k = \text{Const.}, \quad k = 1, 2, \dots, t,</math></p> <p>          sodass jedes <math>x_2^{\alpha_i + \sigma_j} e^{(a_i + a_j) x_2}</math> die</p> <p>          Form <math>\sum \text{Const. } x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}</math> hat.</p>
--

und:

<p>IV.     Dieselben charakteristischen Functionen wie bei III.</p> <p>          und ausserdem noch</p> $x_1 y_1 - 2z.$
---

*Zweiter Fall:  $m = 1, 2$ .*

In diesem Falle tritt zu III. resp. IV. nach (10) noch hinzu:

$$W_2 \equiv x_2 y_2 - \frac{1}{2} \phi_2 \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_2.$$



Weil:

$$\{W_1, W_2\} \equiv \{y_2, W_2\} \equiv \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \equiv -\frac{1}{2} \phi'_2 \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega'_2$$

ist, so muss die rechte Seite eine charakteristische Function des Typus I. resp. II. sein.

Im Falle  $G_6$  ist daher  $\phi'_2 \equiv 0$ , im Fall  $G_7$   $\phi'_2 \equiv \text{Const.}$ , in beiden also

$$\phi_2 \equiv -2ax_2 - 2b$$

zu setzen, wo  $a$  und  $b$  Constanten bedeuten, derart dass im Fall  $G_6$   $a = 0$  gesetzt werden muss und im Fall  $G_7$   $b = 0$  gesetzt werden darf (da dann  $x_1 y_1 - 2z$  in der Gruppe selbständig auftritt).

(8) und (9) ergeben für  $m = 2$ :

$$2A'_i x_2 + A_i(-2ax_2 - 2b) \equiv \sum \text{Const. } A,$$

$$B'_k x_2 + B_k(-2ax_2 - 2b) \equiv \sum \text{Const. } B.$$

Da für

$$A_i \equiv x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2}, \quad B_k \equiv x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}$$

die Relationen bestehen:

$$A'_i x_2 \equiv \sigma_i A_i + \alpha_i x_2 A_i,$$

$$B'_k x_2 \equiv \tau_k B_k + \beta_k x_2 B_k,$$

so können wir dafür schreiben:

$$(2\sigma_i + 2\alpha_i x_2 - 2ax_2 - 2b) A_i \equiv \sum \text{Const. } A,$$

$$(\tau_k + \beta_k x_2 - 2ax_2 - 2b) B_k \equiv \sum \text{Const. } B,$$

d. h.:

$$(2\alpha_i - 2a)x_2 A_i \equiv \sum \text{Const. } A, \quad (\beta_k - 2a)x_2 B_k \equiv \sum \text{Const. } B.$$

Wenn somit  $2\alpha_i - 2a$  nicht für jedes  $\alpha_i$  gleich Null ist, so ist mit  $A_i$  auch stets  $x_2 A_i$  eines aus der Reihe der  $A$ . Da jedoch die gesuchten Gruppen endlich sein sollen, so darf dies nicht sein, d. h. es ist

$$2\alpha_i - 2a = 0.$$

Ebenso folgt:

$$\beta_k - 2a = 0,$$

d. h.:

$$\alpha_i = a, \quad \beta_k = 2a.$$

Da also nur ein  $\alpha_i = a$  und ein  $\beta_k = 2a$  vorkommt, so sind die  $A$  resp.  $B$  die Functionen:

$$e^{ax_2}, x_2 e^{ax_2}, \dots, x_2^s e^{ax_2}$$

resp.

$$e^{2ax_2}, x_2 e^{2ax_2}, \dots, x_2^t e^{2ax_2},$$

wo, da jedes Product zweier  $A$  sich durch die  $B$  ausdrücken lassen muss, notgedrungen

$$t \geq 2s$$

ist.

Ferner wird jetzt:

$$W_2 \equiv x_2 y_2 + (ax_2 + b)(x_1 y_1 - 2z) + \omega_2,$$

wo  $\omega'_2$ , wie die obige Combination  $\{W_1 W_2\}$  lehrte, charakteristische Function des Typus I. resp. II. sein muss.

Im Falle  $G_6$  ist aber, wie gesagt,  $a = 0$  und also  $\omega'_2$  von der Form:

$$\omega'_2 \equiv \sum_0^t \text{Const. } x_2^s,$$

sodass

$$\omega_2 \equiv \sum_0^{t+1} \text{Const. } x_2^s$$

wird. Da aber  $1, x_2, x_2^2, \dots, x_2^t$  selbst charakteristische Functionen sind, so dürfen wir einfach

$$\omega_2 \equiv cx_2^{t+1} \quad (c = \text{Const.})$$

setzen, sodass sich der Typus ergibt:

V.

$$\begin{aligned} & x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2, \\ & x_1, \quad x_2 x_1, \quad x_2^2 x_1, \quad \dots, \quad x_2^s x_1, \\ & y_1, \quad x_2 y_1, \quad x_2^2 y_1, \quad \dots, \quad x_2^s y_1, \\ & 1, \quad x_2, \quad x_2^2, \quad \dots, \quad x_2^t, \\ & y_2, \\ & x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + cx_2^{t+1}. \\ & t \geq 2s. \end{aligned}$$

Im Falle  $G_7$  dagegen lässt sich  $b = 0$  machen, auch ist dann nach dem früheren (siehe S. 148)  $\omega_2 \equiv 0$  zu setzen. Also wird dann

$$W_2 \equiv x_2 y_2 + a x_2 (x_1 y_1 - 2z).$$

Führen wir neue Variablen vermöge der Berührungstransformation

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = e^{ax_2} x'_1, & x_2 = x'_2, & z = e^{2ax_2} z', \\ y_1 = e^{ax_2} y'_1, & y_2 = e^{2ax_2} y'_2 - ae^{2ax_2} (x'_1 y'_1 - 2z') \end{cases}$$

ein, so bleiben  $x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z$  als charakteristische Functionen bis auf andere Variabelnbezeichnung ungeändert, während die

$$x_2^\sigma e^{ax_2} x_1, \quad x_2^\sigma e^{ax_2} y_1, \quad x_2^\tau e^{2ax_2}$$

resp. übergehen in

$$x_2'^\sigma x'_1, \quad x_2'^\sigma y'_1, \quad x_2'^\tau.$$

Anstelle von  $W_1$  tritt

$$y'_2 - a(x'_1 y'_1 - 2z'),$$

anstelle von  $W_2$ :

$$x'_2 y'_2.$$

Da  $x'_1 y'_1 - 2z'$  in der transformierten Gruppe selbständig auftritt, so können wir in dem neuen  $W_1$   $a = 0$  setzen und es folgt der Typus:

VI.

$$\begin{array}{c} x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2, \\ x_1, \quad x_2 x_1, \quad x_2^2 x_1, \quad \dots, \quad x_2^t x_1, \\ y_1, \quad x_2 y_1, \quad x_2^2 y_1, \quad \dots, \quad x_2^t y_1, \\ 1, \quad x_2, \quad x_2^2, \quad \dots, \quad x_2^t, \\ y_2, \quad x_2 y_2, \\ x_1 y_1 - 2z. \\ (t \geq 2s). \end{array}$$

*Dritter Fall:*  $m = 1, 2, 3$ .

Hier tritt zum Typus V. resp. VI. noch hinzu

$$W_3 \equiv x_2^2 y_2 - \frac{1}{2} \phi_3 \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_3.$$

Es ist nämlich zu beachten, dass die Einführung neuer Variabeln vermöge (12) die Form von  $W_3$  nicht wesentlich geändert hat. (8) und (9) ergeben nunmehr für  $m = 3$ :

$$(13) \quad 2A'_i x_2^2 + A_i \phi_3 \equiv \sum \text{Const. } A,$$

$$(14) \quad B'_k x_2^2 + B_k \phi_3 \equiv \sum \text{Const. } B.$$

Für das specielle  $A_i = 1$  kommt sofort:

$$\phi_3 \equiv \sum \text{Const. } A \equiv \sum_0^i c_\sigma x_2^\sigma.$$

In (13) eingesetzt gibt dies für das letzte  $A_i = x_2^i$ :

$$2s x_2^{i+1} + x_2^i \sum_0^i c_\sigma x_2^\sigma \equiv \sum_0^i \text{Const. } x_2^\sigma,$$

d. h. es ist

$$2s + c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \dots = c_i = 0,$$

also:

$$\phi_3 \equiv c_0 - 2s x_2.$$

In (14) eingesetzt folgt für  $B_k = x_2^t$ :

$$t x_2^{t+1} + x_2^t (c_0 - 2s x_2) \equiv \sum_0^t \text{Const. } x_2^\tau,$$

d. h.:

$$t = 2s.$$

Im übrigen werden jetzt offenbar alle Relationen (13) und (14) erfüllt.

Wir combinieren nun:

$$(15) \quad \{W_1, W_3\} \equiv \{y_2, W_3\} \equiv \frac{\partial W_3}{\partial x_1} \equiv 2x_2 y_2 + s(x_1 y_1 - 2z) + \omega'_3.$$

Im Falle  $G_6$  muss dies charakteristische Function von Typus V. sein, d. h. dann muss

$$(s - 2b)(x_1 y_1 - 2z) + \omega'_3 - 2c x_2^{2s+1}$$

characteristische Function vom Typus I. sein. Folglich haben wir:

$$(16) \quad s = 2b; \quad \omega'_3 - 2c x_2^{2s+1} = \sum_0^{2s} \gamma_\tau x_2^\tau, \quad (\gamma_\tau = \text{Const.}).$$

Wir bilden noch in diesem Falle  $G_6$ :

$$\begin{aligned} \{W_2, W_3\} &\equiv -x_2^2 y_2 - c(t+1)x_2^{t+2} + sx_2(x_1 y_1 - 2z) + x_2 \omega'_3 \\ &\quad + 2c\left(sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x_2^{t+1} - 2b\omega_3 \\ &\equiv -W_3 + \left(2sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)(x_1 y_1 - 2z) + 2\omega_3 - c(t+1)x_2^{t+2} + x_2 \omega'_3 \\ &\quad + 2c\left(sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x_2^{t+1} - 2b\omega_3. \end{aligned}$$

Die rechte Seite mit Ausnahme von  $W_3$  muss charakteristische Function von (I) sein, d. h. es ist zunächst:

$$2sx_2 - \frac{1}{2}c_0 \equiv 0,$$

daher  $s = c_0 = 0$ , also nach (16)  $b = 0$ ; wegen  $t = 2s = 0$  ferner:

$$\omega'_3 - 2cx_2 = \gamma_0,$$

$$\omega_3 = cx_2^2 + \gamma_0 x_2 + d. \quad (d = \text{Const.})$$

Eingesetzt folgt, dass

$$2cx_2^2 + 2\gamma_0 x_2 + 2d - cx_2^2 + 2cx_2^2 + \gamma_0 x_2$$

characteristische Function sein muss, d. h. es ist:

$$c = \gamma_0 = 0$$

und folglich lautet der Typus im Fall  $G_6$ , da in  $\omega_3$  die Constante  $d$  gestrichen werden darf:

VII.

$x_1^2$	,	$x_1 y_1$	,	$y_1^2$
$x_1$	,	$y_1$	,	1
$y_2$	,	$x_2 y_2$	,	$x_2^2 y_2$

Im Fall  $G_7$  endlich ist  $\omega_3 \equiv 0$ , also auch (15) wirklich eine charakteristische Function vom Typus VI. Wir haben dann noch zu combinieren, indem wir  $c_0$  wegen  $x_1 y_1 - 2z$  streichen dürfen:

$$\{W_2, W_3\} \equiv \{x_2 y_2, x_2^2 y_2 + sx_2(x_1 y_1 - 2z)\} = -W_3 + 2sx_2(x_1 y_1 - 2z),$$

d. h. es ist

$$s = 0 \quad \text{und daher} \quad t = 2s = 0,$$

sodass  $\phi_3 \equiv 0$  wird. Der Typus lautet folglich:

VIII.

$x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2,$ $x_1, \quad y_1, \quad 1,$ $y_2, \quad x_2 y_2, \quad x_2^2 y_2,$ $x_1 y_1 - 2z.$
---

Hiermit sind nun *alle* Typen aufgestellt worden, bei denen die Linien-elemente der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$ , wenn diese festgehalten werden, 6- oder 7-gliedrig transformiert werden.

Die Frage, ob die Gruppen III. bis VIII. nun auch wirklich *irreducibel* sind, ist noch nicht entschieden. Doch ist soviel klar, dass alle unsere Typen irreducibel sein müssen, sobald es jede Gruppe vom Typus I. ist. Dies allein bliebe also noch nachzuweisen, denn alle Gruppen II. bis VIII. enthalten Untergruppen von der Form I. Den Beweis verschieben wir auf später.

**§ 3. Die Gruppen  $A_{if}$ , welche die Linienelemente der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  zehngliedrig transformieren, und die zugehörigen Gruppen von der Form  $A_{if}$ ,  $C_{if}$ .**

Es mögen in allem folgenden  $W_1, \dots, W_{10}$  die charakteristischen Functionen derjenigen infinitesimalen Transformationen bedeuten, welche die irreducibele 10-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene  $(x_1, z, y_1)$  erzeugen (siehe pag. 129). Es sei also

$$W_1 \equiv 1, \quad W_2 \equiv x_1, \quad W_3 \equiv y_1, \quad W_4 \equiv x_1^2, \quad W_5 \equiv x_1 y_1, \quad W_6 \equiv y_1^2,$$

$$W_7 \equiv x_1 y_1 - 2z,$$

$$W_8 \equiv x_1(x_1 y_1 - 2z), \quad W_9 \equiv y_1(x_1 y_1 - 2z),$$

$$W_{10} \equiv (x_1 y_1 - 2z)^2.$$

Alsdann hat die *allgemeine infinitesimale Transformation* derjenigen Gruppe, die wir jetzt aufsuchen, eine charakteristische Function von der Form

$$\mathcal{Q}_k \equiv \sum_1^{10} \omega_{ki}(x_2) W_i, \quad (k=1,2,\dots,r)$$

wo die  $\omega_{ki}$  Functionen von  $x_2$  allein bezeichnen. Es geht dies unmittelbar aus den ersten Betrachtungen des § 1 hervor. Die gesuchte Gruppe sei  $r$ -gliedrig, sodass  $r \geq 10$  ist, weil sonst die gesuchte Gruppe in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  die Linienelemente weniger als 10-gliedrig transformiert. (Vgl. in der Einleitung unter E.)

Da die Gruppe der  $(\mathcal{Q})$  also die Linienelemente der Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = \text{Const.}$  gerade 10-gliedrig transformiert, so giebt es gerade  $(r - 10)$  unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, welche alle Linien Ebene einer bestimmt gewählten Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = x_2^0$  einzeln stehen lassen. Es giebt also unter den  $\mathcal{Q}$   $(r - 10)$  charakteristische Functionen — die wir durch  $\Phi_1, \dots, \Phi_{r-10}$  bezeichnen wollen —, deren zugehörige Transformationen die Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2^0$  sämtlich invariant lassen.

Ist  $r$  gerade gleich 10, so bleiben die Linienelemente in allen Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  fest, sobald sie in einer Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  festgehalten werden.

Ist dagegen  $r > 10$ , so erzeugen die zu  $\Phi_1, \dots, \Phi_{r-10}$  gehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen eine  $(r - 10)$ -gliedrige Untergruppe der gesuchten Gruppe. Wir behaupten nun, dass diese Untergruppe in der ganzen Gruppe invariant ist. In der That, wenn wir auf eine Berührungstransformation  $(\Phi)$ , welche alle Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2^0$  stehen lässt, eine andere Berührungstransformation  $(\mathcal{Q})$  der ganzen Gruppe ausführen, welche sie unter sich transformiert, so ergiebt sich selbstverständlich wiederum eine Berührungstransformation, welche alle Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2^0$  einzeln invariant lässt.

Wenn wir nun die zu der invarianten Untergruppe  $(\Phi)$  der Gruppe  $(\mathcal{Q})$  gehörige verkürzte Gruppe betrachten, vermöge deren bei jener die Linienelemente einer der Ebene  $x_2 = x_2^0$  benachbarten Ebene  $x_2 = x_2'$  unter einander vertauscht werden, so ist klar, dass diese verkürzte Gruppe sich auf eine invariante Untergruppe der Gruppe der  $(W)$  oder auf diese Gruppe selbst reducieren muss. Es kann nur letzteres eintreten, da nämlich die Gruppe der  $(W)$  keine invariante Untergruppe — ausser eben sich

*selbst* — *besitzt*. Mithin folgt umgekehrt, dass die Functionen  $\Phi$  sich aus *allen zehn* Functionen  $W$  zusammensetzen:

$$\Phi_k \equiv \sum_1^{10} \varphi_{ki}(x_2) W_i \quad (k=1, 2, \dots, r-10)$$

und zwar so, dass diese  $(r-10)$  Functionen sich für  $x_2 = \text{Const.}$  auf *nicht weniger als* 10 von einander unabhängige Functionen reducieren. Es muss also  $r-10$  mindestens gleich 10 sein, sobald, wie wir annahmen,  $r > 10$  ist.

Die von den  $(r-10)$  unabhängigen infinitesimalen Berührungstransformationen  $(\Phi)$  erzeugte Gruppe transformiert nun die Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2^0$  benachbarten Ebene allgemeiner Lage  $x_2 = x_2'$  gerade 10-gliedrig. Es giebt mithin gerade  $(r-20)$  unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe, welche alle Linienelemente dieser Ebene  $x_2 = x_2'$  stehen lassen. Es seien dies die Transformationen  $(\Psi_1), \dots, (\Psi_{r-20})$ .

Die von  $(\Psi_1), \dots, (\Psi_{r-20})$  erzeugte  $(r-20)$ -gliedrige Gruppe (die sich, wenn  $r$  gerade gleich 20 ist, auf die Identität reducirt) ist nun wieder eine *invariante Untergruppe* der  $(r-10)$ -gliedrigen Gruppe  $(\Phi_1), \dots, (\Phi_{r-10})$ . Man kann auch zeigen, dass sie eine invariante Untergruppe der *ganzen*  $r$ -gliedrigen Gruppe  $(\mathcal{Q}_1), \dots, (\mathcal{Q}_r)$  ist.

Begrifflich ist dies sofort einzusehen, was darin liegt, dass die Gruppe  $(\Psi_1), \dots, (\Psi_{r-20})$  auch so gewonnen werden kann, dass zunächst die Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2'$ , dann erst die der Ebene  $x_2 = x_2^0$  festgehalten werden. Es seien nämlich  $X_1, \dots, X_{r-10}$  die charakteristischen Functionen der  $(r-10)$  unabhängigen infinitesimalen Transformationen der ganzen Gruppe, bei denen alles in der Ebene  $x_2 = x_2'$  fest bleibt. Die Gruppe  $(\Psi)$  ist alsdann invariante Untergruppe sowohl der Gruppe  $(\Phi)$  als auch der Gruppe  $(X)$ , welche beide wieder invariante Untergruppen der Gruppe  $(\mathcal{Q})$  sind. Einerseits hat also jedes  $\{\mathcal{Q}\Psi\}$  die Form  $\sum \text{Const. } \Phi$ , andererseits die Form  $\sum \text{Const. } X$ . Beide Formen aber können eben nur dann übereinstimmen, wenn sie gleich  $\sum \text{Const. } \Psi$  sind, denn die  $(\Psi)$  sind die einzigen den Gruppen  $(\Phi)$  und  $(X)$  gemeinsamen infinitesimalen Transformationen.

Genau so wie oben bei der Gruppe  $(\Phi)$  erkennen wir nun auch, dass sich die charakteristischen Functionen der Gruppe  $(\Psi)$ , wenn in ihnen für  $x_2$  eine Constante gesetzt wird, auf gerade 10 unabhängige Functionen — auf die  $W$  — reducieren etc.



Somit ergibt sich folgendes Resultat:

Entweder ist  $r = 10$  oder nicht.

Im letzteren Falle ist  $r > 10$  und zwar  $= 20$  oder  $> 20$ . Im letzteren Falle wiederum ist  $r = 30$  oder  $r > 30$  etc. Schliesslich folgt, dass  $r$  ein ganzes Vielfaches von 10 ist. Alsdann existiert eine 10-gliedrige Gruppe, die in einer 20-gliedrigen, mit dieser zusammen in einer 30-gliedrigen etc. invariant ist. Die 10-gliedrige Gruppe hat die Beschaffenheit, dass ihre charakteristischen Functionen sich für  $x_2 = \text{Const.}$  auf  $W_1, W_2, \dots, W_{10}$  reducieren.

Im folgenden werden wir naturgemäss zunächst diese 10-gliedrige Gruppe zu bestimmen suchen. Alsdann haben wir weitere 10 infinitesimale Transformationen hinzuzufügen, sodass die 10-gliedrige Gruppe in der so entstehenden 20-gliedrigen als invariante Untergruppe enthalten ist, etc.

Unser Problem ist jetzt also das folgende:

Es sind 10 charakteristische Functionen gegeben von der allgemeinen Form:

$$\Omega_k \equiv \sum_1^{10} \omega_{ki}(x_2) W_i, \quad (k=1,2,\dots,10)$$

wo die  $W$  obige charakteristische Functionen der irreducibelen zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene  $(x_1, z, y_1)$  sind. Diese 10 Functionen  $\Omega_k$  sollen linear unabhängig von einander bleiben, wenn in ihnen für  $x_2$  eine nicht gerade ganz speziell gewählte Constante gesetzt wird. Man soll die Functionen  $\omega_{ki}(x_2)$  so bestimmen, dass die  $\Omega_k$  die charakteristischen Functionen einer Gruppe von Berührungstransformationen des  $R_3$  bilden.

Nach LIE lässt sich dieses Problem verhältnismässig einfach erledigen, wenn man von einem gewissen allgemeinen Satze der Gruppentheorie Gebrauch macht. Doch bedarf es dazu der folgenden Vorbemerkungen:

Interpretiert man in der in der Einleitung unter F. schon bemerkten Art  $x_1, z, y_1$  als Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes  $P_3$ , so stellt die 10-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen  $(W_1), \dots, (W_{10})$  der Ebene in diesem  $P_3$  eine 10-gliedrige Gruppe  $G_{10}$  von Punkttransformationen dar, welche die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

invariant lässt.

Wenn man nun statt  $x_1, z, y_1$  neue Variablen vermöge einer blossen Punkttransformation des  $P_3$  einführt, indem man setzt

$$x' = x_1, \quad y' = \frac{1}{2}y_1, \quad z' = z - \frac{1}{2}x_1y_1,$$

so geht  $G_{10}$  in eine neue Gruppe von Punkttransformationen des Raumes  $P_3(x', y', z')$  über, nämlich *in eine projective und zwar in die allgemeinste projective Gruppe, welche einen linearen Liniencomplex des  $P_3$  invariant lässt*. Dieser lineare Complex wird definiert durch die Gleichung

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0,$$

welche aus der obigen:

$$dz - y_1dx_1 = 0$$

durch Einführung der accentuierten Variablen hervorgeht. Die genannte projective Gruppe des  $P_3$  wollen wir mit  $G'_{10}$  bezeichnen. Ihre infinitesimalen Transformationen lauten entsprechend den Functionen  $W_1, \dots, W_{10}$  folgendermassen:

$$G'_{10} \left\{ \begin{array}{l} r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'q', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r', \\ \quad \quad \quad z'q' + x'(x'p' + y'q' + z'r'), \quad \quad z'p' - y'(x'p' + y'q' + z'r'), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad z'(x'p' + y'q' + z'r'), \end{array} \right.$$

wenn nämlich unter  $p', q', r'$  resp.  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  verstanden wird. Sie *combinieren sich* — abgesehen von Vorzeichen und unwesentlichen Zahlencoefficienten — *genau so wie die  $W$  selbst*.

Wie schon bemerkt, lässt die Gruppe  $G'_{10}$  den linearen Complex

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0$$

invariant. Ausser diesem lässt sie *keinen weiteren linearen Complex* invariant, denn ein solcher wäre ja definiert durch eine Gleichung

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' = 0,$$

die bei der Gruppe  $G'_{10}$  invariant bleiben müsste. Wenn wir aber in dieser Gleichung die ursprünglichen Veränderlichen wieder einführen, so

erhielten wir eine bei der Gruppe  $G_{10}$  oder also bei der Gruppe  $(W_1), \dots, (W_{10})$  invariante Gleichung

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z dz = 0.$$

Aber die irreducible Gruppe von Berührungstransformationen  $(W_1), \dots, (W_{10})$  lässt nur eine solche Gleichung, nämlich

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

als invariant zu. Denn eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene  $(x_1, z, y_1)$ , welche ausser dieser noch eine derartige Gleichung  $X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z dz = 0$  invariant lässt, ist nach einem bekannten allgemeinen Satze, den wir hier nicht beweisen, reducibel.

Die  $G'_{10}$  lässt somit *einen und nur einen* linearen Complex invariant.

Diese  $G'_{10}$  besitzt nun *zwei Arten von siebengliedrigen Untergruppen*. Bei einer siebengliedrigen Untergruppe der einen Art bleibt ein *Punkt*, bei einer der zweiten Art eine *Complexgerade* des  $P'_3$  invariant. Alle Gruppen der einen Art sind innerhalb der  $G'_{10}$  mit einander *gleichberechtigt*. Dasselbe gilt von allen Gruppen der anderen Art. Es hat dies seinen Grund darin, dass die  $G'_{10}$  jeden Punkt der  $P'_3$  in jeden anderen und jede Complexgerade in jede andere überzuführen vermag. Um also einen Typus für die eine oder andere Art von siebengliedrigen Untergruppen zu erhalten, braucht man nur unter den Transformationen der  $G'_{10}$  diejenigen 7 auszuwählen, welche einen bestimmten Punkt, z. B. den unendlich fernen Punkt der  $z'$ -Axe, oder eine bestimmte Complexgerade, z. B. die Axe des Ebenenbüschels  $y' = \text{Const.}$ , fest lassen.

So findet man die beiden *Typen*:

$$(1) \quad r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'q', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r' \\ \text{und}$$

$$(2) \quad r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r', \\ z'p' - y'(x'p' + y'q' + z'r').$$

Dem einen entspricht in den  $(W)$  die Gruppe

$$(1') \quad (W_1), (W_2), (W_3), (W_4), (W_5), (W_6), (W_7),$$

dem anderen die Gruppe

$$(2') \quad (W_1), (W_2), (W_3), (W_5), (W_6), (W_7), (W_9).$$

Dass sich die beiden Typen *durch keinerlei Punkttransformation in einander überführen lassen*, lehrt ihre Zusammensetzung oder, was auf dasselbe hinauskommt, die der Gruppen (1') und (2'). In der That, die Gruppe (1') besitzt eine invariante eingliedrige Untergruppe ( $W_1$ ), die Gruppe (2') aber hat, wovon man sich durch einfache Berechnung überzeugen mag, keine invariante eingliedrige Untergruppe. Es ist hierzu zweckmässig, die Combinationen  $\{W_i W_k\}$  zu kennen. Hierzu diene die folgende *Tabelle*, in welcher jedesmal der Schnitt einer Horizontal- mit einer Verticalreihe die Combination der ersten Glieder dieser Reihen angibt.

$\{W_i W_k\} =$	$k \rightarrow$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$	$W_8$	$W_9$	$W_{10}$
$W_1$		o	o	o	o	o	o	$2W_1$	$2W_2$	$2W_3$	$4W_4$
$W_2$		o	o	$-W_1$	o	$-W_2$	$-2W_3$	$W_2$	$W_4$	$W_5 - W_7$	$2W_8$
$W_3$		o	$W_1$	o	$2W_2$	$W_3$	o	$W_3$	$W_5 + W_7$	$W_8$	$2W_9$
$W_4$		o	o	$-2W_2$	o	$-2W_4$	$-4W_5$	o	o	$-2W_8$	o
$W_5$		o	$W_2$	$-W_3$	$2W_4$	o	$-2W_6$	o	$W_8$	$-W_9$	o
$W_6$		o	$2W_3$	o	$4W_5$	$2W_6$	o	o	$2W_9$	o	o
$W_7$		$-2W_1$	$-W_2$	$-W_3$	o	o	o	o	$W_8$	$W_9$	$2W_{10}$
$W_8$		$-2W_2$	$-W_4$	$-W_5 - W_7$	o	$-W_8$	$-2W_9$	$-W_8$	o	$-W_{10}$	o
$W_9$		$-2W_3$	$W_7 - W_5$	$-W_6$	$2W_8$	$W_9$	o	$-W_9$	$W_{10}$	o	o
$W_{10}$		$-4W_4$	$-2W_8$	$-2W_9$	o	o	o	$-2W_{10}$	o	o	o

Mit Hülfe dieser Tafel lässt sich leicht zeigen, dass es keine infinitesimale Transformation der Gruppe (2') gibt, welche mit einer beliebigen infinitesimalen Transformation dieser Gruppe (2') combinirt, immer wieder — mit einem Zahlenfactor — reproducirt wird.

Nach dieser längeren, aber notwendigen Einschaltung kehren wir zu unserem *Problem*, zur Gruppe  $(\mathcal{Q}_1), \dots, (\mathcal{Q}_{10})$ , zurück (pag. 159).

Bei dieser Gruppe bleiben die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  einzeln invariant. Wir betrachten nun die Gruppe von Berührungstransformationen, welche in der Ebene  $x_2 = x_2^0$  durch die Gruppe  $(\mathcal{Q})$  bestimmt wird. Ihre charakteristischen Functionen ergeben sich aus  $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{10}$ , wenn  $x_2 = x_2^0$  gesetzt wird. Es seien dies:

$$\mathcal{Q}_1^0, \dots, \mathcal{Q}_{10}^0,$$

und ihre Gruppe nennen wir  $\mathfrak{G}_{10}^0$ . Ebenso haben wir in einer benachbarten Ebene  $x_2 = x_2'$  eine Gruppe  $\mathfrak{G}_{10}'$ :

$$\mathcal{Q}_1', \dots, \mathcal{Q}_{10}'.$$

Wir interpretieren  $x_1, z, y_1$  in der obigen Weise als Punktkoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes  $P_3^0$ , indem wir gleichzeitig in die Gruppe  $\mathfrak{G}_{10}^0$  die neuen Variablen

$$x^0 = x_1, \quad y^0 = \frac{1}{2}y_1, \quad z^0 = z - \frac{1}{2}x_1y_1$$

(vgl. pag. 160) einführen. Damit haben wir eine Gruppe  $\mathfrak{G}_{10}^0$  im  $P_3^0$  gefunden, bei welcher der lineare Complex

$$dz^0 + x^0 dy^0 - y^0 dx^0 = 0$$

und kein weiterer invariant bleibt, denn  $(\mathcal{Q}_1^0), \dots, (\mathcal{Q}_{10}^0)$  soll ja eine irreducibele Berührungstransformationsgruppe der Ebene  $x_2 = x_2^0$  darstellen.

Ebenso haben wir in einem  $P_3'$  eine Gruppe  $\mathfrak{G}_{10}'$  in den Coordinaten

$$x' = x_1, \quad y' = \frac{1}{2}y_1, \quad z' = z - \frac{1}{2}x_1y_1$$

erhalten, bei der ausser dem Complex

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0$$

kein anderer invariant bleibt.

Halten wir nunmehr einen Punkt des  $P_3^0$  fest, so ergibt sich eine siebengliedrige Untergruppe  $\mathfrak{G}_7^0$  von  $\mathfrak{G}_{10}^0$ . Ihr entspricht wegen der isomorphen Zuordnung eine siebengliedrige Untergruppe  $\mathfrak{G}_7'$  der Gruppe  $\mathfrak{G}_{10}'$ .

Da die  $\bar{\mathcal{G}}_7^0$  nach den obigen einleitenden Bemerkungen (indem sie vom Typus (1) ist) eine eingliedrige invariante Untergruppe besitzt, so hat auch die  $\bar{\mathcal{G}}'_7$ , weil sie mit der  $\bar{\mathcal{G}}_7^0$  isomorph ist, eine solche. Folglich ist die  $\bar{\mathcal{G}}'_7$  eine solche siebengliedrige Untergruppe der  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$ , welche — wie die  $\bar{\mathcal{G}}_7^0$  im  $P_3^0$  — im  $P'_3$  einen Punkt, nicht eine Complexgerade fest lässt.

Die beiden Gruppen  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$  und  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$  haben daher folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

- 1.) Beide haben *gleichviele* Variablen  $x^0, y^0, z^0$  resp.  $x', y', z'$ .
- 2.) Beide sind *transitiv*.
- 3.) Sie sind *isomorph* auf einander bezogen.
- 4.) Wenn man bei der  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$  einen *Punkt festhält*, so ergibt sich eine siebengliedrige Untergruppe der  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$ , welcher isomorph diejenige siebengliedrige Untergruppe der  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$  entspricht, die aus allen Transformationen besteht, welche einen *Punkt* des  $P'_3$  *festlassen*.

Nach einem allgemeinen Satze von LIE giebt es dann aber eine *Transformation der Variablen  $x^0, y^0, z^0$  in die Variablen  $x', y', z'$ , welche die  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$  in die  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$  überführt*.

Diese Transformation lässt sich nun auch als Transformationen in den ursprünglichen Variablen  $x_1, z, y_1$ , die wir in der Ebene  $x_2 = x_2^0$  durch  $x_1^0, z^0, y_1^0$ , in der Ebene  $x_2 = x_2'$  durch  $x_1', z', y_1'$  zur Scheidung bezeichnen wollen, schreiben, und wir werden zeigen, dass sie eine *Berührungstransformation der Linienelemente* der Ebene  $x_2 = x_2^0$  in die der Ebene  $x_2 = x_2'$  ist.

In der That, die Transformation der  $x^0, y^0, z^0$  in die  $x', y', z'$  führt ja die bei  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$  invariante Gleichung:

$$dz^0 + x^0 dy^0 - y^0 dx^0 = 0$$

in die einzige bei  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$  invariante Gleichung derselben Art:

$$dz' + x' dy' - y' dx' = 0$$

über. Die entsprechende Transformation in den ursprünglichen Variablen führt also die bei  $\bar{\mathcal{G}}_{10}^0$  invariante Gleichung:

$$dz^0 - y_1^0 dx_1^0 = 0$$

in die bei  $\bar{\mathcal{G}}'_{10}$  invariante:

$$dz' - y_1' dx_1' = 0$$

über, d. h. sie ist eine Berührungstransformation der Ebene  $x_2 = x_2^0$  in die Ebene  $x_2 = x_2'$ .

Mithin lassen sich die beiden Gruppen  $\mathbb{G}_{10}^0$  oder  $(\mathcal{Q}^0)$  und  $\mathbb{G}_{10}'$  oder  $(\mathcal{Q}')$  vermöge einer Berührungstransformation der Linienelemente in einander überführen.

Um diese Berührungstransformation wirklich zu bestimmen, kann man so verfahren. Man hält bei der  $\mathbb{G}_{10}^0$  ein Linienelement fest. Bei der entsprechenden  $\mathbb{G}_{10}'$  hält man also dann einen Punkt des  $P_3^0$  fest und es ergibt sich eine 7-gliedrige Untergruppe  $\mathbb{G}_7^0$  von  $\mathbb{G}_{10}^0$ . Ihr entspricht isomorph eine ganz bestimmte 7-gliedrige Untergruppe  $\mathbb{G}_7'$  der  $\mathbb{G}_{10}'$ , bei der ein bestimmter Punkt der  $P_3'$  fest bleibt. Diesem Punkte endlich correspondiert ein bei der  $\mathbb{G}_{10}'$  in der Ebene  $x_2 = x_2'$  festgehaltenes Linienelement. Die Linienelemente der Ebene  $x_2 = x_2^0$  und  $x_2 = x_2'$  sind hierdurch in ganz bestimmter Weise einander zugeordnet, und diese Zuordnung stellt die gewünschte Berührungstransformation dar.

Wir nehmen nun an, dass für  $x_2 = x_2^0$  direct

$$\mathcal{Q}_1^0 = W_1^0, \dots, \mathcal{Q}_{10}^0 = W_{10}^0$$

sei. (Dies kann immer erreicht werden dadurch, dass man statt der  $\mathcal{Q}_k$  lineare Combinationen  $\sum \text{Const. } \mathcal{Q}$  derselben als neue  $\mathcal{Q}_k$  einführt.) Als dann giebt es also eine ganz bestimmte Berührungstransformation der Linienelemente, welche die  $\mathcal{Q}_k'$  in die  $W_k^0$  überführt. Die Gleichungen dieser Berührungstransformation werden etwa sein:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= X(x_1', z', y_1', x_2'), \\ y_1^0 &= Y(x_1', z', y_1', x_2'), \end{aligned} \quad z^0 = Z(x_1', z', y_1', x_2').$$

Diese Gleichungen aber kann man, — worauf wir schon früher einmal hingewiesen haben (siehe Einleitung unter E., pag. 125), — stets zu denen einer Berührungstransformation des  $R_3$  vervollständigen.

Lassen wir nun den überflüssigen Index Null in den Coordinaten  $x_1^0, z^0, y_1^0$  der Ebene  $x_2 = x_2^0$  fort, so sehen wir:

*Es giebt eine Berührungstransformation des  $R_3$ , welche  $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{10}$  resp. in  $W_1, \dots, W_{10}$  überführt; und somit können wir diese Gruppe ( $W$ ) selbst als den gesuchten Typus hinstellen.*

Diese im wesentlichen von LIE herrührende Betrachtung liefert folglich den Typus:

IX.

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z, \\ x_1(x_1 y_1 - 2z), y_1(x_1 y_1 - 2z), (x_1 y_1 - 2z)^2.$$

Wir müssen nun in Gemässheit des früheren (pag. 159) untersuchen, ob diese Gruppe nicht invariante Untergruppe einer 20-gliedrigen Gruppe sein kann, deren charakteristische Functionen sämtlich die Form

$$\varrho_k \equiv \sum_i \omega_{ki}(x_2) W_i$$

haben.

Wäre dies der Fall, so müsste jedes  $\{\varrho_x W_\lambda\}$  sich linear mit constanten Coefficienten durch  $W_1, \dots, W_{10}$  allein ausdrücken. Es ist aber allgemein

$$\{\varrho_k W_\lambda\} \equiv \sum_i \omega_{ki} \{W_i W_\lambda\},$$

und unsere allgemeine Combinationstafel (pag. 162) lehrt ohne Schwierigkeit, dass die  $\omega_{ki}$  sich auf Constanten reducieren müssten.

Also ergibt sich *kein* 20-gliedriger Typus, um so weniger ein 30- und mehr-gliedriger Typus. Typus IX. ist der *einzig*e.

Es bedarf nur noch weniger Bemerkungen, um diejenigen Gruppen  $A_{kf}, C_{if}$  zu bilden, deren Untergruppen  $A_{kf}$  die Linienelemente der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  10-gliedrig transformieren.

Indem wir nämlich auf die zu Eingang des § 2 gemachten Bemerkungen verweisen und uns dadurch ihrer im wesentlichen doch blossen Wiederholung an dieser Stelle überheben, bemerken wir, dass es nunmehr unsere Aufgabe ist, zum Typus IX. eine, zwei oder drei charakteristische Functionen hinzuzufügen von der Form

$$\varrho_m = x_2^{m-1} y_2 + \Phi_m(x_1, x_2, z, y_1),$$

— wo entweder  $m = 1$  oder  $m = 1, 2$  oder endlich  $m = 1, 2, 3$  zu setzen ist —, und zwar derart, dass jede Combination von  $\varrho_m$  mit einer der durch  $W$  bezeichneten charakteristischen Functionen des Typus IX. wieder von der Form  $\sum \text{Const. } W$  ist.



Da nun  $W_1, \dots, W_{10}$  ganz frei von  $x_2$  und  $y_2$  sind, so folgt aus der allgemeinen Combinationsformel (5') der Einleitung sofort, dass jedes:

$$\{\varrho_m, W_i\} \equiv \{\phi_m, W_i\}$$

ist. Es muss also die zu  $\phi_m$  allein gehörige infinitesimale Berührungstransformation  $(\phi_m)$  zusammen mit  $(W_1), \dots, (W_{10})$  eine Gruppe bilden, welche  $(W_1), \dots, (W_{10})$  zur invarianten Untergruppe besitzt. Diese Gruppe  $(\phi_m), (W_1), \dots, (W_{10})$  transformiert die Linienelemente der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  10-gliedrig. Nach dem obigen giebt es aber nur eine 10-gliedrige derartige Gruppe, nämlich die vom Typus IX. Daraus folgt, dass  $\phi_m$  die Form

$$\phi_m \equiv \sum \text{Const. } W$$

haben muss.

Weil nun in den gesuchten Gruppen die charakteristischen Functionen  $W_1, \dots, W_{10}$  sämtlich auftreten, so können wir folglich in

$$\Omega_m = x_2^{m-1} y_2 + \phi_m$$

das Glied  $\phi_m$  einfach streichen, sodass wir haben

$$\Omega_m \equiv x_2^{m-1} y_2.$$

Mithin müssen die gesuchten Gruppen die typischen Formen besitzen:

X.

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z, x_1(x_1 y_1 - 2z), \\ y_1(x_1 y_1 - 2z), (x_1 y_1 - 2z)^2, y_2.$$

XI.

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z, x_1(x_1 y_1 - 2z), \\ y_1(x_1 y_1 - 2z), (x_1 y_1 - 2z)^2, y_2, x_2 y_2.$$

XII.

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z, x_1(x_1 y_1 - 2z), \\ y_1(x_1 y_1 - 2z), (x_1 y_1 - 2z)^2, y_2, x_2 y_2, x_2^2 y_2.$$

Aus demselben Grunde, der pag. 156 in betreff der Typen III. bis VIII. geltend gemacht wurde, ist auch hier zu sagen, dass die Irreducibilität der Gruppen IX., X., XI., XII. bewiesen ist, sobald gezeigt ist, dass Typus I. irreducibel ist.

#### § 4. *Schlussbemerkungen.*

Nachdem wir somit alle Typen aufgestellt haben, harren noch einige *Einzelfragen* ihrer Erledigung.

Zunächst fragt es sich, ob die gefundenen Gruppen auch wirklich *irreducibel* sind. Nach dem früheren genügt es, die Irreducibilität des Typus I. nachzuweisen. Typus I. aber ist irreducibel, sobald eine Untergruppe dieses Typus irreducibel ist. Offenbar enthält I. Untergruppen von der Form

$$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, A x_1, A y_1, A^2,$$

wo  $A$  eine nicht identisch verschwindende Function von  $x_2$  allein ist. Es ist leicht — und wird weiter unten entwickelt werden — durch Einführung neuer Variablen vermöge einer Berührungstransformation des  $R_3$  hierin  $A \equiv 1$  zu machen. *Wir werden nun die Irreducibilität der Gruppe*

$$(1) \quad x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1, y_1, 1,$$

*natürlich diese aufgefasst als Gruppe des  $R_3$  — nicht bloss der Ebene —, nachweisen.*

Wir könnten dazu unser analytisches Criterium verwenden. (Siehe in der Einleitung unter B.) Doch erledigt sich unsere Aufgabe fast ohne Rechnungen durch die folgende Überlegung:

Wenn die obige Gruppe (1) des  $R_3$  reducibel ist, so giebt es im  $R_3$  eine Schar von  $\infty^3$  Vereinen von je  $\infty^2$  Flächenelementen, welche Schar bei der Gruppe (1) invariant bleibt und nicht etwa nur aus  $\infty^4$ , sondern wirklich aus allen  $\infty^5$  Flächenelementen des  $R_3$  besteht. Jene  $\infty^3$  Vereine werden geometrisch durch  $\infty^3$  *Flächen* oder durch  $\infty^3$  *Curven* oder schliesslich durch die  $\infty^3$  *Punkte* des  $R_3$  dargestellt.

Im *letzteren* Falle ist auch die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$ , reducibel, was aber dem Thatsächlichen widerspricht.

In dem *anderen* Falle, in welchem eine Schar von  $\infty^2$  Curven des  $R_3$  in sich transformiert wird, liegen entweder je  $\infty^2$  Curven der Schar in einer Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  oder aber die Curven schneiden jede dieser Ebenen in ihren  $\infty^2$  Punkten. Bei beiden Annahmen ist wieder die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe der Ebene, reducibel, was absurd ist.

Mithin bleibt nur noch der Fall zu berücksichtigen, bei welchem jene  $\infty^3$  Vereine des  $R_3$  durch  $\infty^3$  *Flächen* desselben dargestellt werden.

Hier sind wieder *zwei* verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden: Entweder nämlich schneiden die  $\infty^3$  Flächen eine jede der Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  in *nur*  $\infty^2$  Curven oder aber in  $\infty^3$  Curven. (Beispiel für die erstere Möglichkeit: Die  $\infty^3$  Ebenen des  $R_3$ .) Würden wir aber ersteres annehmen, so müsste wieder die Gruppe (1) in der Ebene reducibel sein. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt schliesslich nur die Annahme, dass *die  $\infty^3$  Flächen des  $R_3$  die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  in je  $\infty^3$  Curven schneiden.*

Da nun bei der Gruppe (1) der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  bekanntlich nur *eine* Schar von  $\infty^3$  Curven invariant bleibt, nämlich die Schar aller *Kegelschnitte, welche ein gewisses unendlich fernes Linienelement gemein haben*,<sup>1</sup> so folgt, dass die Schar der  $\infty^3$  Flächen aus jeder Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  gerade die betreffenden  $\infty^3$  Kegelschnitte ausschneiden muss.

Es werden die Linienelemente einer jeden Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  bei der Gruppe (1) genau so wie die jeder anderen Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  transformiert. Eine Fläche jener Schar von  $\infty^3$  Flächen schneidet nun die Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  in einer Reihe von Kegelschnitten  $k, k', k'', \dots$ . Jedem dieser Kegelschnitte entspricht in der Ebene  $x_2 = 0$  ein ihm congruenter:  $k_1, k'_1, k''_1, \dots$ , derart also, dass  $k_1$  Projection von  $k, k'$  die von  $k'$  etc. auf die Ebene  $x_2 = 0$  ist. Damit entspricht jeder unserer  $\infty^3$  Flächen des  $R_3$  in der Ebene  $x_2 = 0$  eine Schar von  $\infty^1$  Kegelschnitten  $k_1, k'_1, k''_1, \dots$ . Die  $\infty^3$  Kegelschnitte dieser Ebene (welche ein gewisses unendlich fernes Linienelement gemein haben) werden also *in  $\infty^3$  Scharen von je  $\infty^1$  Curven zerlegt*. Da die Gruppe (1) die Flächen in einander überführt, und da sie die Linienelemente aller Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  in derselben Art transformiert, so folgt, dass in der Ebene  $x_2 = \text{Const.}$  die Gesamtheit jener  $\infty^3$  Scharen von je  $\infty^1$  Kegelschnitten invariant bleibt,

<sup>1</sup> LIE, *Theorie der Transformationsgruppen IV*. Archiv for Math. og Naturvidensk. 1879, p. 457.

in der Weise, dass eine jede Schar in eine andere Schar der Gesamtheit übergeführt wird.

Halten wir nun unter den  $\infty^3$  Kegelschnitten der Ebene  $x_2 = 0$  irgend einen  $(k)$  fest, so bleiben, da alle Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  gleiche Transformationen erfahren, mit ihm alle die  $\infty^1$  Kegelschnitte in den verschiedenen Ebenen  $x_2 = \text{Const.}$  invariant, welche  $k$  entsprechen, d. h.  $k$  zur Projection auf die Ebene  $x_2 = 0$  haben. Durch jeden dieser Kegelschnitte geht eine Fläche unserer Flächenschar und zwar durch jeden eine andere. Wenn nämlich alle die  $\infty^1$  Kegelschnitte derselben Fläche angehörten, so würde folgen, dass jede der Flächen ein Cylinder wäre. Aber eine solche Schar von  $\infty^3$  Cylinderflächen (mit derselben Richtlinie) umfasst nur  $\infty^4$  Flächenelemente des  $R_3$ , nicht alle  $\infty^5$ , ist also ausgeschlossen. Folglich geht durch jeden unserer  $\infty^1$  festgehaltenen Kegelschnitte je eine Fläche der Schar. Jede dieser  $\infty^1$  Flächen muss natürlich mit  $k$  festbleiben. Damit ergibt sich: Wenn wir in der Ebene  $x_2 = 0$  (die ja den Character einer Ebene allgemeiner Lage hat) einen der  $\infty^3$  Kegelschnitte festhalten, so bleiben auch  $\infty^1$  Flächen der Schar invariant. Da nun jede Fläche durch eine Schar von  $\infty^1$  Kegelschnitten dieser Ebene in der obigen Weise ersetzt werden kann, so folgt weiter:

*Wird in der Ebene  $x_2 = 0$  ein Kegelschnitt festgehalten, so bleiben in dieser Ebene  $\infty^1$  der  $\infty^3$  Scharen von je  $\infty^1$  Kegelschnitten, und zwar jede Schar einzeln, invariant.*

Um nunmehr zu prüfen, ob dies wirklich der Fall ist oder nicht, sind die Transformationen der Kegelschnitte der Ebene  $x_2 = 0$  unter einander bei der Gruppe (1) zu untersuchen. Dabei ist es zweckmässig, die Kegelschnitte als Individuen, als Elemente der Transformation aufzufassen. Wir interpretieren daher diese  $\infty^3$  Kegelschnitte durch die *Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes  $\mathfrak{R}_3$* . Analytisch ist dies so zu bewerkstelligen:

Die  $\infty^3$  Kegelschnitte unserer Ebene  $x_2 = 0$  werden durch die Gleichung zwischen  $x_1$  und  $z$  (den Punktcoordinaten in der Ebene) dargestellt:

$$z = \xi + \eta x_1 + \zeta x_1^2,$$

wo  $\xi, \eta, \zeta$  willkürliche Constanten bedeuten. Jedem Wertetripel  $(\xi, \eta, \zeta)$  entspricht einer der Kegelschnitte. Wir nehmen nun  $\xi, \eta, \zeta$  zu Cartesischen Punktcoordinaten in unserem  $\mathfrak{R}_3$  und damit ist jeder der  $\infty^3$  Kegelschnitte von  $x_2 = 0$  durch einen Punkt dieses  $\mathfrak{R}_3$  dargestellt.

Führen wir die Transformationen von (1) in der Ebene  $x_2 = 0$  aus, so werden dadurch diese  $\infty^3$  Curven unter einander vertauscht und damit auch ihre Bildpunkte im  $\mathfrak{R}_3$ , d. h.: Jeder Transformation der Gruppe (1) entspricht eine bestimmte Punkttransformation des Raumes  $\mathfrak{R}_3$ . Diese Punkttransformationen aber sind leicht aufzustellen.

In der That, wenn wir z. B. in der Gruppe (1) die infinitesimale Transformation mit der charakteristischen Function 1 betrachten, so erhalten  $x_1$  und  $z$  die Incremente:

$$\partial x_1 = 0, \quad \partial z = -\partial t,$$

wo  $\partial t$  eine infinitesimale Constante vorstellt. Der Kegelschnitt

$$z = \xi + \eta x_1 + \zeta x_1^2$$

muss dadurch wieder in einen Kegelschnitt derselben Art übergeführt werden, dessen bestimmende Parameter  $\xi, \eta, \zeta$  etwa die Werte  $\xi + \partial\xi, \eta + \partial\eta, \zeta + \partial\zeta$  haben. Dann muss sein

$$z + \partial z = (\xi + \partial\xi) + (\eta + \partial\eta)(x_1 + \partial x_1) + (\zeta + \partial\zeta)(x_1 + \partial x_1)^2$$

d. h.:

$$\partial z = \partial\xi + \partial\eta \cdot x_1 + \partial\zeta \cdot x_1^2 + (\eta + 2\zeta x_1)\partial x_1.$$

Nun ist  $\partial x_1 = 0, \partial z = -\partial t$ , also kommt:

$$-\partial t = \partial\xi + \partial\eta \cdot x_1 + \partial\zeta \cdot x_1^2,$$

d. h., da dies für alle  $x_1$  gilt:

$$\partial\xi = -\partial t, \quad \partial\eta = 0, \quad \partial\zeta = 0.$$

Jener Berührungstransformation mit der charakteristischen Function 1 entspricht also in unserem  $\mathfrak{R}_3$  die Punkttransformation  $-\frac{\partial f}{\partial \zeta}$  oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = q, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = r$$

setzen, die Transformation  $-r$  oder, da es auf Vorzeichen nicht ankommt, kurz  $r$ .

In dieser Weise — und unter eventueller Berücksichtigung auch der

Transformation, die  $y_1$  erfährt, — ergibt sich unschwer, dass der Gruppe (1) im  $\mathfrak{R}_3$  die Gruppe von Punkttransformationen entspricht:

$$(2) \quad p, q, r, \eta p + 2\zeta q, \eta q + 2\zeta r, \eta^2 p + 4\eta\zeta q + 4\zeta^2 r.$$

Wie wir sahen, müssen sich (wenn die Gruppe (1) im  $R_3$  reducibel ist) jene  $\infty^3$  Kegelschnitte der Ebene in  $\infty^3$  Scharen von je  $\infty^1$  zusammenfassen lassen, derart, dass durch (1) diese Scharen unter einander vertauscht werden. Jeder Schar entspricht im  $\mathfrak{R}_3$  eine Reihe von  $\infty^1$  Punkten, d. h. eine Curve (die sich im allgemeinen aus leicht ersichtlichem Grunde nicht auf einen Punkt reducirt). Mithin muss bei der Gruppe (2) des  $\mathfrak{R}_3$  eine Schar von  $\infty^3$  Curven invariant bleiben (die sich, wie ebenfalls leicht aus der Irreducibilität der Gruppe (1) in der Ebene und aus anderen Eigenschaften dieser Gruppe folgt, nicht auf nur  $\infty^2$  oder gar  $\infty^1$  Curven reducieren darf).

Die Gruppe (2) nun lässt, wie man sofort einsieht und was man auch methodisch ableiten kann, die *Schar aller Geraden* invariant, deren Fortschreitungsrichtungen der Gleichung genügen

$$d\eta^2 = 4d\zeta d\zeta,$$

d. h. einen gewissen *Liniencomplex zweiten Grades*.

Bei der Gruppe (2) bleibt *keine andere Schar von  $\infty^3$  Curven*, ausser der Schar dieser Geraden, invariant, vorausgesetzt natürlich, dass wir verlangen, diese  $\infty^3$  Curven sollen den ganzen  $\mathfrak{R}_3$  und nicht etwa nur eine Fläche desselben erfüllen, was ja unseren Zwecken nicht entspräche.

Der Beweis stellt sich so: Durch einen beliebigen Punkt  $P$  des  $\mathfrak{R}_3$  müssen  $\infty^1$  Curven der gesuchten Schar gehen. Halten wir also den Punkt bei der Gruppe (2) fest, so müssen diese  $\infty^1$  Curven unter einander vertauscht werden. Sie besitzen im Punkte  $P$   $\infty^1$  oder nur eine discrete Anzahl von Tangenten. Letzterer Fall ist auszuschliessen, denn bei ihm müssten diese Tangenten einzeln stehen bleiben, während doch bei (2) mit einem Punkte immer nur die durch ihn gehende zur  $\zeta$ -Axe parallele Gerade invariant bleibt. Die  $\infty^1$  durch  $P$  gehenden Tangenten bilden nun in diesem Punkte einen Kegel, der mit  $P$  invariant bliebe. Aber mit  $P$  bleibt nur der Kegel der durch  $P$  gehenden Geraden des Complexes fest. Also haben die gesuchten Curven immer Complexgeraden zu Tangenten und zu jedem Punkte  $P$  und je einer der durch ihn ge-

henden Complexgeraden gehört immer je eine Curve der gesuchten Schar (oder eine discrete Anzahl, was für uns auf dasselbe hinauskommt). Wenn wir also einen Punkt  $P$  und eine der durch ihn laufenden Complexgeraden  $t$  festhalten, so muss auch diejenige Curve der gesuchten Schar, welche durch  $P$  geht und  $t$  zur Tangente in  $P$  hat, festbleiben.

Da bei der Gruppe (2) der Nullpunkt keine ausgezeichneten Eigenschaften hat, so können wir — ohne zu specialisieren — ihn anstelle des beliebigen Punktes  $P$  festhalten. Die Transformation von (2) aber, welche den Nullpunkt invariant lassen, sind

$$\eta p + 2\delta q, \quad \eta q + 2\delta r, \quad \eta^2 p + 4\eta\delta q + 4\delta^2 r.$$

Durch den Nullpunkt gehen die durch die Gleichungen

$$\eta = c\mathfrak{x}, \quad \delta = \frac{c^2}{4}\mathfrak{x}$$

dargestellten  $\infty^1$  Complexgeraden. Wir halten eine derselben,  $(c)$ , fest. Dann bleiben nur noch die beiden infinitesimalen Transformationen

$$2\eta p + (4\delta + c\eta)q + 2c\delta r, \\ \eta^2 p + 4\eta\delta q + 4\delta^2 r.$$

Bei diesen muss also eine durch den Nullpunkt gehende Curve, welche die Gerade  $(c)$  zur Tangente im Nullpunkt hat, invariant bleiben. Die Gerade  $(c)$  hat nun als Tangente mit der Curve ausser dem Nullpunkte noch einen unendlich benachbarten Punkt, etwa:

$$\mathfrak{x} = \varepsilon, \quad \eta = c\varepsilon, \quad \delta = \frac{c^2}{4}\varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  infinitesimal sei, gemein, der natürlich auch invariant sein muss. Aber bei der ersten der vorstehenden infinitesimalen Transformationen bleibt er offenbar nicht invariant. Also folgt, dass es keine derartige Curve giebt, womit bewiesen ist, dass nur die Schar der  $\infty^3$  Complexgeraden eine Curvenschar der gesuchten Art ist.

*Mithin müssen die Complexgeraden jene  $\infty^3$  Scharen von je  $\infty^1$  Kegelschnitten der Ebene  $x_2 = 0$  im  $\mathfrak{R}_3$  darstellen.* Wenn wir einen Kegelschnitt der Ebene  $x_2 = 0$  festhalten, so müssen, wie wir sahen,  $\infty^1$  solche

Scharen von Kegelschnitten, und zwar jede Schar einzeln, invariant bleiben. Für den  $\mathfrak{R}_3$  folgt daher: Halten wir einen Punkt des  $\mathfrak{R}_3$  fest, so müssen alle  $\infty^1$  durch ihn gehenden Geraden des Complexes einzeln festbleiben.

Dies aber ist bei der Gruppe (2) nicht der Fall. Daher folgt umgekehrt: Es kann bei der Gruppe (1) keine Schar von  $\infty^3$  Flächen, welche alle  $\infty^5$  Flächenelemente des  $R_3$  umfassen, invariant bleiben. Also ist nach dem früheren die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe des  $R_3$ , irreducibel, was zu beweisen war.

*Mithin sind alle Gruppentypen I. ... XII. irreducibel.*

Endlich bleibt noch die eine Frage zu untersuchen, *ob und welche Typen sich durch Einführung neuer Variabeln vermöge einer Berührungstransformation des  $R_3$  in einander überführen lassen*, welche also als *überflüssig* verworfen werden können.

Um uns hierüber Klarheit zu verschaffen, werden wir uns zunächst fragen, *ob bei irgend welchen der gefundenen Typen mehr als eine Schar von Gleichungen*

$$\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{Const.}$$

*invariant bleibt.* Eine solche Schar kennen wir ja schon, es ist die Schar  $x_2 = \text{Const.}$

Wir bemerkten schon, dass alle Typen eine Untergruppe enthalten von der Form

$$(3) \quad x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, A x_1, A y_1, A^2,$$

wo  $A$  eine nicht verschwindende Function von  $x_2$  allein bedeutet. Bei den Gruppen V. ... XII. können wir sogar in (3)  $A \equiv 1$  setzen. Auch bei I. und II. können wir eines der  $A_i$  gleich 1 machen durch Einführung neuer Variabeln, ohne dadurch die Gestalt der Gruppen wesentlich zu ändern. Wir führen nämlich in I. und II. neue Variabeln ein vermöge der Berührungstransformation:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho(x'_2) x'_1, & y_1 &= \rho y'_1, & z &= \rho z', \\ x_2 &= x'_2, & y_2 &= \rho^2 y'_2 - \rho \rho' (x'_1 y'_1 - 2z'), \end{aligned}$$

bei der

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = \rho^2 (dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2)$$

ist. Setzen wir hierin  $\rho = A_i$ , so wird in der neuen Gruppe das neue



$A_i \equiv 1$ . Beim Typus III. und IV. können wir ähnlich verfahren. Nur muss hierbei beachtet werden, dass die infinitesimale Transformation  $(y_2)$  ihre Form durch Benutzung jener neuen Variablen wesentlich ändert. Sie geht nämlich über in

$$\frac{1}{\rho^2} y_2 = y'_2 - \frac{\rho'}{\rho} (x'_1 y'_1 - 2z').$$

In III. und IV. haben aber die  $A_i$  die allgemeine Form  $x_2^\sigma e^{ax_2}$ , sodass, wenn  $\rho = e^{ax_2}$  gesetzt wird, diese charakteristische Function wird zu

$$y'_2 - a(x'_1 y'_1 - 2z').$$

Typus III. werden wir also so schreiben können:

$$\text{III'.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1, y_1, 1, \\ x_2^{\sigma_1} e^{a_1 x_2} x_1, x_2^{\sigma_1} e^{a_1 x_2} y_1, x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}, \\ y_2 + a(x_1 y_1 - 2z), \\ \sigma_i = 0, 1, 2, \dots, s_i, \quad \tau_k = 0, 1, 2, \dots, t_k, \\ i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, t. \end{array} \right.$$

während im Fall IV. noch  $x_1 y_1 - 2z$  hinzutritt, sodass  $a$  hierin dann gleich Null gesetzt werden kann.

Also sehen wir: wir können immer annehmen, dass alle Typen die Untergruppe

$$(1) \quad x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1, y_1, 1$$

besitzen. Nur ist dabei III. durch III'. zu ersetzen.

Wenn nun einer der Typen die Gleichungenschar  $\Phi = \text{Const.}$  invariant lassen soll, so muss auch diese Untergruppe dieselbe invariant lassen. Bei der Gruppe (1) bleiben nun aber offenbar  $x_2$  und  $y_2$  absolut invariant, d. h. diese Gruppe lässt jede Schar von der Form

$$\Phi(x_2, y_2) = \text{Const.}$$

invariant. Wenn noch eine andere Schar  $\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{Const.}$  bei (1) invariant bliebe, so können wir sie offenbar auch einfacher so schreiben:

$$\Phi(x_1, z, y_1) = \text{Const.},$$

da ja  $x_1, z, y_1$  bei (1) Incremente erhalten, die nur von  $x_1, z, y_1$  selbst abhängen. Aber bei der Gruppe (1) bleibt, wie man leicht übersieht, kein derartiges Gleichungssystem ungeändert.

Also hat jede bei (1) und daher auch jede bei unseren Typen I., II., III., IV., ..., XII. invariante Gleichungenschar  $\phi = \text{Const.}$  nunmehr die generelle Form

$$\phi(x_2, y_2) = \text{Const.}$$

Hiernach ist es nicht mehr schwer, die bei jeder einzelnen unserer Gruppen sich ergebenden Scharen zu bestimmen. Wir bemerken nur soviel: Die Rechnung lehrt, dass die Typen VII. bis XII. stets nur die Schar  $x_2 = \text{Const.}$  invariant lassen, während die Typen I. bis VI., allerdings nur in Specialfällen, mehrere invariante Gleichungenscharen besitzen.

*Wenn wir also unsere Typen nicht durch besondere Wahl der in ihnen vorkommenden Constanten specialisieren, so können wir sagen: Sie lassen sämtlich nur die Schar  $x_2 = \text{Const.}$  invariant.*

Darin liegt dann auch, dass sie sich nicht in einander überführen lassen, denn sie besitzen sämtlich dieser einzigen Schar  $x_2 = \text{Const.}$  gegenüber ein verschiedenes und durch Einführung neuer Variabeln nicht auszugleichendes Verhalten. Wohlbemerkt ist hierdurch nicht ausgeschlossen, dass die Typen I. bis VI. in Specialfällen doch auf einander zurückführbar wären. Im allgemeinen aber ist keiner unserer zwölf Typen überzählig. Wir stellen daher alle zwölf in einer Tabelle zusammen.

1.)  $x_2$  bleibt invariant bei den Typen:

I.	II.	IX.
$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$	$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$	$1, x_1, y_1, x_1^2,$
$A_i(x_2)x_1, A_i(x_2)y_1,$ ( $i=1, 2, \dots, s$ )	$A_i(x_2)x_1, A_i(x_2)y_1,$ ( $i=1, 2, \dots, s$ )	$x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z,$
$B_k(x_2), (k=1, 2, \dots, t)$	$B_k(x_2), (k=1, 2, \dots, t)$	$x_1(x_1 y_1 - 2z),$
wo jedes	wo jedes	$y_1(x_1 y_1 - 2z),$
$A_i A_j = \sum \text{Const. } B$	$A_i A_j = \sum \text{Const. } B$	$(x_1 y_1 - 2z)^2.$
sein muss.	sein muss.	
	$x_1 y_1 - 2z.$	

2.)  $x_2$  wird eingliedrig transformiert bei den Typen:

III.	IV.	X.
$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} x_1, x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} y_1,$ $x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2},$ $\sigma_i = 0, 1, \dots, s_i, \tau_k = 0, 1, \dots, t_k$ $\alpha_i = \text{Const.}, \beta_k = \text{Const.},$ $i = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, t,$ sodass jedes $x^{\sigma_i + \sigma_j} e^{(\alpha_i + \alpha_j) x_2}$ die Form $\sum \text{Const. } x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}$ hat. $y_2.$	$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $x^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} x_1, x^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} y_1,$ $x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2},$ $\sigma_i = 0, 1, \dots, s_i, \tau_k = 0, 1, \dots, t_k$ $\alpha_i = \text{Const.}, \beta_k = \text{Const.},$ $i = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, t,$ sodass jedes $x^{\sigma_i + \sigma_j} e^{(\alpha_i + \alpha_j) x_2}$ die Form $\sum \text{Const. } x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}$ hat. $y_2, x_1 y_1 - 2z.$	$I, x_1, y_1, x_1^2,$ $x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z,$ $x_1(x_1 y_1 - 2z),$ $y_1(x_1 y_1 - 2z),$ $(x_1 y_1 - 2z)^2,$ $y_2.$

3.)  $x_2$  wird zweigliedrig transformiert bei den Typen:

V.	VI.	XI.
$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $x_1, x_2 x_1, x_2^2 x_1, \dots, x_2^s x_1,$ $y_1, x_2 y_1, x_2^2 y_1, \dots, x_2^s y_1,$ $I, x_2, x_2^2, \dots, x_2^t,$ $y_2,$ $x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + c x_2^{t+1}.$ $(t \geq 2s)$	$x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $x_1, x_2 x_1, x_2^2 x_1, \dots, x_2^s x_1,$ $y_1, x_2 y_1, x_2^2 y_1, \dots, x_2^s y_1,$ $I, x_2, x_2^2, \dots, x_2^t,$ $y_2, x_2 y_2,$ $x_1 y_1 - 2z.$ $(t \geq 2s)$	$I, x_1, y_1, x_1^2,$ $x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z,$ $x_1(x_1 y_1 - 2z),$ $y_1(x_1 y_1 - 2z),$ $(x_1 y_1 - 2z)^2,$ $y_1, x_2 y_2.$

4.)  $x_2$  wird dreigliedrig transformiert bei den Typen:

VII.	VIII.	XII.
$I, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $y_2, x_2 y_2, x_2^2 y_2.$	$I, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $y_2, x_2 y_2, x_2^2 y_2,$ $x_1 y_1 - 2z.$	$I, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2,$ $x_1 y_1 - 2z,$ $x_1(x_1 y_1 - 2z), y_1(x_1 y_1 - 2z),$ $(x_1 y_1 - 2z)^2,$ $y_2, x_2 y_2, x_2^2 y_2.$

In der Gruppe V. kommen zwei willkürliche Constanten vor. Um sie zu specialisieren, führen wir vermöge der Berührungstransformation

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, & y_1 &= y'_1, & z &= z' + ax_2'^{t+1}, \\ x_2 &= x'_2, & y_2 &= y'_2 + (t+1)ax_2'', \end{aligned}$$

bei welcher

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2$$

ist, neue Variablen ein, wodurch die Gruppe ihre Gestalt nicht wesentlich ändert. Allerdings folgt aus  $y_2$  die neue charakteristische Function:

$$y'_2 + (t+1)ax_2''.$$

Da aber  $x_2''$  selbständig auftritt, so können wir diese verkürzen auf  $y'_2$  selbst. Anstelle der letzten charakteristischen Function

$$x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + cx_2'^{t+1}$$

tritt diese:

$$x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + [a(t+1) - 2ab + c]x_2'^{t+1}.$$

Wählen wir also  $a$  so, dass

$$a(t+1) - 2ab + c = 0$$

wird, so haben wir erreicht, dass in V. die Constante  $c$  gleich Null gesetzt werden kann. Aber dies geht nicht, wenn:

$$t+1 = 2b \quad \text{und} \quad c \neq 0$$

ist. In diesem Falle können wir durch Benutzung der Berührungstransformation

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad y_1 = cy'_1, \quad y_2 = cy'_2, \quad z = cz'$$

in V.  $c = 1$  machen. Mithin kann in V. einmal  $c = 0$  und das andere Mal  $b = \frac{t+1}{2}$ ,  $c = 1$  gesetzt werden. Dadurch zerlegt sich V. in zwei Untertypen. Dass dieselben nicht in einander übergeführt werden können, lehrt ihre Zusammensetzung.

Leipzig, im Januar 1889.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Seit der Abfassung dieser Arbeit hat LIE die Bezeichnung *Verein von Elementen* durch den schon früher von ihm benutzten Ausdruck *Element-Mannigfaltigkeit* wieder ersetzt und demgemäss wäre unser Text an mehreren Stellen etwas abzuändern.

Im Januar 1890.