Ueber einen Satz des Herrn Noether.

Von

L. Stickelberger in Freiburg i. Br.

Der Zweck dieser Note geht dahin, den von Herrn Voss (Bd. 27, S. 528—532 dieser Ann.) gegebenen Beweis des Noether'schen Fundamentalsatzes in Bd. VI, S. 351 der Annalen in einem Punkte weiter auszuführen, wo sich der Verfasser mit einer Andeutung begnügt hat. Die hierbei gebrauchten Sätze über Potenzreihen von zwei Veränderlichen, welche weniger bekannt zu sein scheinen, sind in § 1 zusammengestellt; § 2 behandelt eine Interpolationsaufgabe; in § 3 wird der Uebergang von den Noether'schen zu den Voss'schen Bedingungen durchgeführt, und damit der in Rede stehende Satz neu bewiesen. Veranlassung zur genaueren Ausführung dieser Betrachtungen gab ein Briefwechsel mit Herrn Noether, vorzüglich aber Besprechungen mit Herrn Lüroth, welcher selbst vor längerer Zeit den Noether'schen Satz in ähnlicher Weise bewiesen hat.

§ 1.

Hilfssätze aus der Functionentheorie.

Die im Folgenden zu benutzenden Hilfssätze über Potenzreihen von zwei Variabeln sollen hier kurz abgeleitet werden im Anschluss an die Abhandlung des Herrn Weierstrass „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze" *).

1. Sei $\Phi(x, y) = \Phi$ eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre (holomorphe) Function der Veränderlichen x, y, welche also für kleine Werthe dieser Variabeln durch eine nach ganzen positiven Potenzen derselben fortschreitende convergente Reihe definirt wird. Für $x = 0$ möge diese Reihe mit dem Gliede ay^n beginnen, wo $n > 0$ und a eine von Null verschiedene Constante ist. Setzt man dann

*) Abhandlungen a. d. Functionentheorie S. 107 ff.

$$\Phi(x, y) = a y^n (1 + w),$$

so ist w eine Potenzreihe von x, y, $\frac{1}{y}$, welche aber für $x = 0$ sich auf eine solche von y allein, und zwar ohne constantes Glied, reducirt. Aus dieser Form von w ergiebt sich leicht die Möglichkeit, drei positive Grössen G, H, H_1 so zu bestimmen, dass $|w| < 1$ wird für $H_1 < |y| < H$, $|x| < G$; und zwar können alle drei Grössen beliebig *klein* angenommen werden, wiewohl sie nicht vollkommen unabhängig sind. In Folge dessen sind die Reihen

$$w - \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{3} w^3 - \cdots = \log (1 + w),$$

$$1 - w + w^2 - w^3 + \cdots = \frac{1}{1 + w}$$

für die genannten Werthe von x, y gleichmässig convergent, und können daher wieder als Potenzreihen von x, y, $\frac{1}{y}$ dargestellt werden, welche ebenfalls für $x = 0$ sich auf solche von y allein reduciren, deren constante Glieder resp. gleich 0 und 1 sind. In dem besonderen später vorkommenden Falle, wo $\Phi - a y^n$ ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y darstellt, enthalten diese Reihen, abgesehen von dem Anfangsgliede der zweiten, nur negative Potenzen von y.

Wir verweilen zunächst bei der ersten Entwicklung, und schreiben

$$\log \Phi(x, y) = n \log y + \log a + \log (1 + w)$$

$$= n \log y + \sum_{1}^{\infty} X_\lambda y^{-\lambda} + \mathfrak{P}(x, y),$$

wo $\mathfrak{P}(x, y)$ wieder eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Daraus folgt sofort

$$\Phi(x, y)\, e^{-\mathfrak{P}(x, y)} = y^n\, e^{\Sigma X_\lambda y^{-\lambda}}.$$

Entwickelt man beiderseits die Exponentialgrössen in Potenzreihen, was keine weitere Beschränkung der Veränderlichen erfordert, so erhält man links eine gewöhnliche Potenzreihe, rechts eine solche, die keine höhere Potenz von y als die n^{te} enthält. Da aber die Coefficienten entsprechender Potenzen von y auf beiden Seiten gleich sein müssen, so reduciren sich in Wahrheit beide Reihen auf ein Polynom n^{ten} Grades in y, welches $\varphi(x, y)$ heisse. Für $x = 0$ wird dann $X_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und folglich $\varphi(0, y) = y^n$. Hingegen wird $e^{\mathfrak{P}(x,y)} = \mathfrak{Q}(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ den Werth a annehmen. Die erhaltene Gleichung

(1) $$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\, \mathfrak{Q}(x, y)$$

gilt überhaupt für $|x| < G$, $|y| < H$, da negative Potenzen von y in ihr nicht vorkommen.

Es ist leicht zu zeigen, dass durch diese Eigenschaften die Functionen φ, $\mathfrak{Q}$ völlig bestimmt sind, dass sie also z. B. von der Wahl der Grössen G, H, H_1 nicht abhängen. Hat man nämlich eine andere derartige Zerlegung

$$\Phi = \varphi^* \mathfrak{Q}^*,$$

wo φ^* ein Polynom in y bedeutet, in welchem der Coefficient der höchsten Potenz von y gleich Eins ist, die folgenden Coefficienten hingegen reguläre durch x theilbare Functionen sind, während $\mathfrak{Q}^*$ als Function von x, y regulär ist und für $x = 0$, $y = 0$ nicht verschwindet, dann ist zunächst der Grad von φ^* gleich n, weil für $x = 0$

$$\frac{\Phi}{y^n} = \frac{\varphi^*}{y^n} \cdot \mathfrak{Q}^* = a + a_1 y + \cdots$$

sein muss. Ferner ist für alle hinreichend kleinen Werthe von x, y

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^*}.$$

Nun kann man aber die oben für die Function Φ durchgeführten Betrachtungen in analoger Weise auf φ anwenden; bei geeigneter Beschränkung von x, y wird somit

$$\frac{1}{\varphi} = y^{-n} + X_1' y^{-n-1} + X_2' y^{-n-2} + \cdots,$$

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = 1 + X_1'' y^{-1} + X_2'' y^{-2} + \cdots,$$

während gleichzeitig der Quotient $\mathfrak{Q} : \mathfrak{Q}^*$ als Potenzreihe von x, y darstellbar ist. Durch Vergleichung entsprechender Coefficienten wird ersichtlich, dass sich beide Reihen auf das constante Glied 1 reduciren. Daher ist $\varphi^* = \varphi$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^*$.

Lässt man die Bedingung fallen, dass für $x = 0$, $y = 0$ $\mathfrak{Q}^*$ von Null verschieden sei, so lehren ähnliche Schlüsse, dass φ als ganze Function von y algebraisch theilbar sein muss durch φ^*.

Die soeben gebrauchte Entwicklung von $\frac{1}{\varphi}$ erhält man übrigens bei der oben angegebenen Definition von φ aus der Gleichung

$$\varphi^{-1} = y^{-n} e^{-\Sigma X_\lambda y^{-\lambda}}.$$

I. *Eine gewöhnliche Potenzreihe von x, y, welche für $x = 0$ mit der Potenz y^n beginnt, kann dargestellt werden als Product aus einem Polynom $\varphi(x, y) = y^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots + X_n$, dessen Coefficienten durch x theilbare Potenzreihen von x sind, in eine gewöhnliche Potenzreihe von x und y, welche für $x = 0$, $y = 0$ nicht verschwindet. Diese Zerlegung ist eine völlig bestimmte.*

Anm. Für unendlich kleine Werthe von x hat die Gleichung $\Phi = 0$ n gleiche oder ungleiche unendlich kleine Wurzeln, nämlich die Wurzeln der algebraischen Gleichung $\varphi(x, y) = 0$; die ganzen symmetrischen Functionen derselben sind also reguläre Functionen von x. Bekanntlich zerfallen diese Wurzeln in Cyklen von solchen, welche bei Umkreisung von $x = 0$ sich ineinander umsetzen; jedem solchen Cyklus entspricht ein Divisor von $\varphi(x, y)$, welcher die nämliche Form wie φ hat, aber nicht weiter in Factoren derselben Art zerlegbar ist. Für die gegenwärtigen Betrachtungen kann jedoch von dieser Zerlegung und um so mehr von den Entwicklungen der Wurzeln selbst nach gebrochenen Potenzen von x abgesehen werden; ja man braucht die Wurzeln gar nicht in die Rechnung einzuführen.

2. Wir werden nunmehr untersuchen, wie weit eine zweite Potenzreihe $\Psi(x, y)$ mit Hilfe von $\Phi(x, y)$ reducirt werden kann unter Beschränkung auf kleine Werthe von x, y. Anstatt mit Φ operiren wir aber zunächst mit der vorhin definirten Function $\varphi(x, y)$, oder vielmehr mit einem Polynom

$$\varphi(x, y) = X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n,$$

dessen Coefficienten Potenzreihen von x und mit Ausnahme von X_0 durch x theilbar sind. Wir wählen die oben gebrauchten Grössen G, H, H_1 so, dass die Stelle $x = G$, $y = H$ dem Convergenzbereiche der Reihe Ψ oder doch dessen Begrenzung angehört. Dann ist $\frac{1}{\varphi}$ als Potenzreihe von $x, \frac{1}{y}$ und $\frac{\Psi}{\varphi}$ als solche von $x, y, \frac{1}{y}$ darstellbar. Trennt man ähnlich wie oben:

$$\frac{\Psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = \sum \mathfrak{X}_\lambda y^{-\lambda} + \mathfrak{Q}_1(x, y),$$

so wird

$$\Psi(x, y) - \varphi(x, y)\, \mathfrak{Q}_1(x, y) = \varphi(x, y) \sum_1^\infty \mathfrak{X}_\lambda y^{-\lambda}.$$

Die schon zweimal angewandte Schlussweise lehrt, dass beide Seiten dieser Gleichung sich auf ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\psi(x, y)$ in y reduciren, also

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) + \varphi(x, y)\, \mathfrak{Q}_1(x, y) \tag{2}$$

gesetzt werden kann. Gäbe es eine zweite Darstellung dieser Art:

$$\Psi = \psi^* + \varphi \mathfrak{Q}_1^*,$$

so würde

$$(\psi - \psi^*) \frac{1}{\varphi} = \mathfrak{Q}_1^* - \mathfrak{Q}_1$$

sein, woraus in bekannter Weise $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}$, $\psi^* = \psi$ folgte.

Die hiernach völlig bestimmten Functionen ψ, $\mathfrak{Q}_1$ nennen wir den *Rest* und *Quotienten* der Division von Ψ durch φ (für die Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$). Die Function Ψ heisst theilbar durch φ, wenn der Quotient für kleine Werthe von x, y regulär ist; die Bedingung dafür ist nach dem Gesagten das identische Verschwinden des Restes. Nennt man ferner zwei Functionen Ψ_1, Ψ_2 congruent nach dem Modul φ, falls ihre Differenz durch φ theilbar ist, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung der Congruenz die Uebereinstimmung der Divisionsreste. Für diese Theilbarkeit und Congruenz gelten die gewöhnlichen Sätze über Addition, Subtraction und Multiplication.

Ist Ψ selbst ein Polynom m^{ten} Grades in y, so wird der Quotient $\mathfrak{Q}_1$ ebenfalls ein Polynom, und zwar $m-n^{\text{ten}}$ Grades; er verschwindet für $m < n$. Für solche Polynome fällt also dieser Begriff der Theilbarkeit und Congruenz mit dem gewöhnlichen algebraischen zusammen.

Man kann einen Schritt weiter gehen und die hier betrachtete Congruenz (mod. φ) als eine solche nach dem Modul Φ auffassen; dabei ist Ψ als theilbar durch Φ anzusehen, wenn der Quotient $\Psi:\Phi$ als Potenzreihe von x, y darstellbar ist. In diesem Sinne sind die unter 1. betrachteten Functionen Φ, φ gegenseitig durcheinander theilbar; jede Function, die für kleine Werthe von x, y regulär ist und im Nullpunkte einen von Null verschiedenen Werth hat, ist als Einheit des betrachteten Gebietes aufzufassen.

In dem Falle, wo Φ ein Polynom m^{ten} Grades ist, kann man durch Reihenentwicklung des Quotienten $\Psi:\Phi$ mit Leichtigkeit ein Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades finden, welches $\equiv \Psi$ (mod. Φ) ist. Dieser Rest kann zwar in manchen Fällen den früher definirten vom Grade $n-1$ vertreten; da er indessen durch die Gradbedingung bei weitem nicht bestimmt ist, so lässt sich auf ihn kein brauchbarer Theilbarkeitsbegriff basiren.

II. *In Bezug auf die unter* I. *charakterisirte Function* Φ *als Modul ist jede Potenzreihe von* x, y *congruent einer und nur einer solchen, welche keine höhere Potenz von* y *als die* $(n-1)^{\text{te}}$ *enthält.*

§ 2.

Die Hermite'sche Interpolationsformel.

Aus der Lehre von der Elimination einer Variabeln aus zwei ganzen rationalen Functionen derselben ist folgender Satz bekannt, welcher die Grundlage des Folgenden bildet:

Bedeuten φ, Φ, ψ Polynome in y von den Graden $n, m, m+n-1$, und ist die Resultante R der beiden ersten von Null verschieden, dann giebt es zwei völlig bestimmte Polynome χ, X der Grade $n-1$, $m-1$, welche die Gleichung

$$R\psi = \chi\Phi + X\varphi$$

identisch befriedigen; die Coefficienten derselben sind ganze Functionen von denen der gegebenen Polynome.

Ausserdem sei daran erinnert, dass die Resultante von φ mit dem Producte von mehreren Polynomen gleich ist dem Producte der Resultanten von φ mit den einzelnen Factoren dieses Productes.

Nun seien h Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ von den Graden $n_1, n_2, \ldots, n_h$ gegeben; ferner werde

$$(1)\qquad \begin{gathered} n = n_1 + n_2 + \cdots + n_h, \\ \Phi = \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_h = \varphi_k \Phi_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, h) \end{gathered}$$

gesetzt. Sind die Polynome φ_k theilerfremd, d. h. sind die Resultanten von je zweien derselben sämmtlich von Null verschieden, dann gilt dasselbe von der Resultante von φ_k mit Φ_k, welche wir durch R_k bezeichnen. Bedeuten daher $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ beliebige Polynome vom Grade $n - 1$, so kann man nach dem Vorhergehenden setzen

$$(2)\qquad R_k \psi_k = \chi_k \Phi_k + X_k \varphi_k.$$

Die durch die Gleichung

$$(3)\qquad \psi = \sum \frac{\chi_k}{R_k} \Phi_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

definirte Function ψ ist dann ein Polynom $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades in y, welches die h Congruenzen

$$\psi \equiv \psi_k \,(\text{mod. } \varphi_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, h)$$

befriedigt. In dem besondern Falle, wo die Functionen φ_k alle vom ersten Grade sind, reducirt sich die Gleichung (3) in Verbindung mit (2) auf die Lagrange'sche Interpolationsformel; im Hinblick auf die Arbeiten von Herrn Hermite*) möchte ich die Gleichung (3) als *Hermite'sche Interpolationsformel* bezeichnen.

III. *Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ theilerfremde Polynome in y von den Graden $n_1, n_2, \ldots, n_h$, ist $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, sind ferner $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ irgend welche Polynome $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, dann kann man ein Polynom $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades ψ bilden, welches nach den h Moduln φ_k der Reihe nach den Functionen ψ_k congruent ist; die Coefficienten von ψ sind rational aus denen der gegebenen Polynome gebildet derart, dass der Nenner das Product der sämmtlichen Resultanten aus je zweien der Functionen φ_k darstellt.*

Durch die bisherigen Annahmen ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass eine, aber auch nur eine, der Functionen φ_k in Wirklichkeit von niedrigerem als dem angegebenen Grade sei; ist dies der Fall, so ist die in Satz III erwähnte Function durch die angegebenen Bedingungen nicht völlig bestimmt; setzt man hingegen voraus,

*) Crelle-Borchardt's Journal 84, S. 70 ff., sowie Cours d'Analyse I (1873), p. 265 ff.

dass jede der Functionen φ_k wirklich vom Grade n_k sei, dann giebt es keine andere Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche die h Congruenzen befriedigt.

Im Folgenden kommt der Fall in Betracht, wo die Coefficienten der Polynome φ_k, ψ_k für kleine Werthe von x reguläre Functionen von x und ausserdem für $x=0$ die Polynome selbst theilerfremd sind; dann sind auch die Polynome χ_k und die Resultanten R_k reguläre Functionen von x, und letztere durch x nicht theilbar; mithin ist auch ψ von gleicher Beschaffenheit wie die Functionen ψ_k.

§ 3.

Der Noether'sche Satz.

In den nächstfolgenden Erörterungen soll unter „Polynom" eine solche ganze rationale Function von y verstanden werden, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreihen von x sind, unter dem Grade eines Polynoms derjenige in Bezug auf y.

Sei $\Phi(x, y)$ ein Polynom n^{ten} Grades, in welchem der Coefficient von y^n durch x nicht theilbar ist. Setzt man

$$\Phi(0, y) = A(y-y_1)^{n_1}\cdots(y-y_h)^{n_h},$$

wo die Grössen $y_1 \ldots y_h$ von einander verschieden sind, so kann man nach § 1 ein Polynom $\varphi_k(x, y)$ finden, welches vom Grade n_k ist, in Φ aufgeht und für $x=0$ in $(y-y_k)^{n_k}$ übergeht, und zwar ist nach den dortigen Ausführungen die Theilbarkeit von Φ durch φ_k als algebraische aufzufassen. Die verschiedenen Polynome φ_k sind aber für $x=0$ und um so mehr für unbestimmtes x theilerfremd; mithin ist Φ durch das Product der φ_k theilbar; wir setzen

$$\Phi = Q\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_h.$$

Nun seien F, f zwei weitere Polynome von solcher Beschaffenheit, dass in der Nähe jedes der Punkte $x=0$, $y=y_k$

$$f = \Psi_k F + X_k \Phi \tag{1}$$

gesetzt werden kann, wo Ψ_k, X_k Potenzreihen von x, $y-y_k$ sind. Nach § 1 ist Ψ_k nach dem Modul φ_k congruent einem Polynom ψ_k vom Grade $n_k - 1$ (oder auch, wenn man bloss mit Hilfe von Φ reducirt, einem solchen vom Grade $n-1$). Nach § 2 giebt es ferner ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ψ, welches den h Congruenzen $\psi \equiv \psi_k \equiv \Psi_k$ (mod. φ_k) genügt. Daraus folgt

$$f - \psi F \equiv f - \Psi_k F \equiv 0 \ (\text{mod. } \varphi_k),$$

und diese Congruenz sagt aus, dass das Polynom $f-\psi F$ *algebraisch* theilbar ist durch φ_k. Wegen der Beschaffenheit der Polynome φ_k und der Function Q ist also jene Differenz durch Φ theilbar, und der

Quotient ein Polynom χ der hier betrachteten Art; es ergiebt sich somit

(2) $$f = \psi F + \chi\Phi.$$

Macht man nun die Voraussetzung, dass die Polynome Φ, F für unbestimmtes x theilerfremd seien, so ist durch diese Gleichung nebst der Gradbedingung ψ völlig bestimmt, und man gewinnt den Satz:

IV. *Seien Φ, F, f Polynome in y, deren Coefficienten Potenzreihen von $x - x_0$ sind; die Resultante der beiden ersten sei für unbestimmtes x von Null verschieden, und der wirkliche Grad von Φ sowohl allgemein wie auch für $x = x_0$ gleich n. Bestimmt man dann ein Polynom $(n-1)^{ten}$ Grades ψ nebst einem andern χ derart, dass die Gleichung $f = \psi F + \chi\Phi$ identisch wird, dann werden die Coefficienten von ψ und χ ebenfalls gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$ sein, wenn für jede zu $x = x_0$ gehörige Stelle $x = x_0$, $y = y_k$ zwei Potenzreihen Ψ_k, X_k von $x - x_0$, $y - y_k$ existiren, welche die Gleichung*

$$f = \Psi_k F + X_k \Phi$$

befriedigen.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass für diejenigen der erwähnten Punkte, in welchen F von Null verschieden ist, f gar keiner Bedingung unterworfen ist, da man in diesem Falle $X_k = 0$ setzen kann.

Jetzt seien Φ, F, f ganze rationale Functionen von x und y; die beiden ersten seien theilerfremd, und n, m ihre wirklichen Grade in y. Bestimmt man die Polynome ψ, χ aus der Gleichung (2) mit der Bedingung, dass ψ vom Grade $(n-1)$ sei, so ergeben sich dieselben als rationale Functionen von x; als Nenner tritt zunächst die Resultante R von Φ und F in Bezug auf y auf, und ausserdem, wenn der Grad von f grösser als $m + n - 1$ ist, eine Potenz des Coefficienten von y^n in Φ. Wenn dieser Coefficient mit R keinen gemeinsamen Theiler hat, und wenn für alle Schnittpunkte der Curven $\Phi = 0$, $F = 0$, für welche x und damit auch y einen endlichen Werth hat, f die in Satz IV geforderte Eigenschaft besitzt, so sind die Coefficienten der Polynome ψ, χ regulär für alle diejenigen Werthe von x, welche $R = 0$ machen. Sie sind daher überall regulär, d. h. ganz, wenn entweder jener Coefficient constant oder f höchstens vom $(m+n-1)^{ten}$ Grade ist. Auf den ersten dieser Fälle kann aber bekanntlich jeder andere reducirt werden durch Einführung der Variabeln $z = x + cy$ an Stelle von x, wobei nur gewisse specielle Werthe von c auszuschliessen sind. Die Bedingungen für f erleiden durch diese Transformation keine Aenderung. Wendet man daher das eben gewonnene Resultat auf die transformirten Functionen an und substituirt rückwärts, so bleibt das Ergebniss bestehen mit der einzigen Aenderung, dass über die Grade der Functionen ψ, χ in Bezug auf y nichts bestimmtes mehr ausgesagt werden kann. Wir haben also den Satz des Herrn Noether gewonnen.

V. *Sind Φ, F, f ganze rationale Functionen von x, y, die beiden ersten ohne gemeinsamen Theiler, und lässt sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle x_0, y_0 f in die Form $\Psi\Phi + XF$ bringen, wo Ψ, X Potenzreihen von $x - x_0$, $y - y_0$ bedeuten, dann kann f in die Form $\psi\Phi + \chi F$ gesetzt werden, wo ψ, χ ebenfalls ganze rationale Functionen bezeichnen.*

Die Bedingungen des Satzes beziehen sich in Wirklichkeit nur auf diejenigen Punkte, für welche Φ, F gleichzeitig verschwinden, da sie in allen übrigen von selbst erfüllt sind.

Wir kehren nochmals zu den Bedingungen des Satzes IV zurück. Nach dem Beweise, den wir gegeben haben, könnte die Gleichung (1) durch die Congruenz

$$f \equiv \Psi_k F \ (\mathrm{mod.}\ \varphi_k)$$

ersetzt werden. Benutzt ist in der That nur diese Congruenz, welche aber nicht weniger fordert als die frühere. Macht man speciell die Annahme, dass die Discriminante von Φ nicht identisch verschwindet, so sagt diese Congruenz aus, dass für die in der Nähe von x_0, y_k gelegenen Punkte der Curve $\Phi = 0$ die Gleichung $f = \Psi_k F$ bestehe, dass also nach der von Herrn Noether gewählten Terminologie der Quotient $f : F$ den Charakter einer ganzen Function von x, y habe. Der Satz V ist insofern allgemeiner als der ursprüngliche Noether'sche, als er die Discriminante von Φ keiner Beschränkung unterwirft.