4. *Absolute Formeln für die Anziehung koaxialer Solenoide; von G. R. Olshausen.*

§ 1. Die Anziehung zweier koaxialer Solenoide kann mittels der Formeln für die gegenseitige Induktion eines Kreises und eines koaxialen Solenoids berechnet werden. Hierfür haben Lorenz, Jones, Campbell und Rosa Formeln[1]) aufgestellt. Eine in sich vollständige Formel für die Anziehung zweier koaxialer Solenoide ist bis jetzt aber noch nicht gegeben worden.

Es ist der Zweck dieses Aufsatzes, Formeln abzuleiten, durch welche die Anziehung zweier gleichachsiger Solenoide, die je ein Einheitsstrom durchfließt, für alle Fälle genau berechnet werden kann.

§ 2. Neumanns Formel für die gegenseitige Induktion zweier beliebiger linearer geschlossener Ströme ist:

$$M = \iint \frac{d\lambda \cdot d\lambda'}{r} \cos \varepsilon \,, \tag{1}$$

wo ε der Winkel, den die Kurvenelemente $d\lambda$ und $d\lambda'$ der bezüglichen Ströme bilden, und r die Entfernung zwischen denselben ist.

Durch Anwendung dieser Formel auf zwei koaxiale Solenoide fand L. Cohen[2]), daß die gegenseitige Induktion der beiden Spulen sich durch folgenden Ausdruck darstellen läßt:

$$M = 4\pi n n' [I_1 - I_2 - I_3 + I_4] \,, \tag{2}$$

1) Vgl. E. B. Rosa u. F. W. Grover, Bull. Bur. Stand. 8. p. 98. 1912.

2) L. Cohen, Bull. Bur. Stand. 3. p. 295. 1907.

wo n und n' die bezüglichen Anzahlen von Windungen der Spulen per Längeneinheit sind, und

$$(3)\qquad I_\nu = a_1\, a \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{a_1^2 + a^2 + c_\nu^2 - 2\, a_1\, a \cos\psi}}{a_1^2 + a^2 - 2\, a_1\, a \cos\psi} \sin^2\psi\, d\psi$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ist.

In diesem Ausdruck sind a_1 und a die bezüglichen Radien der Spulen und c_ν hat folgende Werte:

$$(4)\qquad \begin{cases} c_1 = d + l + l_1\,, \\ c_2 = d + l_1 - l\,, \\ c_3 = d + l - l_1\,, \\ c_4 = d - l - l_1\,, \end{cases}$$

wo d die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Spulen und $2\,l_1$ und $2\,l$ ihre bezüglichen Längen sind.

Dann ist die Anziehung der beiden Solenoide, wenn durch jedes derselben ein Einheitsstrom fließt,

$$(5)\qquad -\frac{\partial M}{\partial d} = 4\,\pi\, n\, n' \left[-\frac{\partial I_1}{\partial c_1} + \frac{\partial I_2}{\partial c_2} + \frac{\partial I_3}{\partial c_3} - \frac{\partial I_4}{\partial c_4}\right].$$

Der Kürze halber wird fernerhin der Index ν fortgelassen werden, so daß $\partial I/\partial c$ jeden der vier Koeffizienten $\partial I_\nu/\partial c_\nu$ bedeutet.

Um die Differentialkoeffizienten $\partial I/\partial c$ zu finden, differentiiert man die rechte Seite der Gleichung (3) in bezug auf c unter dem Integralzeichen und führt dann die Integration aus. Die Differentiation ergibt

$$(6)\qquad \frac{\partial I}{\partial c} = c\, a_1^2\, a^2 \int\limits_0^\pi \frac{(a_1^2 + a^2 + c^2 - 2\, a_1\, a \cos\psi)^{-1/2}}{a_1^2 + a^2 - 2\, a_1\, a \cos\psi} \sin^2\psi\, d\psi.$$

Um diesen Integralausdruck auszurechnen, setze man

$$\cos\psi = x$$

und

$$(7)\qquad \alpha = a_1^2 + a^2\,,\quad \beta = 2\, a_1\, a\,,\quad \gamma = a_1^2 + a^2 + c^2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (6) erhält man

$$(8)\qquad \frac{\partial I}{\partial c} = \frac{c\,\beta^{1/2}}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x-1)\,dx}{\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{4\,(x-1)\,(x+1)\left(x-\frac{\gamma}{\beta}\right)}}\,.$$

Um dieses elliptische Integral auf die Weierstrassche Normalform zu bringen, setzt man

$$(9)\qquad x-\frac{\gamma}{\beta}=m(s-e_1),\quad x-1=m(s-e_2),\quad x+1=m(s-e_3),$$

wobei

$$e_1+e_2+e_3=0$$

und m ein reeller und positiver Parameter ist, der willkürlich bestimmt werden kann. Dann ergibt sich, wie später gezeigt werden wird, daß die Größen e_1, e_2, e_3 alle reell sind und

$$e_1 > e_2 > e_3$$

ist.

Nun bezeichne man mit

$$\wp u = \wp(u\,|\,\omega_1,\omega_3)\,^{1)}$$

die $\wp$-Funktion, die durch e_1, e_2 und e_3 bestimmt wird, und setze dann

$$s=\wp(u+\omega_3).$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Größen ω_1 und ω_3/i reelle und positive Werte haben.

Wenn u auf direktem Wege von 0 bis ω_1 fortschreitet, wächst $s=\wp(u+\omega_3)$ von e_3 bis e_2 und x nimmt alle Werte von -1 bis $+1$ an. Daher ist

$$du = \frac{ds}{+\sqrt{4\,(s-e_1\,(s-e_2)\,(s-e_3)}}$$

und Gleichung (8) wird

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c} &= \frac{c\,(m\,\beta)^{1/2}}{2}\int\limits_0^{\omega_1}\frac{\big(\wp(u+\omega_3)-e_2\big)\big(\wp(u+\omega_3)-e_3\big)}{\wp(u+\omega_3)-\wp w}\,du\\ &= \frac{c\,(m\,\beta)^{1/2}}{2}\int\limits_0^{\omega_1}\Phi(u)\,du,\end{aligned}\right.$$

1) Die Bezeichnungsweise, die hier gebraucht wird, ist diejenige der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen" von H. A. Schwarz.

wo

$$\mathfrak{p}\, w = e_3 + \frac{\alpha + \beta}{m\,\beta} \tag{11}$$

ist. Der Wert von $\mathfrak{p}\, w$ ist also reell und liegt, wie später gezeigt werden wird, zwischen e_1 und e_2. Es läßt sich also voraussetzen, daß w auf direktem Wege von ω_1 nach ω_2 liegt. Unter dieser Annahme ist dann $\mathfrak{p}'\, w$ positiv und rein imaginär.

§ 3. Um die Funktion $\Phi(u)$ zu integrieren, sei bemerkt, daß $\Phi(u)$ eine rationale Funktion von $\mathfrak{p}(u + \omega_3)$ ist, und durch Division und einfache Umformung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\Phi(u) = \mathfrak{p}(u + \omega_3) + \mathfrak{p}\, w + e_1 + \frac{\mathfrak{p}'\, w}{4(\mathfrak{p}\, w - e_1)} \cdot \frac{\mathfrak{p}'\, w}{\mathfrak{p}(u + \omega_3) - \mathfrak{p}\, w}\,.$$

Integriert man jedes Glied auf direktem Wege von 0 bis ω_1, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c} = \frac{c\,(m\,\beta)^{1/2}}{2} \Big[&- \eta_1 + (\mathfrak{p}\, w + e_1)\,\omega_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{p}'\, w}{2(\mathfrak{p}\, w - e_1)} \left\{ \omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w) - \eta_1\, w + n\pi i \right\} \Big]. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Die ganze Zahl n wird durch die Bedingung bestimmt, daß das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_1} \frac{\mathfrak{p}'(w)\, du}{\mathfrak{p}(u + \omega_3) - \mathfrak{p}\, w} &= \log \frac{\sigma_3(w - \omega_1)}{\sigma_3(w + \omega_1)} + 2\,\omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w), \\ &= -2\,\eta_1\, w + 2\,\omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w) + 2\,n\pi i \end{aligned}$$

Null wird, wenn $w = \omega_1$ ist, da dann $\mathfrak{p}'\, w$ Null ist. Man findet, daß $n = 0$ ist.

Unter Berücksichtigung der Relation[1])

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(w) = \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(w) - \frac{1}{2}\, \frac{\mathfrak{p}'\, w}{\mathfrak{p}\, w - e_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

lassen sich drei neue Gleichungen aus (12) ableiten von der Form

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c} = \frac{c\,(m\,\beta)^{1/2}}{2} \Big[&- \eta_1 + \left\{ \mathfrak{p}\, w + e_1 - \frac{(\mathfrak{p}'\, w)^2}{4(\mathfrak{p}\, w - e_1)(\mathfrak{p}\, w - e_\lambda)} \right\} \omega_1 \\ &+ \frac{\mathfrak{p}'\, w}{2(\mathfrak{p}\, w - e_1)} \left\{ \omega_1 \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(w) - \eta_1\, w \right\} \Big]. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

1) H. A. **Schwarz**, l. c. p. 29. (7).

Setzt man

$$w = \omega_1 + w_1 i,$$

$$0 < w_1 < \frac{\omega_3}{i}$$

und transformiert die Ausdrücke

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(w)$$

mittels der Gleichungen[1])

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm \bar{\omega}) \mp \bar{\eta} = \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u), \quad \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u \pm \bar{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \pm \bar{\eta},$$

so erhält man aus (12) und (13), wenn man gleichzeitig die Koeffizienten von ω_1 etwas umformt, die folgenden äquivalenten Ausdrücke:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c} &= \frac{c(m\beta)^{1/2}}{2}\Big[-\eta_1 + (\wp w + e_1)\,\omega_1 \\ &\qquad + \frac{\wp' w}{2(\wp w - e_1)}\Big\{\omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i) - \eta_1 w_1 i\Big\}\Big], \\ \frac{\partial I}{\partial c} &= \frac{c(m\beta)^{1/2}}{2}\Big[-\eta_1 + \Big\{\wp w + e_1 - \frac{(\wp' w)^2}{4(\wp w - e_1)^2}\Big\} w_1 \\ &\qquad + \frac{\wp' w}{2(\wp w - e_1)}\Big\{\omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i) - \eta_1 w_1 i\Big\}\Big], \\ \frac{\partial I}{\partial c} &= \frac{c(m\beta)^{1/2}}{2}\Big[-\eta_1 - e_2\,\omega_1 \\ &\qquad + \frac{\wp' w}{2(\wp w - e_1)}\Big\{\omega_1 \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i) - \eta_1 w_1 i\Big\}\Big], \\ \frac{\partial I}{\partial c} &= \frac{c(m\beta)^{1/2}}{2}\Big[-\eta_1 - e_3\,\omega_1 \\ &\qquad + \frac{\wp' w}{2(\wp w - e_1)}\Big\{\omega_1 \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_1 i) - \eta_1 w_1 i\Big\}\Big]. \end{aligned} \right.$$

In diesen Gleichungen können die Größen e_1, e_2, e_3, $\wp w$ und $\wp' w$ direkt durch die Dimensionen der Spulen und die Entfernung zwischen ihren Mittelpunkten ausgedrückt werden, während die anderen Größen mit Hilfe gewisser Hilfsgrößen, die später angegeben werden sollen, berechnet werden müssen.

---

1) H. A. Schwarz, l. c. p. 23. (4).

Aus (9) hat man

$$(15)\quad \begin{cases} e_1 - e_3 = \dfrac{\beta+\gamma}{m\beta}, & e_1 - e_2 = \dfrac{\gamma-\beta}{m\beta}, \quad e_2 - e_3 = \dfrac{2}{m}, \\ e_1 = \dfrac{2\gamma}{3m\beta}, & e_2 = \dfrac{3\beta-\gamma}{3m\beta}, \quad e_3 = -\dfrac{3\beta+\gamma}{3m\beta}. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man, daß e_1, e_2, e_3 reelle Größen sind und daß

$$e_1 > e_2 > e_3$$

ist.

Verbindet man nun diese Gleichungen mit (11), so erhält man folgende reelle Größen

$$(16)\qquad \wp w = \frac{3\alpha-\gamma}{3m\beta},$$

$$(17)\qquad \begin{cases} \wp w - e_1 = \dfrac{\alpha-\gamma}{m\beta}, \\ \wp w - e_2 = \dfrac{\alpha-\beta}{m\beta}, \\ \wp w - e_3 = \dfrac{\alpha+\beta}{m\beta}. \end{cases}$$

Da nun

$$(\wp' w)^2 = 4(\wp w - e_1)(\wp w - e_2)(\wp w - e_3)$$

ist, so folgt aus (17)

$$(18)\qquad \frac{\wp' w}{2} = \sqrt{\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\gamma)}{m^3\beta^3}}.$$

Aus (17) ersieht man auch, daß

$$e_1 > \wp w > e_2$$

ist; es muß also, wie schon erwähnt war, der Wurzelgröße in (18) ihr positiver Wert beigelegt werden.

Wenn man in den Gleichungen (14) aus (15), (16), (17) und (18) substituiert und gleichzeitig α, β und γ ihre Werte beilegt, so erhält man

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c} = c\sqrt{\dfrac{a_1 a m}{2}}\left[\dfrac{4(a_1^2+a^2)+c^2}{6\,a_1 a m}\,\omega_1 - \eta_1 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{i(a_1^2-a^2)}{c\sqrt{2 a_1 a m}}\left\{\eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\right\}\right], \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c} = c\sqrt{\dfrac{a_1 a m}{2}}\left[\dfrac{3(a_1^2-a^2)^2+4c^2(a_1^2+a^2)+c^4}{6\,a_1 a m c^2}\,\omega_1 - \eta_1 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{i(a_1^2-a^2)}{c\sqrt{2 a_1 a m}}\left\{\eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i)\right\}\right], \end{cases}$$

$$(21)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial c} &= c\sqrt{\frac{a_1\,a\,m}{2}}\left[\frac{a_1^2+a^2+c^2-6\,a_1\,a}{6\,a_1\,a\,m}\,\omega_1-\eta_1\right.\\ &\qquad\left.+\frac{i\,(a_1^2-a^2)}{|c|\sqrt{2\,a_1\,a}}\left\{\eta_1\,w_1\,i-\omega_1\,\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1\,i)\right\}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(22)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial c} &= c\sqrt{\frac{a_1\,a\,m}{2}}\left[\frac{a_1^2+a^2+c^2+6\,a_1\,a}{6\,a_1\,a\,m}\,\omega_1-\eta_1\right.\\ &\qquad\left.+\frac{i\,(a_1^2-a^2)}{|c|\sqrt{2\,a_1\,a}}\left\{\eta_1\,w_1\,i-\omega_1\,\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_1\,i)\right\}\right].\end{aligned}\right.$$

§ 4. Die erste und vierte der Gleichungen (14) können leicht durch Legendres vollständige und unvollständige Integrale erster und zweiter Art ausgedrückt werden, wobei die unvollständigen Integrale reelle Amplituden haben, während die zweite und dritte derselben Gleichungen zu Integralen mit imaginärer Amplitude führen. Um diese Transformation zu machen, sind folgende Relationen[1]) nötig:

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{4\,a_1\,a}{(a_1+a)^2+c^2}, \quad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{(a_1-a)^2+c^2}{(a_1+a)^2+c^2},$$

$$\sin\varphi = \sin\mathrm{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\cdot w_1, k'\right),$$

$$= -i\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(w_1\,i)}{\sigma_1(w_1\,i)} = \sqrt{\frac{e_1-\wp w}{e_1-e_2}} = \frac{|c|}{\sqrt{(a_1-a)^2+c^2}},$$

$$F(\varphi,k') = w_1\sqrt{e_1-e_3}, \quad F(k) = \omega_1\sqrt{e_1-e_3},$$

$$E(\varphi,k') = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[\frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1\,i)+e_3\,w_1\,i\right],$$

$$E(k') = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[\eta_3+e_3\,\omega_3\right],$$

$$\sin\varphi' = \sin\mathrm{coam}\left(\sqrt{e_1-e_3}\cdot w_1, k'\right),$$

$$= \frac{\sigma_3(w_1\,i)}{\sigma_2(w_1\,i)} = \sqrt{\frac{\wp w-e_2}{\wp w-e_3}\cdot\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}} = \sqrt{\frac{(a_1^2-a^2)^2+c^2(a_1-a)^2}{(a_1^2-a^2)^2+c^2(a_1+a)^2}},$$

$$F(\varphi',k') = F(k') - F(\varphi,k') = \sqrt{e_1-e_3}\left(\frac{\omega_3}{i}-w_1\right),$$

$$E(\varphi',k') = E(k') - \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_1\,i)+e_3\,w_1\,i\right],$$

$$\eta_1 = \sqrt{e_1-e_3}\left[E(k)-\frac{e_1}{e_1-e_3}F(k)\right],$$

$$\frac{\pi}{2} = E(k)\,F(k') - F(k')\,F(k) + E(k')\,F(k).$$

---

1) H. A. **Schwarz**, l. c. Art. 26, 27, 28, 29, 33, 39.

In diesen Gleichungen sind $F(\varphi, k')$, $E(\varphi, k')$, $F(\varphi', k')$, $E(\varphi', k')$ unvollständige elliptische Integrale mit den Amplituden φ bzw. φ' und dem Modul k', während $F(k)$, $E(k)$, $F(k')$, $E(k')$ vollständige Integrale mit den Modulen k bzw. k' sind.

Mit Hilfe dieser Formeln geht die erste der Gleichungen (14) über in

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c} = \dfrac{c}{2}\Big[\dfrac{2(a_1^2 + a^2) + c^2}{\sqrt{(a_1 + a)^2 + c^2}} F(k) - \sqrt{(a_1 + a)^2 + c^2} \cdot E(k) \\ \qquad + \dfrac{a_1^2 - a^2}{|c|}\{F(k)[F(\varphi, k') - E(\varphi, k')] \\ \qquad\qquad - E(k) F(\varphi, k')\}\Big] \end{cases}$$

und von der vierten dieser Gleichungen erhält man

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c} = \dfrac{c}{2}\Big[\sqrt{(a_1 + a)^2 + c^2}\{F(k) - E(k)\} \\ \qquad - \dfrac{a_1^2 - a^2}{|c|}\Big\{F(k)[F(\varphi', k') - E(\varphi', k')] \\ \qquad\qquad - E(k) F(\varphi', k') + \dfrac{\pi}{2}\Big\}\Big] \cdot \end{cases}$$

In allen diesen Formeln für $\partial I / \partial c$ ist

$$a_1 \geqq a$$

und $|c|$ bedeutet, daß der absolute Betrag von c genommen werden soll. In allen anderen Fällen ist das Vorzeichen von c durch die Gleichungen (4) bestimmt.

§ 5. Schließlich sind noch Formeln[1]) anzugeben zur Berechnung von η_1, ω_1 und der Ausdrücke

$$\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i)$$

und

$$\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu}(w_1 i) \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Zwei Gleichungssysteme sind zur Berechnung dieser Größen nötig: das eine für negative und das andere für positive Werte von e_2. Die Reihen des ersten konvergieren besser, wenn $e_2 < 0$ ist, während die des zweiten schneller konvergieren, wenn $e_2 > 0$ ist.

---

1) H. A. Schwarz, l. c. Art. 45, 48, 49.

Es ist

$$e_2 \gtreqless 0, \quad \text{wenn} \quad 6a_1 a \gtreqless a_1^2 + a^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad k^2 \gtreqless \tfrac{1}{2}.$$

In den folgenden Formeln sind alle Wurzelgrößen positiv zu nehmen.

Formeln für $e_2 < 0$.

Es sei

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \tag{25}$$

und

$$h = \tfrac{1}{2} l + 2(\tfrac{1}{2} l)^5 + 15(\tfrac{1}{2} l)^9 + 150(\tfrac{1}{2} l)^{15} + \ldots, \tag{26}$$

dann kann ω_1 aus einem der beiden folgenden Ausdrücke berechnet werden:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2})^2}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots)^2, \\ \omega_1 &= \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_3}}(1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots)^2. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Die Größe η_1 ergibt sich dann aus

$$\eta_1 \omega_1 = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1 - 3^3 h^2 + 5^3 h^6 - 7^3 h^{12} + \ldots}{1 - 3\,h^2 + 5\,h^6 - 7\,h^{12} + \ldots}. \tag{28}$$

Um den Wert von w_1 zu finden, der den Werten von $\wp w$ und $\wp' w$ in (16) und (18) genügt, setze man

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{0,1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots, \\ \mathfrak{L}_{0,2} &= \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots, \\ \mathfrak{L}_{0,3} &= \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots, \end{aligned}$$

und lasse

$$\wp w = s, \quad \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s - e_3}} = l t \tag{29}$$

sein.

Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} w_1 = \frac{\omega_1}{\pi} \log\mathrm{nat}\,(\sqrt{t^2 - 1} - t) - \frac{2\sqrt{t^2 - 1}}{(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2})^2} \\ \left\{\mathfrak{L}_{0,1}\, t + \frac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}\, t^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{0,3}\, t^5 + \ldots\right\} \end{aligned}\right. \tag{30}$$

An Stelle der Gleichungen (29) und (30) können auch die folgenden Formeln angewendet werden:

$$(31)\qquad \frac{\sqrt{e_1 - s} - \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - s} + \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}} = l\,t',$$

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\omega_1}{\pi}\log\operatorname{nat}\left\{h\left(\sqrt{t'^2 - 1} - t'\right)\right\}\\ &\quad + \frac{2\sqrt{t'^2 - 1}}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\right)^2}\\ &\qquad\quad \left\{\mathfrak{L}_{0,1}\,t' + \frac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}\,t'^3\,\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{0,3}\,t'^5 + \ldots\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ist der absolute Betrag von t kleiner als der von t', so ist es besser, die Gleichung (30) zur Berechnung von w_1 zu benutzen, im entgegengesetzten Falle wendet man besser Gleichung (32) an.

Es läßt sich beweisen, daß t und t' immer negativ und ihrem absoluten Betrage nach immer größer als Eins sind.

Setzt man nun

$$v_1 = \frac{w_1}{2\,\omega_1}, \qquad z = e^{\pi v_1},$$

dann ergeben die Beziehungen, die zwischen den σ-Funktionen und ϑ-Funktionen bestehen,

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i)\\ &\quad = \frac{i\pi}{2}\left[\frac{(z + z^{-1}) - 3h^2(z^3 + z^{-3}) + 5h^6(z^5 + z^{-5}) - \ldots}{(z - z^{-1}) - h^2(z^3 - z^{-3}) + h^6(z^5 - z^{-5}) - \ldots}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\\ &\quad = \frac{i\pi}{2}\left[\frac{(z - z^{-1}) + 3h^2(z^3 - z^{-3}) + 5h^6(z^5 - z^{-5}) + \ldots}{(z + z^{-1}) + h^2(z^3 + z^{-3}) + h^6(z^5 + z^{-5}) + \ldots}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_1 i)\\ &\quad = i\pi\left[\frac{h(z^2 - z^{-2}) + 2h^4(z^4 - z^{-4}) + 3h^9(z^6 - z^{-6}) + \ldots}{1 + h(z^2 + z^{-2}) + h^4(z^4 + z^{-4}) + h^9(z^6 + z^{-6}) + \ldots}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i)\\ &\quad = -i\pi\left[\frac{h(z^2 - z^{-2}) - 2h^4(z^4 - z^{-4}) + 3h^9(z^6 - z^{-6}) - \ldots}{1 - h(z^2 + z^{-2}) + h^4(z^4 + z^{-4}) - h^9(z^6 - z^{-6}) + \ldots}\right].\end{aligned}\right.$$

Formeln für $e_2 > 0$.

$$(37)\qquad l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}},$$

$$(38)\qquad h_1 = \tfrac{1}{2} l_1 + 2(\tfrac{1}{2} l_1)^5 + 15(\tfrac{1}{2} l_1)^9 + 150(\tfrac{1}{2} l_1)^{13} + \ldots,$$

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_3}{\pi i} = \dfrac{2}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}\right)^2}(1 + 2h_1^4 + 2h_1^{16} + \ldots)^2, \\ \text{oder} \\ \dfrac{\omega_3}{\pi i} = \dfrac{1}{2\sqrt{e_1 - e_3}}(1 + 2h_1 + 2h_1^4 + 2h_1^9 + \ldots)^2, \end{cases}$$

$$(40)\qquad \omega_1 = \frac{\omega_3}{\pi i} \log \operatorname{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right),$$

$$(41)\qquad \eta_1 = \frac{\pi i}{2\omega_3}\left[1 - \frac{1}{6}\log \operatorname{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right) \cdot \frac{1 - 3^3 h_1^2 + 5^3 h_1^6 - 7^3 h_1^{12} + \ldots}{1 - 3\, h_1^2 + 5\, h_1^6 - 7\, h_1^{12} + \ldots}\right.$$

Um in diesem Falle w_1 zu bestimmen, sind folgende Formeln notwendig:

$$\mathfrak{L}_{1,1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_1^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l_1^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_1^{12} + \ldots,$$

$$\mathfrak{L}_{1,2} = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l_1^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_1^{12} + \ldots,$$

$$\mathfrak{L}_{1,3} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_1^{12} + \ldots,$$

$$(42)\qquad \mathfrak{p} w = s, \quad \frac{\sqrt{s - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt{s - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}} = l_1 t_1',$$

$$\Theta = \operatorname{arc\,tan} \frac{t_1'}{\sqrt{1 - t_1'^2}}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \gtreqless \frac{\pi}{2},$$

$$(43)\qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{\omega_3}{i}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\Theta}{\pi}\right) + \dfrac{2\sqrt{1 - t_1'^2}}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}\right)^2} \\ \qquad \left\{\mathfrak{L}_{1,1} t_1' + \dfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{1,2} t_1'^3 + \dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{1,3} t_1'^5 + \ldots\right\}. \end{cases}$$

In diesen Formeln liegt der reelle Wert t_1' immer zwischen plus Eins und minus Eins.

Läßt man nun

$$v = \frac{w_1 i}{2\,\omega_3}$$

sein, so erhält man durch Einführung der ϑ-Funktionen auf ähnliche Weise wie vorher

$$(44)\quad \begin{cases} \eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i) = i\pi v \\ \qquad - \dfrac{\pi\omega_1}{2\,\omega_3}\left[\dfrac{\cos\pi v - 3 h_1^2 \cos 3\pi v + 5 h_1^6 \cos 5\pi v - \ldots}{\sin\pi v - h_1^2 \sin 3\pi v + h_1^6 \sin 5\pi v - \ldots}\right], \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} \eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i) = i\pi v \\ \qquad - \dfrac{\pi\omega_1}{\omega_3}\left[\dfrac{2 h_1 \sin 2\pi v - 4 h_1^4 \sin 4\pi v + 6 h_1^9 \sin 6\pi v - \ldots}{1 - 2 h_1 \cos 2\pi v + 2 h_1^4 \cos 4\pi v - 2 h_1^9 \cos 6\pi v + \ldots}\right], \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} \eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_1 i) = i\pi v \\ \qquad + \dfrac{\pi\omega_1}{\omega_3}\left[\dfrac{2 h_1 \sin 2\pi v + 4 h_1^4 \sin 4\pi v + 6 h_1^9 \sin 6\pi v + \ldots}{1 + 2 h_1 \cos 2\pi v + 2 h_1^4 \cos 4\pi v + 2 h_1^9 \cos 6\pi v + \ldots}\right], \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{cases} \eta_1 w_1 i - \omega_1 \dfrac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i) = i\pi v \\ \qquad + \dfrac{\pi\omega_1}{2\,\omega_3}\left[\dfrac{\sin\pi v + 3 h_1^2 \sin 3\pi v + 5 h_1^6 \sin 5\pi v + \ldots}{\cos\pi v + h_1^2 \cos 3\pi v + h_1^6 \cos 5\pi v + \ldots}\right]. \end{cases}$$

§ 6. In vielen Fällen sind l und l_1 kleine Größen, so daß man in den Gleichungen (30), (32) und (43) die Glieder, die sie enthalten, fortlassen kann und dadurch eine beträchtliche Vereinfachung dieser Gleichungen erzielt.

Aus (30) erhält man

$$z^2 = \sqrt{t^2 - 1} - t,$$

aus (32)

$$z^{-2} = h\left(\sqrt{t'^2 - 1} - t'\right)$$

und aus (43) ergibt sich

$$v = \frac{1}{4} - \frac{\Theta}{2\pi}.$$

Eine weitere Vereinfachung einiger der angeführten Formeln erhält man, wenn

$$m = \frac{\beta + \gamma}{\beta} = \frac{(a_1 + a)^2 + c^2}{2\,a_1\,a} = \frac{2}{k^2}$$

gesetzt wird, so daß

$$e_1 - e_3 = 1\,, \quad e_2 - e_3 = k^2\,, \quad e_1 - e_2 = k'^2\,,$$

$$s - e_1 = \frac{-c^2}{(a_1 + a)^2 + c^2}\,, \qquad s - e_2 = \frac{(a_1 - a)^2}{(a_1 + a)^2 + c^2}\,,$$

$$s - e_3 = \frac{(a_1 + a)^2}{(a_1 + a)^2 + c^2}$$

ist.

§ 7. Es sollen jetzt die vorstehenden Formeln durch ein Beispiel erläutert werden, und zwar soll dafür dasselbe Beispiel gewählt werden, welches Rosa[1]) und Grover berechnet haben. Die dort angeführten Zahlen sind

$$l_1 = l = 8\,, \quad a_1 = 16\,, \quad a = 10\,, \quad d = 8\,,$$

so daß

$$c_1 = 24\,, \quad c_2 = c_3 = -c_4 = 8$$

ist.

Mittels der Formeln (19), (20), (21) und (22) ist dies Problem auf zweierlei Weise berechnet worden; erst wurden die Formeln für den Fall, daß $e_2 < 0$ und dann für den Fall, daß $e_2 > 0$ ist, benutzt.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Rechnung:

Formel	$-\frac{\partial M}{\partial d}$ für $e_2 < 0$	$-\frac{\partial M}{\partial d}$ für $e_2 > 0$
19	$n\,n'$ 1258,222	$n\,n'$ 1258,222
20	$n\,n'$ 1258,216	$n\,n'$ 1258,221
21	$n\,n'$ 1258,216	$n\,n'$ 1258,211
22	$n\,n'$ 1258,222	$n\,n'$ 1258,223

Die Berechnung mittels der Legendreschen Tafeln ergab beim Gebrauch von (23)

$$-\frac{\partial M}{\partial d} = n\,n'\,1258{,}218$$

1) E. B. Rosa und F. W. Grover, Bull. Bur. Stand. 8. p. 104. 1912.

$e_2 < 0$.

	$e_1 = 24$	$e_2 = e_3 = -e_4 = 8$
$\log k'^2 = \log \frac{(a_1 - a)^2 + c^2}{(a_1 + a)^2 + c^2}$	9,6891471	9,1307683
$\log \sqrt{k'} = \log \cos x$	9,9222868	9,7826921
$\log l = \log \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \log \tan^2 \frac{x}{2}$	8,9505240	9,3893300
$\log h = \log \left(\frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + \dots\right)$	8,6494975	9,0884963
$\log \omega_1 = \log \frac{\pi}{2 \cos^4 \frac{x}{2}} (1 + 2h^4 + \dots)^2$	0,2703682	0,3869156
$\eta_1 = \frac{\pi^2}{12\omega_1} \cdot \frac{1 - 3^3 h^2 + 5^3 h^6 - \dots}{1 - 3\ h^2 + 5\ h^6 - \dots}$	0,4201064	0,2101101
$\log \sqrt{e_1 - s} = \log \sqrt{\frac{c^2}{(a_1 + a)^2 + c^2}}$	9,8314091	$9,468474\bar{1}$
$\log \sqrt{\frac{e_1 - s}{k'}} = \log \cos x'$	$9,909122\bar{3}$	9,6857821
$\log l t' = \log \tan^2 \frac{x'}{2}$	$9_n,0180622$	$9_n,5400296$
$-t'$	1,168256	1,414815
$\varkappa = e^{\frac{\pi w_1}{2\omega_1}}$	3,556188	1,836348
$\log \frac{1}{i}\left(\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\right)$	0,1514901	$9,996549\bar{0}$
$\log \lambda = \log \frac{i(a_1^2 - a^2)}{\lvert c \rvert \sqrt{2 a_1 a m}} \left\{\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\right\}$	$9_n,415601\bar{3}$	$9_n,8519678$
$-\lambda$	0,2603763	0,7111608
$\mu = \frac{4(a_1^2 + a^2) + c^2}{6 a_1 a m} \omega_1$	0,9923677	1,6336744
$\log(\mu - (\lambda + \eta_1))$	9,4939945	9,8527260
$\log \frac{\partial I}{\partial c}$	2,1219779	1,8894019
$\frac{\partial I}{\partial c}$	132,4274	77,51787

$$-\frac{\partial I_1}{\partial c_1} + \frac{\partial I_2}{\partial c_2} + \frac{\partial I_3}{\partial c_3} - \frac{\partial I_4}{\partial c_4} = 3\frac{\partial I_2}{\partial c_2} - \frac{\partial I_1}{\partial c_1} = 100{,}1262$$

$$-\frac{\partial M}{\partial d} = n n' \, 1258{,}223 \, .$$

$e_2 > 0.$

	$c_1 = 24$	$c_2 = c_3 = -c_4 = 8$
$\log k^2 = \log \frac{2}{m} = \log \frac{4\,a_1\,a}{(a_1 + a)^2 + c^2}$	9,7085757	9,9369483
$\log \sqrt{k} = \log \cos x$	9,9271439	9,9842371
$\log l_1 = \log \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} = \log \tan^2 \frac{x}{2}$	8,9226347	8,2587754
$\log h_1 = \log \left(\frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + \ldots\right)$	8,6216073	7,9577454
$\log \frac{\omega_3}{\pi i} = \frac{(1 + 2 h_1^4 + \ldots)^2}{2 \cos^4 \frac{x}{2}}$	9,7687793	9,7145900
$\log \omega_1 = \log \left\{\frac{\omega_3}{\pi i} \log \mathrm{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right\}$	$0{,}270367\overline{9}$	0,3869156
$\eta_1 = \frac{\pi i}{2\omega_3}\left[1 - \frac{1}{6}\log \mathrm{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right)\frac{1 - 3^3 h_1^2 + 5^3 h_1^6 \ldots}{1 - 3\, h_1^2 + 5\, h_1^6 \ldots}\right]$	0,4201064	0,2101103
$\log \sqrt{\frac{s - e_3}{k}} = \log \cos x'$	9,9390273	9,9961204
$\log l_1\, t_1' = \log \tan^2 \frac{x'}{2}$	$8_n{,}8456091$	$7_n{,}6499675$
$\log t_1'$	$9_n{,}9229744$	$9_n{,}3911921$
$\log \tan \Theta = \log \frac{t_1'}{\sqrt{1 - t_1'^2}}$	$0_n{,}1854095$	$9_n{,}4047640$
$-\Theta$	56°–52′–29″,834	14°–14′–58″,366
$2\pi v = \frac{\pi}{2} - \Theta + \frac{t_1' \sqrt{1 - t_1'^2}}{(1 + 2 h_1^4 \ldots)^2}\{\mathfrak{L}_{1,1} + \ldots\}$	146°–52′–28″,676	104°–14′–58″,364
$\log \frac{1}{i}\left(\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\right)$	$0{,}151490\overline{0}$	9,9965492
$\log \lambda = \log \frac{i(a_1^2 - a^2)}{\lvert c \rvert \sqrt{2 a_1 a m}}\left\{\eta_1 w_1 i - \omega_1 \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(w_1 i)\right\}$	$9_n{,}4156013$	$9_n{,}8519680$
$-\lambda$	0,2603762	0,7111611
$\mu = \frac{4(a_1^2 + a^2) + c^2}{6 a_1 a m}\omega_1$	0,9923671	1,6336744
$\log(\mu - (\lambda + \eta_1))$	9,4939938	$9{,}852725\overline{8}$
$\log \frac{\partial I}{\partial c}$	2,1219772	$1{,}889401\overline{7}$
$\frac{\partial I}{\partial c}$	132,4272	77,51785

$$-\frac{\partial I_1}{\partial c_1} + \frac{\partial I_2}{\partial c_2} + \frac{\partial I_3}{\partial c_3} - \frac{\partial I_4}{\partial c_4} = 3\frac{\partial I_2}{\partial c_2} - \frac{\partial I_1}{\partial c_1} = 100{,}1263$$

$$-\frac{\partial M}{\partial d} = n\,n'\,1258{,}224\,.$$

und von Formel (24)

$$-\frac{\partial M}{\partial d} = n\,n'\,1258{,}219\,.$$

Bei der Berechnung mit (24) wurden die Werte der elliptischen Integrale dem von Rosa und Grover gegebenen Beispiele entlehnt.

Die Hauptmomente der Berechnung mittels Formel (19) sind für $e_2 < 0$ bzw. $e_2 > 0$ in den beiden vorstehenden Tabellen angegeben; wobei, wegen etwas anderer Art Berechnung die Resultate von den obigen etwas abweichen.

Rutherford, N. J., U.S.A., Januar 1913.

(Eingegangen 7. Februar 1913.)