

SUI GRUPPI DI PUNTI.

Nota di G. Vitali, in Voghera.

Adunanza dell'8 novembre 1903.

Per la teoria dei gruppi di punti di uno spazio S_r sarebbe interessante determinare una quantità corrispondente a ciascun gruppo che possa avere l'ufficio che la *misura* ha per le grandezze, in guisa cioè che alla somma di un numero finito o infinito di gruppi distinti corrisponda la quantità uguale alla somma di quelle corrispondenti ai singoli gruppi e che alla differenza di due gruppi corrisponda la differenza delle quantità corrispondenti ad essi. Ciò non fu raggiunto finora e si è perciò limitato il problema alla determinazione di una classe dei gruppi di punti di S_r sulla quale sia possibile in parte o totalmente trasportare la teoria della misura.

Fu JORDAN *) il primo che considerò una classe di tal natura. Ei chiamò *misurabili* i gruppi di tale classe e noi li chiameremo *gruppi misurabili di JORDAN*. JORDAN ha definito per ogni gruppo di un S_r due elementi distinti cui dà i nomi di *estensione esterna* ed *estensione interna* del gruppo. Noi diamo queste definizioni per i gruppi lineari. Sia G un gruppo lineare contenuto in un intervallo finito (a, b) . Dividiamo (a, b) in un numero finito di tratti tutti minori di una grandezza ρ . Sia S la somma di quelli fra questi tratti che contengono qualche punto di G ed S_r la somma di quelli fra questi tratti che contengono solo punti di G . Col tendere a zero di ρ le due somme S ed S_r tendono a due limiti Σ e Σ_r .

*) *Remarques sur les intégrales définies* (Journal de Mathématiques, 1892).

Questi limiti furono chiamati da JORDAN coi nomi di *estensione esterna* e di *estensione interna* del gruppo G . È manifesto che l'estensione esterna di un gruppo secondo JORDAN coincide coll'estensione del gruppo nel senso di CANTOR *) e che l'estensione interna è minore o tutt'al più uguale all'estensione esterna. Il JORDAN osserva che i gruppi per cui le due estensioni sono uguali soddisfano alla condizione che la somma di un numero finito o infinito di essi è un gruppo le cui due estensioni sono uguali fra loro ed alla somma di quelle dei singoli gruppi. Questi gruppi formano adunque una classe per cui l'estensione ha lo stesso ufficio della misura riguardo alla operazione di addizione. Essi sono i gruppi misurabili di JORDAN. La loro estensione fu detta da JORDAN la loro misura. Ma se riguardo all'addizione si conservano per questi gruppi le proprietà della misura ciò non avviene riguardo alla sottrazione e non sarebbe difficile dare due gruppi misurabili di JORDAN di cui la differenza non sia più un gruppo misurabile di JORDAN.

Più tardi il BOREL **) ci offre una nuova classe di gruppi cui attribuisce ancora il nome di *misurabili* e che noi chiameremo *gruppi misurabili di BOREL*.

Il concetto che guida BOREL alla ricerca di questa classe è appunto quello di volere conservate per essa tutte le proprietà già accennate della misura delle grandezze.

Limitiamoci sempre ai gruppi lineari. Il BOREL considera dapprima la classe dei gruppi costituiti da tutti i punti di un numero finito o infinito di segmenti, e per ciascuno di questi gruppi chiama *misura* la somma delle lunghezze dei diversi segmenti riempiti dai suoi punti. Poi osserva che in virtù di combinazioni di sottrazioni e di addizioni in numero finito o infinito di tali gruppi si perviene ad altri ancora. Questi nuovi gruppi dovranno secondo BOREL essere aggiunti ai precedenti e si dovrà assumere come loro *misura* la grandezza che risulta eseguendo sulle misure dei gruppi generatori le stesse operazioni eseguite sui detti gruppi. L'insieme di tutti questi gruppi è la classe dei *gruppi misurabili di BOREL*. Il BOREL osserva che nelle date definizioni non è contenuta alcuna contraddizione, ossia che per ciascun gruppo di questa classe la

*) G. CANTOR, Math. Ann., tomo 23, pag. 473.

**) *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris, 1898.

grandezza che noi abbiamo chiamata *misura* è determinata in modo unico e si comporta completamente come la misura delle grandezze.

È fuori dubbio che la classe dei gruppi misurabili di JORDAN non contiene tutta la classe dei gruppi misurabili di BOREL, e non si sa se questa contenga completamente quella.

Io, basandomi sopra un concetto che ho introdotto in un mio recente lavoro *), definirò nella Nota presente una classe di gruppi che merita allo stesso titolo di quella di BOREL il nome di *classe di gruppi misurabili*.

Questa classe cui io pervengo contiene tutti i gruppi misurabili di BOREL e di JORDAN ed ha il vantaggio di presentarsi in modo molto naturale.

1. Richiamiamo adunque il concetto di *minima estensione di un gruppo lineare di punti* come fu introdotto nella mia nota citata.

Sia G un gruppo lineare di punti e $[\delta]$ un gruppo (finito o numerabile) di intervalli tali che due qualsiasi di essi non abbiano punti interni comuni e che ogni punto di G cada dentro ad uno di essi. Sia D la somma di tutti i tratti δ . Col variare del sistema $[\delta]$ potrà variare la somma D . Sia Δ il limite inferiore dei valori di D . La grandezza Δ si dirà la *minima estensione* di G .

Nella Nota citata io ho dimostrato che *i gruppi numerabili hanno estensione minima nulla* e che *l'estensione minima di un gruppo chiuso coincide colla sua estensione nel senso di CANTOR*.

2. A fine di semplificare il linguaggio noi diremo che un gruppo $[\delta]$ di intervalli è *un gruppo di intervalli distinti* quando due qualsiasi di questi tratti non hanno punti interni comuni. Diremo poi *ampiezza di un gruppo $[\delta]$ di intervalli distinti* o no la somma delle lunghezze dei singoli intervalli del gruppo.

Ed ora passiamo a dimostrare il seguente

TEOREMA. — *Se $[\delta]$ è un sistema qualunque numerabile di intervalli esiste sempre un sistema $[d]$ di tratti distinti di ampiezza non superiore a*

*) Sulla integrabilità delle funzioni (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVII, 1904).

quella del sistema $[\delta]$ e tale che ogni punto interno ad un tratto δ sia interno ad un tratto d .

Dim. — Sia p un punto interno ad un tratto δ . Esisteranno degli intorni di p costituiti di soli punti interni a tratti δ . Consideriamo il limite superiore di tali intorni. Esso sarà un tratto d tale che ogni suo punto interno è interno ad un tratto δ , ma nessuno dei suoi estremi sarà interno ad un tratto δ . Se noi consideriamo tutti i tratti diversi di tale natura formiamo un sistema $[d]$ numerabile di tratti distinti.

Ogni tratto δ è contenuto completamente in un tratto d e il gruppo dei tratti δ che sono contenuti in un tratto d ha un'ampiezza non minore della lunghezza di questo tratto, perchè ogni punto interno a d è interno ad un tratto δ *). Segue subito che l'ampiezza del sistema $[d]$ non supera quella del sistema $[\delta]$ e che perciò il teorema è vero.

Questo teorema ci permette di considerare l'estensione minima di un gruppo come il limite inferiore delle ampiezze dei sistemi di tratti distinti o no tali che ogni punto del gruppo sia interno ad uno di essi.

Si ha poi immediatamente che:

L'estensione minima della somma di due gruppi distinti non supera la somma delle estensioni minime dei due gruppi.

3. TEOREMA. — *I punti interni contemporaneamente a due sistemi di tratti $[\delta]$ e $[d]$ costituiscono un sistema di tratti distinti.*

Invero se p è un punto interno ad un tratto δ e ad un tratto d vi sono degli intorni di p che contengono solo punti contemporaneamente interni ad un tratto δ e ad un tratto d . Sia ϵ il limite superiore di tali intorni. L'insieme di tutti i tratti ϵ fra loro diversi costituiscono il sistema di tratti distinti cercato.

4. Sia G un gruppo lineare qualsiasi e $[\delta]$ un sistema di tratti includenti ogni punto di G . Se H è l'estensione minima di G noi possiamo costruire un sistema $[d]$ di tratti, includenti ogni punto di G , e di ampiezza minore di $H + \sigma$, σ essendo una quantità positiva piccola a piacere. I punti contemporaneamente interni ai due sistemi di tratti $[\delta]$ e $[d]$ costituiscono in virtù del teorema precedente un sistema $[\epsilon]$ di tratti distinti. Il sistema $[\epsilon]$ includerà ogni punto di G . Inoltre è chiaro

*) Vedi BOREL, l. c., Teorema a pag. 42.

che l'ampiezza di $[\varepsilon]$ non supera quella di $[d]$ e che quindi è minore di $H + \sigma$. Possiamo quindi concludere che

In ogni sistema di tratti includente un gruppo G è possibile inscrivere un altro sistema di tratti distinti pure includente il gruppo G e tale che la sua ampiezza differisca dalla estensione minima di G per poco quanto si vuole.

In virtù di questo teorema noi possiamo dunque determinare un gruppo numerabile di sistemi di tratti

$$[\delta]_1, [\delta]_2, \dots, [\delta]_n, \dots$$

includenti il gruppo G , tali che ciascuno sia inscritto nel precedente e tali che le loro ampiezze tendano all'estensione minima del gruppo.

Siano ora G ed F due gruppi lineari le cui estensioni minime siano H e K e sia

$$[\delta]_1, [\delta]_2, \dots, [\delta]_n, \dots$$

un gruppo di sistemi di tratti includenti G , ciascuno inscritto nel precedente e le cui ampiezze tendono ad H e così pure sia

$$[d]_1, [d]_2, \dots, [d]_n, \dots$$

un gruppo di sistemi di tratti includenti F , ciascuno inscritto nel precedente e le cui ampiezze tendono a K .

I punti contemporaneamente interni ai due sistemi $[\delta]_n$ e $[d]_n$ costituiranno un sistema di tratti distinti che indicheremo con $[\zeta]_n$. Sia Z_n l'ampiezza di questo sistema.

I sistemi

$$[\zeta]_1, [\zeta]_2, \dots, [\zeta]_n, \dots$$

sono ciascuno inscritto nel precedente e perciò le grandezze Z_n tendono ad un limite Z che sarà il loro limite inferiore.

Indicando con H_n e K_n le ampiezze di $[\delta]_n$ e $[d]_n$, è subito manifesto che il gruppo di punti di G che non sono interni ai tratti $[\zeta]_n$ ha un'estensione minima che non supera $H_n - Z_n$ e che il gruppo dei punti di F che non sono interni ai tratti $[\zeta]_n$ ha un'estensione minima che non supera $K_n - Z_n$. Segue senz'altro che l'estensione minima di $G + F$ non supera

$$(H_n - Z_n) + (K_n - Z_n) + Z_n,$$

ossia non supera

$$H_n + K_n - Z_n$$

e passando al limite si conclude che l'estensione minima W di $G + F$ non supera $H + K - Z$.

Sia ora $[v]$ un sistema di tratti includente $E + F$ e di ampiezza minore di $W + \sigma$. I punti contemporaneamente interni a tratti $[v]$ e $[\delta]_n$ formeranno un sistema di tratti distinti $[\delta]'_n$ e quelli contemporaneamente interni a tratti $[v]$ e $[d]_n$ formeranno un sistema di tratti distinti $[d]'_n$. Siano H'_n e K'_n le ampiezze dei due sistemi $[\delta]'_n$ e $[d]'_n$. Sarà

$$H \leq H'_n \leq H_n, \quad K \leq K'_n \leq K_n.$$

I punti contemporaneamente interni a tratti $[\delta]'_n$ e $[d]'_n$ formeranno un sistema $[\zeta]'_n$ di tratti distinti e se Z'_n è l'ampiezza di $[\zeta]'_n$ sarà $Z'_n \leq Z_n$. Consideriamo ora un numero finito di tratti di $[\delta]'_n$ la cui somma sia maggiore di $H'_n - \sigma$ e un numero finito di tratti di $[d]'_n$ la cui somma sia maggiore di $K'_n - \sigma$. I tratti loro comuni sono in numero finito ed hanno una somma non superiore a Z'_n e quindi i tratti non comuni hanno una somma maggiore di

$$H'_n - \sigma + K'_n - \sigma - Z'_n$$

ossia maggiore di

$$H + K - Z'_n - 2\sigma$$

e quindi

$$W + \sigma \geq H + K - Z'_n - 2\sigma$$

ed anche

$$W \geq H + K - Z'_n - 3\sigma$$

e a maggior ragione

$$W \geq H + K - Z_n - 3\sigma$$

e al limite, poichè σ è piccolo a piacere,

$$W \geq H + K - Z.$$

Ma si è anche dimostrato che

$$W \leq H + K - Z$$

dunque è proprio

$$W = H + K - Z.$$

La quantità Z esprime adunque una quantità indipendente dai gruppi di sistemi di tratti che hanno servito a definirla. Essa è la differenza che passa fra la somma delle estensioni minime dei due gruppi e l'estensione minima della somma dei due gruppi. Noi chiameremo Z l'allacciamento dei due gruppi G ed F .

Abbiamo dunque il

TEOREMA. — *L'estensione minima della somma di due gruppi è uguale alla somma delle estensioni minime dei singoli gruppi diminuito dall'allacciamento dei gruppi stessi.*

Ed in particolare :

L'estensione minima della somma di due gruppi distinti aventi allacciamento nullo è uguale alla somma delle estensioni minime dei due gruppi.

È manifesto che :

L'allacciamento di un gruppo G con un gruppo F non è mai inferiore all'allacciamento di G con un sottogruppo di F .

E più in generale :

L'allacciamento di due gruppi non è mai minore dell'allacciamento di due loro sottogruppi.

E quindi :

Se due gruppi hanno nullo l'allacciamento, l'estensione minima della somma di due loro sottogruppi è uguale alla somma delle estensioni minime dei loro sottogruppi medesimi.

Interessante è pure il seguente

TEOREMA. — *Se un gruppo ha con altri due allacciamento nullo, esso ha allacciamento nullo colla loro somma.*

Dim.—Infatti se un gruppo A ha allacciamento nullo con altri due gruppi B e C è possibile includere A , B , C in tre sistemi di tratti $[\delta]_A$, $[\delta]_B$, $[\delta]_C$ tali che i tratti comuni a $[\delta]_A$ e $[\delta]_B$ e quelli comuni a $[\delta]_A$ e $[\delta]_C$ abbiano somme minori di σ , σ essendo piccolo a piacere. Il sistema $[\delta]_B + [\delta]_C$ includente $B + C$ ha con $[\delta]_A$ tratti comuni la cui somma è minore di 2σ . Segue subito che A e $B + C$ hanno allacciamento nullo.

5. Sia G un gruppo lineare di punti contenuto in un intervallo finito (ab) e sia F il gruppo dei punti di (ab) che non appartengono a G .

Se G ed F hanno allacciamento nullo noi diremo che G è un gruppo *misurabile*. Naturalmente poi anche F è misurabile.

Due gruppi misurabili distinti hanno allacciamento nullo.

Invero se G e G_1 sono tali gruppi ed (ab) un intervallo finito che li contenga, il gruppo G_1 sarà un sottogruppo del gruppo F dei punti di (ab) non appartenenti a G . E siccome G ed F hanno allacciamento nullo, anche G e G_1 avranno allacciamento nullo.

Segue che :

L'estensione minima della somma di due gruppi misurabili è uguale alla somma delle loro estensioni minime.

Abbiamo pure il

TEOREMA. — *La somma di due gruppi misurabili è un gruppo misurabile.*

Invero se A e B sono due gruppi misurabili contenuti in un intervallo (a, b) e se C è il gruppo dei rimanenti punti di (a, b) essendo A e C due sottogruppi dei gruppi misurabili A e $B + C$ avranno allacciamento nullo. Così pure dicasi di B e C . Segue subito in virtù dell'ultimo teorema del § precedente che $A + B$ e C hanno allacciamento nullo.

Del resto possiamo osservare che indicando con α, β, γ le estensioni minime di A, B, C e con δ l'ampiezza dell'intero intervallo, l'estensione minima di $A + C$ sarà uguale ad $\alpha + \gamma$ ed anche a $\delta - \beta$.

Segue che $\alpha + \gamma = \delta - \beta$ ossia $\gamma = \delta - (\alpha + \beta)$.

Ma $\alpha + \beta$ è l'estensione minima di $A + B$ e quindi $A + B$ e C hanno allacciamento nullo. Il gruppo $A + B$ è dunque misurabile.

Noi chiameremo *misura* di un gruppo misurabile la sua estensione minima. Abbiamo dunque che:

La somma di due gruppi misurabili è un gruppo misurabile ed ha per misura la somma delle misure dei due gruppi.

Vale pure il seguente:

Se due gruppi A e B sono misurabili e B è sottogruppo di A , la loro differenza è un gruppo misurabile ed ha per misura la differenza delle loro misure.

O più brevemente:

La differenza dei due gruppi misurabili è un gruppo misurabile che ha per misura la differenza delle loro misure.

Sia (ab) un intervallo contenente A , e C il gruppo dei punti di (ab) non appartenenti ad A . I gruppi C e B sono misurabili e quindi anche $C + B$ è misurabile. È misurabile dunque anche $A + C - (C + B) = A - B$. Ora essendo $A - B$ e B misurabili, la loro somma $(A - B) + B = A$ ha per misura la somma delle loro misure e quindi $A - B$ ha per misura la differenza delle misure di A e B .

È pure facile vedere che:

Se A e B sono due gruppi distinti con allacciamento nullo e se il gruppo $A + B$ è misurabile, anche A e B sono misurabili.

Sia al solito (ab) un intervallo che contenga tutti i punti di A e B , e sia C il gruppo dei punti di (ab) non appartenenti nè ad A nè

a B . Essendo $A + B$ misurabile, il gruppo A ha con C allacciamento nullo, ma per ipotesi A ha anche allacciamento nullo con B e quindi A ha allacciamento nullo con $B + C$, ossia A è misurabile. Lo stesso si dica di B .

6. TEOREMA. — Se

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

sono infiniti gruppi di punti misurabili, ciascuno contenuto nel successivo, e se

$$H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$$

sono le rispettive misure, il gruppo G costituito di tutti i punti contenuti in qualcuno dei gruppi dati è pure misurabile ed ha per misura il limite H delle misure di quei gruppi.

Intanto l'estensione minima di G non può essere minore di H perchè non è inferiore a nessun H_n .

Ora i gruppi

$$G_1, G_2 - G_1, G_3 - G_2, \dots, G_n - G_{n-1}, \dots$$

sono tutti misurabili ed hanno per misura rispettivamente

$$H_1, H_2 - H_1, H_3 - H_2, \dots, H_n - H_{n-1}, \dots,$$

perciò io posso includere G_1 in un gruppo di tratti $[\delta]_1$ la cui somma sia minore di $H_1 + \varepsilon_1$ ed in generale un gruppo $G_n - G_{n-1}$ lo posso includere in un sistema di tratti $[\delta]_n$ di ampiezza minore di $H_n - H_{n-1} + \varepsilon_n$, le grandezze

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

essendo scelte positive e in modo che la somma

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

sia minore di ε , ε essendo una quantità piccola a piacere. Con ciò il gruppo G viene incluso in un gruppo

$$[\delta]_1 + [\delta]_2 + \dots + [\delta]_n + \dots$$

di tratti la cui somma è minore di $H + \varepsilon$. Segue che l'estensione minima di G è minore di $H + \varepsilon$ ed essendo ε piccolo a piacere segue che l'estensione minima di G è uguale ad H .

Sia ora (ab) un intervallo di lunghezza D contenente il gruppo G ed F il gruppo dei punti di (ab) che non fanno parte di G . Sia inoltre F_n il gruppo dei punti di (ab) che non appartengono a G_n . Es-

sendo G_n misurabile la misura di F_n è uguale a $D - H_n$. F è contenuto in F_n e quindi l'estensione minima di F è minore o al più uguale a $D - H_n$. Ciò per qualunque n .

Quindi l'estensione minima di F è minore o al più uguale a $D - H$. D'altra parte avendo G l'estensione minima uguale ad H , F non può avere estensione minima minore di $D - H$. Dunque l'estensione minima di F è $D - H$ e perciò G è misurabile. C. D. D.

Si ha pure il

TEOREMA. — Se

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

sono infiniti gruppi di punti misurabili, ciascuno contenuto nel precedente, e se

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

sono le rispettive misure loro, il gruppo F costituito da tutti i punti comuni a tutti i gruppi dati è pure misurabile ed ha per misura il limite K delle misure di quei gruppi.

Sia (ab) un intervallo di ampiezza D contenente F_1 e sia G_n l'insieme dei punti di (ab) non appartenenti ad F_n ed infine sia G il gruppo dei punti di (ab) non appartenenti ad F . I gruppi

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

sono misurabili ed hanno per misura rispettivamente

$$D - K_1, D - K_2, \dots, D - K_n, \dots$$

inoltre ogni G_n è contenuto nel successivo. Segue pel teorema precedente che G è misurabile e che ha per misura $D - K$. Dunque F è misurabile ed ha per misura K . C. D. D.

7. I gruppi che hanno nulla l'estensione minima sono necessariamente misurabili perchè il loro allacciamento con qualsiasi gruppo è nullo.

Ma noi sappiamo che i gruppi numerabili hanno estensione minima nulla, dunque:

I gruppi numerabili sono misurabili ed hanno misura nulla.

8. Il gruppo di tutti i punti di un segmento è un gruppo misurabile, quindi, in virtù del primo teorema del § 6, il gruppo di tutti i punti di un sistema $[\delta]$ di segmenti distinti è pure misurabile, si computino o no gli estremi dei segmenti.

Abbiamo perciò anche che :

Il gruppo dei punti interni ad un sistema $[\delta]$ di tratti distinti è misurabile.

Sia ora (ab) un intervallo finito e $[\delta]$ un sistema di tratti distinti contenuto in esso. I punti di (ab) che non sono interni al sistema $[\delta]$ formano ancora un gruppo misurabile. Ma un gruppo chiuso G si può sempre pensare come il gruppo dei punti di un intervallo che non sono interni ad un conveniente sistema di tratti. Dunque *i gruppi chiusi sono misurabili*. L'estensione minima di un gruppo chiuso coincide, come noi sappiamo, coll'estensione del gruppo nel senso di CANTOR dunque :

Un gruppo chiuso è misurabile ed ha per misura la sua estensione nel senso di CANTOR.

9. Le proprietà dei gruppi misurabili da noi dimostrate ai paragrafi 5 e 6 unite al fatto che i punti di un sistema numerabile di tratti formano un gruppo misurabile ci portano a concludere che tutti i gruppi misurabili di BOREL sono misurabili anche nel nostro senso.

Se noi poi osserviamo che i gruppi misurabili di JORDAN constano di un gruppo rinchiudibile e del gruppo dei punti di un sistema numerabile di tratti possiamo concludere che anche i gruppi misurabili di JORDAN sono misurabili nel nostro senso. Ciò appunto io avevo enunciato nell'introduzione *).

Voghera, 5 novembre 1903.

G. VITALI.

*) Il presente lavoro era già in corso di stampa quando mi fu segnalata dal ch.^{mo} Prof. S. PINCHERLE la Nota *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, par M. H. LEBESGUE, pubblicata nei Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 132, p. 1025 (a. 1901), nella quale si accenna ai concetti qui trattati. Il sig. LEBESGUE fa uso di questi concetti per la costruzione delle primitive delle funzioni derivate che non sono integrabili.