

SUL GRUPPO SEMPLICE DI 168 COLLINEAZIONI PIANE.

Nota di **Riccardo Bucca** (Palermo).

Adunanza del 14 luglio 1907.

§ 1.

Nel gruppo G_{168} di 168 collineazioni piane esistono due sistemi ciascuno di sette sottogruppi ottaedrici G_{24} . Assumendo come triangolo coordinato il triangolo unito di una collineazione di 7° ordine e come punto unità un punto unito di una collineazione di 3° ordine, le equazioni delle sette coniche invarianti per i sette sottogruppi ottaedrici di un sistema sono:

$$(1) \quad f_v = \varepsilon^{2v} x_1^2 + \varepsilon^{4v} x_2^2 + \varepsilon^v x_3^2 - k(\varepsilon^{6v} x_2 x_3 + \varepsilon^{5v} x_3 x_1 + \varepsilon^{3v} x_1 x_2) = 0 \quad (v=0, 1, \dots, 6)$$

e le equazioni delle sette coniche invarianti per i sette sottogruppi ottaedrici dell'altro sistema sono:

$$(2) \quad f'_v = \varepsilon^{2v} x_1^2 + \varepsilon^{4v} x_2^2 + \varepsilon^v x_3^2 - k'(\varepsilon^{6v} x_2 x_3 + \varepsilon^{5v} x_3 x_1 + \varepsilon^{3v} x_1 x_2) = 0,$$

nelle quali formole ε , k , k' , hanno i seguenti valori:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}, \quad k = -(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4) = \frac{1 - \sqrt{-7}}{2}, \quad k' = -(\varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6) = \frac{1 + \sqrt{-7}}{2},$$

cioè ε è una radice immaginaria settima dell'unità, k e k' sono radici dell'equazione $k^2 - k + 2 = 0$ ¹⁾.

§ 2.

Le forme f_v ridotte alla forma normale.

Il discriminante di f_v è:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^{2v} & -\frac{k}{2} \varepsilon^{3v} & -\frac{k}{2} \varepsilon^{5v} \\ -\frac{k}{2} \varepsilon^{3v} & \varepsilon^{4v} & -\frac{k}{2} \varepsilon^{6v} \\ -\frac{k}{2} \varepsilon^{5v} & -\frac{k}{2} \varepsilon^{6v} & \varepsilon^v \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Conviene tener presenti le seguenti relazioni:

$$k + k' = 1, \quad k^2 = k - 2, \quad k^3 = -k - 2, \quad k^4 = -3k + 2, \quad k^5 = -k + 6, \quad k^6 = 5k + 2.$$

Dividendo la prima linea e la prima colonna per ε^v , la seconda linea e la seconda colonna per ε^{2v} , la terza linea e la terza colonna per ε^{4v} il determinante resta diviso per $\varepsilon^{2v+4v+8v} = \varepsilon^{14v} = 1$, cioè non cambia valore e si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6-k).$$

Dunque le sei forme quadratiche f_v hanno i discriminanti uguali a $\frac{1}{2}(6-k)$; similmente le sei forme quadratiche f'_v hanno i discriminanti uguali a $\frac{1}{2}(6-k')$.

§ 3.

Le forme aggiunte φ_v e φ'_v .

Calcoliamo le forme aggiunte delle f_v . Denotando con φ_v la forma aggiunta di f_v divisa per $\frac{1}{4}(6-k)$, si ha:

$$(3) \quad \varphi_v = \varepsilon^{5v} u_1^2 + \varepsilon^{3v} u_2^2 + \varepsilon^{6v} u_3^2 - k'(\varepsilon^v u_2 u_3 + \varepsilon^{2v} u_3 u_1 + \varepsilon^{4v} u_1 u_2);$$

similmente denotando con φ'_v la forma aggiunta di f'_v si ha:

$$(4) \quad \varphi'_v = \varepsilon^{5v} u_1^2 + \varepsilon^{3v} u_2^2 + \varepsilon^{6v} u_3^2 - k(\varepsilon^v u_2 u_3 + \varepsilon^{2v} u_3 u_1 + \varepsilon^{4v} u_1 u_2).$$

Se $f_v = 0$, $f'_v = 0$ sono le equazioni in coordinate di punti delle coniche invarianti per i sottogruppi ottaedrici, le equazioni delle stesse coniche in coordinate di rette sono $\varphi_v = 0$, $\varphi'_v = 0$; si osservi che i coefficienti di φ_v e φ'_v sono i coniugati dei corrispondenti coefficienti di f_v e f'_v , poichè dalle f_v ed f'_v si deducono le φ_v e φ'_v cambiando le coordinate di punto in coordinate di rette e ad un tempo ε con ε^6 (e quindi k in k').

§ 4.

Il gruppo di permutazioni isomorfo al gruppo di collineazioni.

Quando alle sette coniche di un sistema, per es. alle $f_v = 0$, si applicano le 168 collineazioni del gruppo, esse si permutano tra loro; si deduce così un gruppo di permutazioni di sette cose, isomorfo oloedricamente al gruppo G_{168} di collineazioni. Consideriamo infatti le due collineazioni τ , ω che servono a generare quest'ultimo e che son date da ²⁾:

$$\tau = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^4 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

²⁾ Cfr. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, Zweite Auflage (Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1899), II. Band.

Si trova subito:

$$(5) \quad \tau f_v = f_{v+1},$$

essendo gli indici presi rispetto al modulo 7, quindi la collineazione τ produce nelle sette coniche f_v la permutazione ciclica di 7° ordine (0 1 2 3 4 5 6) che indicheremo altresì con τ . Applicando la ω ad f_v si ha:

$$\omega f_v = [\alpha^2 \varepsilon^{2v} + \beta^2 \varepsilon^{4v} + \gamma^2 \varepsilon^v - k(\beta \gamma \varepsilon^{6v} + \gamma \alpha \varepsilon^{5v} + \alpha \beta \varepsilon^{3v})] x_1^2 + \dots \\ \dots + [2(\beta \gamma \varepsilon^{2v} + \gamma \alpha \varepsilon^{4v} + \alpha \beta \varepsilon^v - k\{\beta \gamma + \alpha^2\} \varepsilon^{6v} + (\gamma \alpha + \beta^2) \varepsilon^{5v} + (\alpha \beta + \gamma^2) \varepsilon^{3v})] x_2 x_3 + \dots,$$

dove i termini in x_2^2 , x_3^2 si deducono da quello in x_1^2 e similmente i termini in $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ si deducono da quello in $x_2 x_3$ col permutare circolarmente α , β , γ . Orbene, tenendo presenti le relazioni tra le costanti α , β , γ ³⁾ si può formare il seguente quadro:

$v =$	1	2	3	4	5	6	0	
$\alpha^2 \varepsilon^{2v} + \beta^2 \varepsilon^{4v} + \gamma^2 \varepsilon^v =$	$\alpha \varepsilon^3$	$\beta \varepsilon^5$	$\gamma \varepsilon$	$\gamma \varepsilon^6$	$\beta \varepsilon^2$	$\alpha \varepsilon^4$	1	
$\beta^2 \varepsilon^{2v} + \gamma^2 \varepsilon^{4v} + \alpha^2 \varepsilon^v =$	$\gamma \varepsilon^6$	$\alpha \varepsilon^3$	$\beta \varepsilon^2$	$\beta \varepsilon^5$	$\alpha \varepsilon^4$	$\gamma \varepsilon$	1	
$\gamma^2 \varepsilon^{2v} + \alpha^2 \varepsilon^{4v} + \beta^2 \varepsilon^v =$	$\beta \varepsilon^5$	$\gamma \varepsilon^6$	$\alpha \varepsilon^4$	$\alpha \varepsilon^3$	$\gamma \varepsilon$	$\beta \varepsilon^2$	1	;
$\beta \gamma \varepsilon^{6v} + \gamma \alpha \varepsilon^{5v} + \alpha \beta \varepsilon^{3v} =$	$\gamma \varepsilon^3$	$\alpha \varepsilon^5$	$\beta \varepsilon$	$\beta \varepsilon^6$	$\alpha \varepsilon^2$	$\gamma \varepsilon^4$	0	
$\gamma \alpha \varepsilon^{6v} + \alpha \beta \varepsilon^{5v} + \beta \gamma \varepsilon^{3v} =$	$\beta \varepsilon^6$	$\gamma \varepsilon^3$	$\alpha \varepsilon^2$	$\alpha \varepsilon^5$	$\gamma \varepsilon^4$	$\beta \varepsilon$	0	
$\alpha \beta \varepsilon^{6v} + \beta \gamma \varepsilon^{5v} + \gamma \alpha \varepsilon^{3v} =$	$\alpha \varepsilon^5$	$\beta \varepsilon^6$	$\gamma \varepsilon^4$	$\gamma \varepsilon^3$	$\beta \varepsilon$	$\alpha \varepsilon^2$	0	

donde:

$$\omega f_0 = f_0$$

$$\omega f_1 = \varepsilon^3(\alpha - k\gamma)x_1^2 + \varepsilon^6(\gamma - k\beta)x_2^2 + \varepsilon^5(\beta - k\alpha)x_3^2 \\ + \varepsilon^3[2\gamma - k\beta(\varepsilon^2 + \varepsilon^5)]x_2x_3 + \varepsilon^6[2\beta - k\alpha(\varepsilon^3 + \varepsilon^4)]x_3x_1 + \varepsilon^5[2\alpha - k\gamma(\varepsilon + \varepsilon^6)]x_1x_2,$$

$$\omega f_3 = \varepsilon(\gamma - k\beta)x_1^2 + \varepsilon^2(\beta - k\alpha)x_2^2 + \varepsilon^4(\alpha - k\gamma)x_3^2 \\ + \varepsilon^3[2\gamma - k\beta(\varepsilon^2 + \varepsilon^5)]x_2x_3 + \varepsilon^6[2\beta - k\alpha(\varepsilon^3 + \varepsilon^4)]x_3x_1 + \varepsilon^5[2\alpha - k\gamma(\varepsilon + \varepsilon^6)]x_1x_2.$$

Se in queste formole si cambia ε con ε^2 e nel tempo stesso su α , β , γ si fa la permutazione $(\alpha \beta \gamma)$ si deduce ωf_2 da ωf_1 ed ωf_6 da ωf_3 , se poi si cambia ε con ε^4 e nel tempo stesso su α , β , γ si fa la permutazione $(\alpha \gamma \beta)$ si deduce ωf_4 da ωf_1 e ωf_5 da ωf_3 . Intanto per i valori di α , β , γ si ha:

$$\alpha - k\gamma = \varepsilon^6, \quad \beta - k\alpha = \varepsilon^3, \quad \gamma - k\beta = \varepsilon^5,$$

$$2\alpha - k\gamma(\varepsilon + \varepsilon^6) = -k\varepsilon^4, \quad 2\gamma - k\beta(\varepsilon^2 + \varepsilon^5) = -k\varepsilon, \quad 2\beta - k\alpha(\varepsilon^3 + \varepsilon^4) = -k\varepsilon^2,$$

quindi, sostituendo nelle espressioni sopra trovate di ωf_v , si deduce:

$$(6) \quad \omega f_0 = f_0, \quad \omega f_1 = f_1, \quad \omega f_2 = f_4, \quad \omega f_3 = f_3, \quad \omega f_4 = f_2, \quad \omega f_5 = f_6, \quad \omega f_6 = f_5,$$

cioè la collineazione ω produce nelle sette coniche f_v la permutazione di 2° ordine (24)(56), che denoteremo ancora con ω .

³⁾ Cfr. WEBER, l. c.

Il gruppo G_{168} di collineazioni produce dunque nelle sette coniche f_v un gruppo di 168 permutazioni generato dalle due:

$$\tau = (0123456), \quad \omega = (24)(56).$$

La collineazione di 3° ordine $\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dà, come subito si vede,

$$(7) \quad \chi f_0 = f_1, \chi f_1 = f_2, \chi f_2 = f_4, \chi f_3 = f_6, \chi f_4 = f_1, \chi f_5 = f_3, \chi f_6 = f_5,$$

cioè la permutazione $\chi = (124)(365)$.

Introducendo ancora con WEBER l'operazione di 4° ordine $\theta = \tau \omega \tau^{-1} \omega$ si ha:

$$\theta = (13)(2465).$$

Facilmente si vede che le relazioni $\chi = \tau^2 \theta \tau^3 \omega$ e le altre cui debbono soddisfare i quattro elementi $\tau, \omega, \chi, \theta$ perchè generino un gruppo G_{168} sono soddisfatte. Pertanto le operazioni di questo gruppo sono date da:

$$\tau^p \chi^\lambda \omega^\mu \theta^\nu \quad \begin{cases} p = 0, 1, \dots, 6 \\ \lambda = 0, 1, 2; \mu = 0, 1; \nu = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

In particolare le operazioni $\chi^\lambda \omega^\mu \theta^\nu$ costituiscono un gruppo ottaedrico, precisamente quello per cui è invariante la conica f_0 .

§ 5.

Invarianti simultanei.

Tra le sette forme quadratiche f_v ha luogo la relazione identica:

$$(8) \quad \sum f_v = f_0 + f_1 + \dots + f_6 = 0;$$

così pure si ha identicamente:

$$(8') \quad \sum \varphi_v = 0, \quad \sum f'_v = 0, \quad \sum \varphi'_v = 0.$$

Calcoliamo ora gl'invarianti simultanei delle forme quadratiche f_v . Se si considerano tre forme quadratiche:

$$a_x^2 = a_{11}x_1^2 + \dots + 2a_{23}x_2x_3 + \dots$$

$$b_x^2 = b_{11}x_1^2 + \dots + 2b_{23}x_2x_3 + \dots$$

$$c_x^2 = c_{11}x_1^2 + \dots + 2c_{23}x_2x_3 + \dots$$

si ha l'invariante espresso simbolicamente da:

$$(abc)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

che sviluppato dà:

$$(A) \quad a_{11}(b_{22}c_{33} - 2b_{23}c_{23} + b_{33}c_{22}) + \dots + 2a_{23}(b_{12}c_{13} - c_{11}b_{23} - b_{11}c_{23} + b_{13}c_{12}) + \dots$$

Delle tre forme quadratiche due possono essere uguali, e anche possono essere uguali tutte e tre. Denoteremo con A_{ijk} l'invariante così definito per le tre forme f_i, f_j, f_k . Se i tre indici sono uguali, l'invariante A_{iii} è uguale a sei volte il discriminante di f_i :

$$(9) \quad A_{iii} = 3(6 - k) \quad (i = 0, 1, \dots, 6).$$

Se due indici sono uguali, l'invariante A_{iik} è un invariante simultaneo delle due forme f_i, f_k .

Osserviamo che il gruppo di permutazione G_{168} è doppiamente transitivo; infatti applicando agl'indici 0, 1 le 42 operazioni $\omega^\alpha \chi^\beta \tau^\gamma$ ($\alpha = 0, 1; \beta = 0, 1, 2; \gamma = 0, 1, \dots, 6$) si hanno le 42 disposizioni due a due dei sette indici 0, 1, ..., 6. Concludiamo: i 42 invarianti A_{iik} sono tutti uguali; basta calcolare il valore di uno di essi, per es. A_{001} , con la formola (A) e si ha:

$$(10) \quad A_{001} = A_{002} = \dots = A_{110} = \dots = A_{665} = \frac{1}{2}(k - 6).$$

Veniamo ora agl'invarianti simultanei A_{ijk} delle forme prese tre a tre. Se si considera la terna di indici 0, 1, 3 e ad essa si applicano le operazioni τ^α , si ottengono le sette terne

$$(a) \quad 013, 124, 235, 346, 450, 561, 602.$$

Applicando poi a questa la ω si ottengono (in altro ordine) le stesse terne; siccome la τ e la ω generano tutto il gruppo G_{168} , così si conclude che applicando tutte le operazioni di G_{168} sulle terne (a) queste si permutano tra loro; si conclude inoltre che le terne di forme corrispondenti a queste terne di indici hanno gli stessi invarianti simultanei; calcolando questo invariante per una terna (per es. A_{013}) con la formola (A) si ha dunque:

$$(11) \quad A_{013} = A_{124} = A_{235} = A_{346} = A_{450} = A_{561} = A_{602} = 4(k + 1).$$

Consideriamo ora una terna diversa dalle (a), per es. la 012; applicando a questa le 28 operazioni $\tau^\alpha, \omega \tau^\alpha, \tau \omega \tau^\alpha, \omega \tau \omega \tau^\alpha$, si ottengono 28 terne diverse:

$$(b) \quad \begin{cases} 012, 123, 234, 345, 456, 560, 601, \\ 014, 125, 236, 340, 451, 562, 603, \\ 143, 254, 365, 406, 510, 621, 032, \\ 146, 250, 361, 402, 513, 624, 035, \end{cases}$$

che sono diverse dalle (a) e che insieme con le (a) formano le 35 combinazioni tre a tre degli indici 0, 1, ..., 6.

Si conclude che gl'invarianti A_{ijk} che hanno per indici le terne (b) sono uguali tra loro; calcolando A_{012} si trova $A_{012} = \frac{1}{4}(2 - 5k)$, dunque:

$$(12) \quad A_{012} = A_{123} = \dots = A_{624} = A_{035} = \frac{1}{4}(2 - 5k).$$

§ 6.

Le coniche del piano.

Dalle equazioni (1) si ricava facilmente:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = -\frac{1}{7}(f_0 + \varepsilon^5 f_1 + \varepsilon^3 f_2 + \varepsilon f_3 + \varepsilon^6 f_4 + \varepsilon^4 f_5 + \varepsilon^2 f_6) \\ x_2^2 = -\frac{1}{7}(f_0 + \varepsilon^3 f_1 + \varepsilon^6 f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon^5 f_4 + \varepsilon f_5 + \varepsilon^4 f_6) \\ x_3^2 = -\frac{1}{7}(f_0 + \varepsilon^6 f_1 + \varepsilon^5 f_2 + \varepsilon^4 f_3 + \varepsilon^3 f_4 + \varepsilon^2 f_5 + \varepsilon f_6) \\ x_2 x_3 = \frac{k-1}{14}(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \varepsilon^4 f_4 + \varepsilon^5 f_5 + \varepsilon^6 f_6) \\ x_3 x_1 = \frac{k-1}{14}(f_0 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2 + \varepsilon^6 f_3 + \varepsilon f_4 + \varepsilon^3 f_5 + \varepsilon^5 f_6) \\ x_1 x_2 = \frac{k-1}{14}(f_0 + \varepsilon^4 f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^5 f_3 + \varepsilon^2 f_4 + \varepsilon^6 f_5 + \varepsilon^3 f_6) \end{array} \right.$$

e similmente dalle (3) si ricavano $u_1^2, \dots, u_2 u_3, \dots$ come funzioni lineari delle φ_v : espressioni che si ottengono dalle precedenti scambiando f_v con φ_v , ε con ε^6 , k con k' .

In virtù di queste formole è facile esprimere l'equazione di una conica qualunque del piano in coordinate di punti come combinazione lineare delle f_v :

$$(14) \quad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_5 f_5 + \lambda_6 f_6 = 0$$

ed in coordinate di rette come combinazione lineare delle φ_v :

$$(15) \quad l_0 \varphi_0 + l_1 \varphi_1 + \dots + l_5 \varphi_5 + l_6 \varphi_6 = 0.$$

Anzi si può sempre giovarsi delle identità $\sum f_v = 0$, $\sum \varphi_v = 0$ in modo che nell'equazione (14) o nella (15) risulti nulla la somma dei coefficienti λ , oppure dei coefficienti l .

Infatti, se $\sum \lambda_v = \lambda \neq 0$, all'equazione (14) si può sostituire la seguente:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_6 f_6 + \rho(f_0 + f_1 + \dots + f_6) = 0$$

qualunque sia ρ , ossia: $\sum_0^6 \mu_v f_v = 0$, essendo $\mu_v = \lambda_v + \rho$; assumendo $\rho = -\frac{\lambda}{7}$, risulterà $\sum \mu_v = 0$.

Similmente, quando $\sum l_v = l \neq 0$, la (15) si può scrivere $\sum m_v \varphi_v = 0$; assumendo $m_v = l_v - \frac{l}{7}$ si avrà $\sum m_v = 0$.

In particolare, facendo uso delle (13) le f_v definite dalle (2) si esprimono linearmente nelle f come segue:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} f'_0 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_0 + f_3 + f_5 + f_6) - 2(f_1 + f_4 + f_4) \right] = \frac{k-1}{2} (f_1 + f_2 + f_4) \\ f'_1 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_1 + f_4 + f_6 + f_0) - 2(f_2 + f_3 + f_5) \right] = \frac{k-1}{2} (f_2 + f_3 + f_5) \\ f'_2 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_2 + f_5 + f_0 + f_1) - 2(f_3 + f_4 + f_6) \right] = \frac{k-1}{2} (f_3 + f_4 + f_6) \\ f'_3 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_3 + f_6 + f_1 + f_2) - 2(f_4 + f_5 + f_0) \right] = \frac{k-1}{2} (f_4 + f_5 + f_0) \\ f'_4 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_4 + f_0 + f_2 + f_3) - 2(f_5 + f_6 + f_1) \right] = \frac{k-1}{2} (f_5 + f_6 + f_1) \\ f'_5 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_5 + f_1 + f_3 + f_4) - 2(f_6 + f_0 + f_2) \right] = \frac{k-1}{2} (f_6 + f_0 + f_2) \\ f'_6 &= \frac{1-k}{7} \left[\frac{3}{2} (f_6 + f_2 + f_4 + f_5) - 2(f_0 + f_1 + f_4) \right] = \frac{k-1}{2} (f_0 + f_1 + f_3). \end{aligned} \right.$$

Si vede allora facilmente, mediante le (5), (6), (7), che le collineazioni τ , ω , χ , θ producono nelle forme f'_v le permutazioni seguenti:

$$(17) \quad \begin{cases} \tau' = (0' 1' 2' 3' 4' 5' 6'), & \omega' = (1' 2')(3' 5'), \\ \chi' = (1' 2' 4')(3' 6' 5'), & \theta' = (3' 5')(0' 2' 4' 1'). \end{cases}$$

§ 7.

Il discriminante di una conica qualunque del piano.

Vogliasi calcolare il discriminante d'una conica qualunque del piano, data mediante l'equazione (14), posto che tra i coefficienti λ passi la relazione

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_6 = 0.$$

Denotando con $\Delta(\lambda)$ il sestuplo del discriminante cercato si ha:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (cc'c'')^2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma \\ &= A_{000} \lambda_0^3 + \dots + A_{666} \lambda_6^3 + 3 A_{001} \lambda_0^2 \lambda_1 + \dots + 3 A_{665} \lambda_6^2 \lambda_5 \\ &\quad + 6 A_{012} \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + \dots + 6 A_{456} \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6. \end{aligned}$$

Pongasi:

$$S_1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_5 + \lambda_6 = 0,$$

$$S_2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_5^2 + \lambda_6^2,$$

$$S_3 = \lambda_0^3 + \lambda_1^3 + \dots + \lambda_5^3 + \lambda_6^3,$$

$$S_{12} = \lambda_0^2 \lambda_1 + \lambda_0^2 \lambda_1 + \dots + \lambda_6^2 \lambda_5,$$

$$T = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_6 + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_0 + \lambda_5 \lambda_6 \lambda_1 + \lambda_6 \lambda_0 \lambda_2,$$

$$T' = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_6 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_0 \lambda_3 \lambda_5;$$

T' è la somma dei prodotti delle λ corrispondenti alle 28 combinazioni degli indici del

quadro (b). Per i valori sopra trovati degli invarianti A_{ijk} si ha:

$$\Delta(\lambda) = 3 S_3(6 - k) + \frac{3}{2} S_{21}(k - 6) + 24 T(k + 1) + \frac{3}{2} T'(2 - 5k).$$

Nel nostro caso si ha:

$S_1 = 0$ e quindi $S_{21} = -S_3 = -3(T + T')$,
dove si deduce:

$$\Delta(\lambda) = 7(4 - k)S_3 + \frac{21}{2}(2 + 3k)T,$$

o meglio moltiplicando per $\frac{3+k}{49}$ e riducendo:

$$(18) \quad \frac{3+k}{49} \Delta(\lambda) = 2S_3 + 3kT.$$

§ 8.

Relazioni tra i parametri λ_v e i parametri l_v .

Vogliamo ora trovare le relazioni che legano i parametri λ_v e i parametri l_v affinché le equazioni (14) e (15) rappresentino una stessa conica in coordinate di punti ed in coordinate di rette, supposto sempre $\sum l_v = 0$, $\sum \lambda_v = 0$.

A questo scopo si considerino due forme quadratiche:

$$a_x^2 = a_{11}x_1^2 + \dots + 2a_{23}x_2x_3 + \dots$$

$$b_x^2 = b_{11}x_1^2 + \dots + 2b_{23}x_2x_3 + \dots$$

ed il loro controvariante di 2^a classe:

$$(B) (abu)_2 = (a_{22}b_{33} - 2a_{23}b_{23} + a_{33}b_{22})u_1^2 + \dots + 2(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} - a_{11}b_{23} - b_{11}a_{23})u_1u_2 + \dots;$$

se la seconda forma coincide con la prima il contravariante $(abu)_2$ si riduce al doppio della sua forma aggiunta; pertanto si ha:

$$(19) \quad (f_v f_v u)_2 = \frac{1}{2}(6 - k)\varphi_v = \frac{1}{6}A_{vvv}\varphi_v.$$

Passiamo ora ad esprimere linearmente nelle φ_v il contravariante $(f_h f_k u)_2$; a questo scopo poniamo:

$$(20) \quad (f_h f_k u)_2 = \sum_v \theta_v \varphi_v$$

e cerchiamo di determinare i coefficienti θ_v . Tenendo presenti le (A) e (B) si vede che se in $(f_h f_k u)_2$ al posto di $u_\alpha u_\beta$ scriviamo il coefficiente di $x_\alpha x_\beta$ preso da f_l , $(f_h f_k u)_2$ diventa A_{hkl} , facendo la stessa sostituzione in φ_v per la (19) φ_v diventa $\frac{2}{6-k}A_{vvv}$; dunque si trae:

$$(21) \quad \frac{1}{2}(6 - k)A_{hkl} = \sum_v \theta_v A_{vvv}.$$

Si hanno così sette equazioni lineari nelle θ_v per $l=0, 1, \dots, 6$. Orbene, essendo per le (9) e (10)

$$A_{vvv} = \begin{cases} \frac{1}{2}(k - 6) & \text{se } v \neq l \\ 3(6 - k) & \text{se } v = l \end{cases}$$

posto $\theta = \sum \theta_v$, le equazioni precedenti si possono scrivere:

$$(22) \quad A_{kkl} - 7\theta_l + \theta = 0 \quad (l=0, 1, \dots, 6).$$

Sommandole e tenendo presente la relazione facile a verificare $\sum_l A_{kkl} = 0$ si vede che la somma dei primi membri delle (22) è identicamente nulla, quindi alle equazioni (22) si può aggiungere per determinare le θ_v la condizione $\sum \theta_v (= \theta) = 0$ così otteniamo i valori $\theta_v = \frac{1}{7} A_{hkv}$ e la formola cercata

$$(22)^{\text{bis}}) \quad (f_h f_k u)_2 = \frac{1}{7} \sum_v A_{hkv} \varphi_v.$$

E ora calcoliamo il contravariante (B) ponendo che le due forme a_x^2 e b_x^2 coincidano con la forma (14); abbiamo:

$$(C C' u) = \sum_{hk} (f_h f_k u)_2 \lambda_h \lambda_k = \lambda_0^2 (f_0 f_0 u)_2 + \dots + 2\lambda_0 \lambda_1 (f_0 f_1 u)_2 + \dots,$$

dove, tenendo presenti le (19), (22) e insieme la identità

$$\frac{1}{6} A_{vvv} \varphi_v = \frac{1}{7} \sum_{hk} A_{vvh} \varphi_h,$$

si ricava:

$$7(C C' u)_2 = \sum_{hki} A_{hki} \lambda_h \lambda_k \varphi_i,$$

dove il segno sommatorio è esteso a tutte le disposizioni ternarie (anche con ripetizione) hki degli indici 0, 1, ..., 6.

Ora $(C C' u)_2 = 0$ è l'equazione in coordinate di rette della conica che ha per equazione in coordinate di punti $C = 0$; dunque le equazioni (14) e (15) rappresentano una stessa conica in coordinate di punti e in coordinate di rette, quando si ha:

$$(23) \quad l_i = \frac{1}{7} \sum_{hk} A_{hki} \lambda_h \lambda_k = \frac{1}{7} \frac{\partial \Delta(\lambda)}{\partial \lambda_i};$$

per la relazione $\sum_i A_{hki} = 0$ si vede subito che le l_i soddisfano alla condizione $\sum l_i = 0$.

§ 9.

Nuove coordinate di un punto e di una retta.

L'equazione $(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 = 0$, fissate le u , rappresenta una conica luogo degenerata in una retta doppia di coordinate u_1, u_2, u_3 ; si potrà mettere quindi sotto la forma:

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_6 f_6.$$

Ed inverso se moltiplichiamo le (13) ordinatamente per $u_1^2, u_2^2, u_3^2, 2u_2 u_3, 2u_3 u_1, 2u_1 u_2$ e sommiamo, tenendo presenti le (2) insieme con $k-1 = k'$ si ha subito:

$$(24) \quad 7u_x^2 = \varphi_0 f_0 + \varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_6 f_6.$$

È questa una semplice ed importante relazione tra le forme f_v e le loro forme aggiunte φ_v . A questo punto sorge l'idea di assumere come coordinate di un punto o di una retta i valori che pigliano le forme f o le forme φ quando in esse al posto

delle x o delle u si pongano le coordinate solite proiettive di quel punto o di quella retta. L'annullarsi della (24), cioè $\sum \varphi_v f_v = 0$, è la condizione perchè si appartengano un punto dato per le nuove coordinate f ed una retta data per le nuove coordinate φ .

Se nella (14) si pongono i parametri λ uguali alle nuove coordinate φ di una retta e si fanno variare le x contenute nelle f , la (14) rappresenta in coordinate proiettive la retta (come retta doppia); e se nella (15) si pongono i parametri l uguali alle nuove coordinate f e si fanno variare le u contenute nelle φ , la (15) rappresenta in coordinate proiettive il punto (come punto doppio).

Le nuove coordinate del punto o della retta sono omogenee, sono sette numeri che subiscono un gruppo G_{168} di permutazioni quando su quel punto o su quella retta si applicano le collineazioni del nostro gruppo. In virtù delle relazioni identiche $\sum f_v = 0$, $\sum \varphi_v = 0$ i sette numeri che fanno da nuove coordinate per un punto o per una retta hanno per somma sempre zero. Tra essi passano inoltre relazioni quadratiche che si potrebbero dedurre dalle (13) e analoghe esprimendo che

$$x_\alpha^2 x_\beta^2 = (x_\alpha x_\beta)^2, \quad (x_\alpha x_\gamma)(x_\alpha x_\beta) = x_\alpha^2 x_\beta x_\gamma;$$

ma queste relazioni quadratiche si ottengono in modo più semplice ed elegante come segue. Abbiamo visto che se in $C = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_6 f_6$ poniamo φ_v in luogo di λ_v , per la (24) C diventa un quadrato e quindi la forma aggiunta di C è identicamente nulla. Tenendo presente l'identità $\sum \varphi_v = 0$, segue $l_0 = l_1 = \dots = l_6$; siccome inoltre le l_v date dalle (22) hanno per somma zero, così si conclude che quando al posto delle λ si pongono le φ , le espressioni delle l_v date dalle (23) sono identicamente nulle. Quindi si deducono le sette relazioni quadratiche seguenti tra le φ_i :

$$(25) \quad \sum_{hk} A_{hki} \varphi_h \varphi_k = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 6).$$

A queste si può dare una forma più semplice, sostituendo ad A_{hki} i loro valori, e tenendo conto che $\sum \varphi_i = 0$.

Del resto possiamo fare uso della (18) dove al posto delle λ_v si pongono le φ_v e derivarle rispetto a $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_6$; queste derivate per le (23) sono le l_v che nel nostro caso sono uguali tra loro. Abbiamo dunque:

$$(26) \quad \begin{cases} 2\varphi_0^2 + k(\varphi_1\varphi_3 + \varphi_4\varphi_5 + \varphi_2\varphi_6) = 2\varphi_1^2 + k(\varphi_2\varphi_4 + \varphi_5\varphi_6 + \varphi_3\varphi_0) \\ = 2\varphi_2^2 + k(\varphi_3\varphi_5 + \varphi_6\varphi_0 + \varphi_4\varphi_1) = 2\varphi_3^2 + k(\varphi_4\varphi_6 + \varphi_0\varphi_1 + \varphi_5\varphi_2) \\ = 2\varphi_4^2 + k(\varphi_5\varphi_0 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_6\varphi_3) = 2\varphi_5^2 + k(\varphi_6\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3 + \varphi_0\varphi_4) \\ = 2\varphi_6^2 + k(\varphi_0\varphi_2 + \varphi_3\varphi_4 + \varphi_1\varphi_5) = \frac{1}{14}(4 - k)s_2; \end{cases}$$

abbiamo posto $s_2 = \varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_6^2$, e abbiamo scritto come ultimo membro ciò che si ottiene dividendo per 7 la somma dei precedenti, i quali come si osserva si ottengono l'uno dall'altro applicando la permutazione τ . Designando con t la somma

$$t = \varphi_0\varphi_1\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\varphi_4 + \varphi_2\varphi_3\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4\varphi_6 + \varphi_4\varphi_5\varphi_0 + \varphi_5\varphi_6\varphi_1 + \varphi_6\varphi_0\varphi_2$$

e con t_v la sua derivata rispetto a φ_v le relazioni quadratiche precedenti si possono compendiare:

$$(27) \quad 2\varphi_v^2 + k t_v + \frac{1}{14}(k - 4)s_2 = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, 6).$$

In queste equazioni si trasformano appunto le (25) quando si pongano per A_{hki} i loro valori. Osserviamo ancora che se in $\Delta(\lambda)$ poniamo $\lambda_v = \varphi_v$, $\Delta(\lambda)$ si annulla identicamente, perchè $\sum \varphi_v f_v$ è un quadrato esatto.

Dunque si ha:

$$(28) \quad 2(\varphi_0^3 + \varphi_1^3 + \dots + \varphi_6^3) + 3kt = 0;$$

questa è una relazione di 3° grado tra le φ che, come si vede facilmente, è conseguenza delle (26). In modo analogo si ottengono le relazioni quadratiche che passano tra le f_v ; esse si possono scrivere senz'altro deducendole dalle (26) col cambiare φ_v in f_v e k in k' , moltiplicando poi tutti i membri per $\frac{k}{2}$ si ha:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} kf_0^2 + f_1f_3 + f_4f_5 + f_2f_6 &= kf_1^2 + f_2f_4 + f_5f_6 + f_3f_0 = kf_2^2 + f_3f_5 + f_4f_1 \\ &= kf_3^2 + f_4f_6 + f_0f_1 + f_5f_2 = kf_4^2 + f_5f_0 + f_1f_2 + f_6f_3 = kf_5^2 + f_6f_1 + f_2f_3 + f_0f_4 \\ &= kf_6^2 + f_0f_2 + f_3f_4 + f_1f_5 = \frac{2k-1}{14} S_2, \text{ posto } S_2 = f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_6^2. \end{aligned} \right.$$

Similmente alla (28) si ha tra le f la relazione di 3° grado:

$$(30) \quad 2(f_0^3 + f_1^3 + \dots + f_6^3) + 3k'T = 0,$$

essendo T l'analoga della t , cioè: $T = f_0f_1f_3 + \dots + f_6f_2f_0$.

Inversamente, date le nuove coordinate f_v di un punto, che sono in ogni caso sette numeri che soddisfanno alla $\sum f_v = 0$ ed alle relazioni (29), si deducono subito le coordinate proiettive x_1, x_2, x_3 ricorrendo alle relazioni (13) e osservando che

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1^2 : x_1x_2 : x_1x_3 = x_2x_1 : x_2^2 : x_2x_3 = x_3x_1 : x_3x_2 : x_3^2.$$

§ 10.

Coordinate dei poli delle collineazioni di G_{168} .

Interessa conoscere i valori delle nuove coordinate f_v nei poli delle collineazioni del gruppo G_{168} . Basterà a questo scopo considerare le collineazioni $\tau, \chi, \omega, \theta$ che sono i tipi delle collineazioni dei diversi ordini.

Se K è un punto unito della collineazione τ , le sue coordinate f_v sono proporzionali alle coordinate del punto τK che si deducono applicando alle f_v la permutazione τ ; cioè:

$$f_0 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 : f_6 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 : f_6 : f_0.$$

Posto $f_0 = 1$, $f_1 = \sigma$ si deduce:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \sigma, \quad f_2 = \sigma^2, \quad f_3 = \sigma^3, \quad f_4 = \sigma^4, \quad f_5 = \sigma^5, \quad f_6 = \sigma^6, \quad f_0 = \sigma^7$$

e quindi $\sigma^7 = 1$. Si esclude il valore $\sigma = 1$, perchè per esso $\sum f_v \neq 0$, bisogna dunque assumere per σ una delle radici settime immaginarie dell'unità.

Applicando le (29) dev'essere: $k + \sigma + \sigma^2 + \sigma^4 = 0$, donde si vede che i valori possibili di σ sono $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4$.

Dunque per i tre punti uniti di τ le coordinate f_0, f_1, \dots, f_6 hanno ordinatamente

i seguenti valori:

$$(31) \quad \begin{cases} 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & \varepsilon^3, & \varepsilon^4, & \varepsilon^5, & \varepsilon^6 \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon^4, & \varepsilon^6, & \varepsilon, & \varepsilon^3, & \varepsilon^5 \\ 1 & \varepsilon^4, & \varepsilon, & \varepsilon^5, & \varepsilon^2, & \varepsilon^6, & \varepsilon^3. \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nelle (13) si vede subito che questi tre punti sono i punti fondamentali del triangolo delle coordinate proiettive, come sapevamo.

Si osserva che, applicando la collineazione χ , i detti tre punti si permutano circolarmente. Applicando alle coordinate scritte in una linea delle (31) le permutazioni del gruppo G_{168} , si trovano le coordinate dei 24 poli settupli, che chiameremo generalmente punti K e che si distribuiscono in 8 terne, essendo i punti di una terna punti uniti delle collineazioni d'un gruppo ciclico di 7° ordine.

Consideriamo ora la collineazione χ che produce la permutazione di 3° ordine (124)(365). Siccome la χ trasforma in sè la conica $f_0 = 0$, così dei tre punti uniti di χ due, P_1, P_2 , stanno sulla conica $f_0 = 0$ ed il terzo, Q , cade fuori. Intanto per i punti uniti di χ si ha:

$$f_0 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 : f_6 = f_0 : f_2 : f_4 : f_6 : f_1 : f_3 : f_5;$$

nel punto Q essendo $f_0 \neq 0$ si deduce $f_1 = f_2 = f_4, f_3 = f_5 = f_6$, quindi, posto $f_0 = 1, f_1 = x, f_3 = y$, si ricava dalle (29) $k + 3xy = (k+1)x^2 + y^2 + y = ky^2 + 2xy + x$ da tenersi presente insieme con $3x + 3y + 1 = 0$. Si trae $x = \frac{1}{6}(k+2), y = -\frac{1}{6}(k+4)$, dunque le coordinate del punto Q sono:

$$(32) \quad 1, \frac{1}{6}(k+2), \frac{1}{6}(k+2), -\frac{1}{6}(k+4), \frac{1}{6}(k+2), -\frac{1}{6}(k+4), -\frac{1}{6}(k+4).$$

Nei punti P_1, P_2 si ha $f_0 = 0$; posto $f_1 = 1, f_2 = \rho, f_3 = x$, si ha dalla proporzione superiore: $f_1 = 1, f_2 = \rho, f_4 = \rho^2, f_3 = x, f_6 = \rho x, f_5 = \rho^2 x$, con $\rho^3 = 1$.

Prendendo $\rho = 1$, dalla somma $f_v = 0$ si ricaverebbe $x = -1$, ma allora le (29) non sono soddisfatte.

Se poi ρ è una radice cubica immaginaria dell'unità si ha dalle (29):

$$0 = 1 + k + x^2 = kx^2 + 2x,$$

donde $x = -k'$; dunque, posto $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, le coordinate dei punti P_1, P_2 sono:

$$(33) \quad \begin{cases} 0, & 1, & \rho, & -k', & \rho^2, & -k'\rho, & -k'\rho^2 \\ 0 & 1, & \rho^2, & -k', & \rho, & -k'\rho^2, & -k'\rho. \end{cases}$$

Si osserva che con la collineazione ω i punti P_1, P_2 si permutano tra loro. Corrispondentemente ai 28 sottogruppi ciclici G_3 che si trovano in G_{168} vi sono 28 punti che si ottengono da Q con le collineazioni del gruppo G_{168} e 56 punti che si ottengono da P_1 con le medesime. Passiamo ora ai punti uniti della collineazione θ che produce la permutazione di 4° ordine (13)(2465). Siccome θ trasforma in sè la conica $f_0 = 0$, così dei tre punti uniti di θ ve ne sono due, V_1 e V_2 , che stanno nella f_0 ed uno, U , fuori di essa. Per i punti uniti di θ si ha:

$$f_0 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 : f_6 = f_0 : f_3 : f_4 : f_1 : f_6 : f_2 : f_5.$$

Nel punto U essendo $f_0 \neq 0$ si deduce $f_1 = f_3, f_2 = f_4 = f_5 = f_6$. Pongasi $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = y$; dalle (29) si ricava:

$$k + x^2 + 2y^2 = kx^2 + 2y^2 + x = ky^2 + 2xy + y$$

da tenersi presente insieme con $2x + 4y + 1 = 0$. Si trae:

$$x = \frac{1}{2}(k - 2), \quad y = -\frac{1}{4}(k + 1);$$

dunque le coordinate del punto U sono:

$$(34) \quad 1, \frac{1}{2}(k-2), -\frac{1}{4}(k-1), \frac{1}{2}(k-2), -\frac{1}{4}(k-1), -\frac{1}{4}(k-1), -\frac{1}{4}(k-1).$$

Nei punti V_1, V_2 si ha $f_0 = 1$; posto $f_1 = 1, f_3 = \sigma, f_2 = y$, dalla proporzione superiore si ricava: $\sigma^2 = 1, f_4 = \sigma y, f_5 = \sigma^2 y = f_6 = y$. Prendendo $\sigma = 1$ dalla $\sum f_v = 0$ si ricaverebbe $y = -\frac{1}{2}$ ma allora le (29) non sono soddisfatte. Prendendo invece $\sigma = -1$, dalle (29) si trae: $-1 + 2y^2 = k - 2y^2 = ky^2$; donde $y^2 = \frac{1}{4}(1 + k)$ e quindi $y = \pm i \frac{k'}{2}$. Le coordinate dei punti V_1, V_2 sono dunque:

$$(35) \quad 0, 1, \pm i \frac{k'}{2}, -1, \mp i \frac{k'}{2}, \mp i \frac{k'}{2}, \pm i \frac{k'}{2}.$$

Si osserva che con la collineazione ω i punti V_1, V_2 si permutano fra loro. Corrispondentemente a 21 gruppi ciclici G_4 che si trovano in G_{168} vi sono 21 punti uniti che si ottengono da U e 42 che si ottengono da V_1 con le collineazioni di G_{168} .

§ 11.

La configurazione del gruppo G_{168} .

La collineazione θ^2 è un'omologia armonica che ha per centro il punto U e per asse la retta $V_1 V_2$ che chiameremo u . Le coordinate φ_v di questa retta si ottengono dai valori (34) scambiando ivi k con k' e sono:

$$(36) \quad 1, -\frac{1}{2}(k+1), -\frac{1}{4}k, -\frac{1}{2}(k+1), \frac{1}{4}k, \frac{1}{4}k, \frac{1}{4}k.$$

È verificata come dev'essere la condizione $\sum \varphi_v f_v = 0$ quando si pongano per φ_v i valori ora ottenuti (36) e per f_v i valori (35). Chiameremo genericamente punti U e rette u i 21 centri e i 21 assi delle omologie contenute in G_{168} , i quali punti e rette hanno le coordinate che si ottengono applicando ai valori (34), (36) le permutazioni del gruppo. Osserviamo che, se sopra i valori (34), (36) si applicano le operazioni $\omega^\alpha \tau^\beta$ ($\alpha = 0, 1, \beta = 0, 1, 2, 3$), quei valori si riproducono nello stesso ordine, perchè ciò avviene separatamente per le operazioni θ ed ω . Dunque le collineazioni ω, θ , generano un gruppo diedro G_8 che lascia fermo un punto U ed una retta u . Nel gruppo G_{168} vi sono 21 sottogruppi G_8 simili a quello considerato e si ottengono da esso trasformandolo con le operazioni $\tau^\alpha \chi^\beta$ ($\alpha = 0, 1, \dots, 6; \beta = 0, 1, 2$); ognuno di questi gruppi G_8 lascia fermo un punto U ed una retta u . I punti U sono punti ottupli e le rette u assi ottupli. Il gruppo G_8 produce sulle coniche del primo

sistema le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned} 1, \quad \theta &= (13)(2465), & \theta^2 &= (26)(45), & \theta^3 &= (13)(2564); \\ \omega &= (24)(56), & \omega\theta &= (13)(26); & \omega\theta^2 &= (25)(46), & \omega\theta^3 &= (13)(45). \end{aligned}$$

Si considerino le quattro omologie armoniche ω , $\omega\theta$, $\omega\theta^2$, $\omega\theta^3$; i loro assi passano per il punto U che è invariante per G_8 , e i loro centri stanno su u invariante per G_8 , ciò si vede con semplice ragionamento, del resto si verifica con facile calcolo.

I centri delle quattro omologie hanno le coordinate che si ottengono trasformando i valori (34) con le permutazioni $\tau^4\chi$, χ^2 , $\tau^6\chi^2$, χ ; hanno cioè le coordinate seguenti:

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(k-2), \quad 1, \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad \frac{1}{2}(k-2), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \\ \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{4}(k-1) \quad \text{centro di } \omega; \\ 1, \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad \frac{1}{2}(k-2), \\ \quad \frac{1}{2}(k-2), \quad -\frac{1}{4}(k-1) \quad \text{centro di } \omega\theta; \\ \frac{1}{2}(k-2), \quad \frac{1}{2}(k-2), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad 1, \quad -\frac{1}{4}(k-1), \\ \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{4}(k-1) \quad \text{centro di } \omega\theta^2; \\ 1, \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{2}(k-2), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad -\frac{1}{4}(k-1), \\ \quad -\frac{1}{4}(k-1), \quad \frac{1}{2}(k-2) \quad \text{centro di } \omega\theta^3. \end{array} \right.$$

Tra le coordinate f_v di uno qualunque di questi quattro punti e le coordinate φ_v dell'asse di θ^2 che hanno i valori (36) si verifica la relazione $\sum \varphi_v f_v = 0$. Dunque: *sopra ogni retta u giacciono quattro punti U e per ogni punto U passano quattro rette u .*

Il gruppo G_8 contiene due sottogruppi quadrimoni Γ_4 , Γ'_4 :

$$1^\circ) \quad 1, \quad \theta^2, \quad \omega, \quad \omega\theta^2; \quad 2^\circ) \quad 1, \quad \theta^2, \quad \omega\theta, \quad \omega\theta^3.$$

Consideriamo anzitutto il primo; esso lascia ferme le tre coniche f_k che hanno gli indici 0, 1, 3 e produce sulle altre quattro coniche le permutazioni (26)(45), (24)(56), (25)(46); l'asse dell'omologia θ^2 è una corda comune alle due coniche (4), (5), cioè i lati del triangolo invariante per Γ_4 sono ciascuno corda comune a due coppie di coniche prese dalla quaterna (2456).

Trasformando il gruppo Γ_4 con χ e χ^2 si riproduce lo stesso gruppo Γ_4 ; in G_{168} si hanno dunque soltanto sette sottogruppi quadrimoni simili a quello considerato, che si ottengono da esso trasformandolo con τ^α ($\alpha = 0, 1, \dots, 6$).

Applicando τ^α ai tre punti U e alle tre rette u che sono vertici e lati del triangolo invariante per uno dei gruppi quadrimoni si ottengono tutti i 21 punti U e tutte le 21 rette u , cosicchè coi 21 punti U come vertici e con le 21 rette u come lati si possono formare sette triangoli che si permutano tra loro quando si applicano le collineazioni di G_{168} . D'altra parte corrispondentemente ai sette gruppi quadrimoni suddetti si hanno da considerare sette terne di coniche:

$$(A) \quad 013, \quad 124, \quad 235, \quad 346, \quad 450, \quad 561, \quad 602;$$

e per ognuna terna la residua quaterna, cioè le sette quaterne:

$$(A) \quad 2456, \quad 3560, \quad 4601, \quad 5012, \quad 6123, \quad 0234, \quad 1345;$$

le omologie di un gruppo quadriminomio lasciano ferme le coniche di una terna, e permutano (accoppiandole nei tre modi possibili) le coniche della quaterna residua. Presa dalle sette coniche una coppia qualsiasi, essa si trova in due delle sette quaterne, dunque due qualunque delle sette coniche $f_k = 0$ sono in due modi omologico-armoniche, e due delle loro sei corde comuni sono rette u ; ogni retta u contiene quattro dei punti comuni a due coppie di coniche che costituiscono una delle sette quaterne.

Venendo ora a considerare il 2° gruppo quadriminomio Γ'_4 contenuto nel gruppo G_8 studiato sopra, potremo per esso ripetere le stesse cose che abbiamo detto per il primo, purché introduciamo nelle nostre considerazioni le coniche $f'_k = 0$ del 2° sistema invece di quelle del primo. E invero, mentre le omologie θ^2 , $\omega\theta$, $\omega\theta^3$ di Γ'_4 tengono ferma la sola conica f_0 del primo sistema, tengono ferme invece le tre coniche f'_3 , f'_5 , f'_6 del secondo, avendosi:

$$\theta^2 = (0'4')(1'2'), \quad \omega\theta = (1'4')(0'2'), \quad \omega\theta^3 = (0'1')(2'4').$$

Si ottengono sette gruppi quadriminomi simili a Γ'_4 ma non simili a Γ_4 ; corrispondentemente si ottengono sette triangoli invarianti per ciascun sottogruppo quadriminomio, i quali con i loro vertici e lati esauriscono i 21 punti U e le 21 rette u , e che sono diversi dai triangoli sopra considerati.

Abbiamo visto che la collineazione di 4° ordine θ ha due punti uniti V_1 , V_2 che stanno sulla conica $f_0 = 0$ e sull'asse di θ^2 , applicando le collineazioni χ e χ^2 la conica $f_0 = 0$ si trasforma in sè, l'asse di θ^2 si cambia come si è visto sopra negli assi delle omologie $\omega\theta$, $\omega\theta^3$; dunque le collineazioni di 4° ordine che si ottengono trasformando θ con χ e χ^2 hanno ciascuno due poli V sulla conica f_0 dove questa è incontrata dagli assi delle omologie $\omega\theta$, $\omega\theta^3$. Segue da qui che i 42 poli quadrupli V sono distribuiti sei a sei sulle sette coniche $f_v = 0$; e precisamente i sei punti V che stanno su una conica $f_k = 0$ sono i punti d'incontro di questa con i lati del triangolo invariante per quel gruppo quadriminomio Γ'_4 del 2° sistema che tiene ferma la sola conica $f_k = 0$.

Consideriamo la collineazione di 3° ordine χ ; essa ha un punto unito Q , del quale le coordinate hanno i valori (32), e altri due punti uniti P_1 , P_2 . La retta unita che congiunge questi due punti, che chiameremo retta q , ha le coordinate φ_v di cui i valori si ottengono dalle (32) cambiando k in k' e sono:

$$(38) \quad 1, \quad \frac{1}{6}(3-k), \quad \frac{1}{6}(3-k), \quad -\frac{1}{6}(5-k), \quad \frac{1}{6}(3-k), \quad -\frac{1}{6}(5-k), \quad -\frac{1}{6}(5-k).$$

Si verifica subito mediante la solita relazione $\sum \varphi_v f_v = 0$, che questa retta contiene i punti P_1 , P_2 dei quali le coordinate hanno i valori (33). Osserviamo che questi valori (38) e così pure i valori (33) si trasformano in sè nello stesso ordine quando loro si applichi la permutazione (24)(56). Dunque le collineazioni χ , ω generano un gruppo diedro G_6 che lascia fermo il punto Q e la retta q . Le operazioni di questo gruppo G_6 sono $\omega^\alpha \chi^\beta$ ($\alpha = 0, 1$; $\beta = 0, 1, 2$) e producono nelle coniche f_v le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned} 1, \quad \chi &= (124)(365), \quad \chi^2 = (142)(356), \quad \omega = (24)(56), \\ \omega\chi &= (12)(36), \quad \omega\chi^2 = (14)(35). \end{aligned}$$

Nel gruppo G_{168} vi sono 28 sottogruppi G_6 simili a quello considerato e si ottengono da esso trasformandolo con le operazioni $\tau^\alpha \theta^\beta$ ($\alpha = 0, 1, \dots, 6, \beta = 0, 1, 2, 3$). Chiameremo genericamente punti Q e rette q i punti e le rette che si ottengono applicando le operazioni $\tau^\alpha \theta^\beta$ al punto Q e alla retta q sopra considerati: si hanno dunque 28 punti Q e 28 rette q che sono poli sestupli e rette sestuple. Se si considerano le tre omologie contenute in un G_6 si vede subito che i loro assi passano per il punto Q invariante in G_6 e i loro centri stanno sulla retta q invariante per G_6 ; dunque per ogni punto Q passano tre rette u e sopra ogni retta q giacciono tre punti U ; si deduce facilmente ⁴⁾ che su ogni retta u vi sono quattro punti Q e che per ogni punto U passano quattro rette q . Abbiamo visto che la collineazione di 3° ordine χ ha due punti uniti P_1, P_2 , che stanno sulla conica f_0 , nei punti d'incontro con la retta q unita di χ . Trasformando χ con le operazioni $\theta, \theta^2, \theta^3$ si hanno altre tre collineazioni di 3° ordine che hanno ciascuna due punti uniti sulla conica f_0 nei punti d'incontro con tre rette q . Chiameremo genericamente punti P i punti che si ottengono applicando a P_1 le collineazioni del gruppo G_{168} ; i punti P poli tripli sono in numero di 56 distribuiti 8 a 8 su sette coniche $f_v = 0$.

I sottogruppi G_8 e G_6 di collineazioni che lasciano ferma una retta u o una retta q hanno le proprietà segnalate dal prof. GERBALDI ⁵⁾ in ordine alla proiettività di punti che si stabilisce su una retta.

Il gruppo G_8 produce sulla retta u un'involuzione di punti di 4° grado, e il sottogruppo G_6 produce sulla retta q un gruppo diedro di sei proiettività binarie.

Diremo equivalenti due punti che si ottengono l'uno dall'altro con una collineazione di G_{168} . Se ad un punto generico del piano si applicano le collineazioni di G_{168} , si ottengono 168 punti equivalenti. Il numero di un sistema di punti equivalenti è minore di 168 (e in tal caso è un divisore di 168) allora, e allora soltanto, quando quei punti sono poli dello stesso ordine.

Così abbiamo: a) Un sistema di 21 punti equivalenti che sono i poli ottupli U ; b) un sistema di 24 punti equivalenti che sono i poli settupli K ; c) un sistema di 28 punti equivalenti che sono i poli sestupli Q ; d) un sistema di 42 punti equivalenti che sono i poli quadrupli V ; e) un sistema di 56 punti equivalenti che sono i poli tripli P .

Oltre a questi restano ancora a considerare i poli doppi; un punto generico di una retta u è un polo doppio, perchè rimane invariato dall'omologia che ha quella retta come asse; i punti equivalenti ad un polo doppio sono 84 e stanno quattro a quattro sulle 21 rette u .

Un sistema di 84 poli doppi è costituito dai punti in cui le sette coniche $f_k = 0$ si tagliano due a due; un altro sistema di 84 poli doppi è costituito dai punti in cui si tagliano le altre sette coniche $f'_k = 0$.

È notevole la configurazione che presenta il poligono completo che ha i vertici nei

⁴⁾ Cfr. WEBER, l. c.

⁵⁾ Cfr. GERBALDI, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane* (Memoria I^a) [questi Rendiconti tomo XII (1898), pp. 23-94], § 20.

21 punti U : le rette u e le rette q formano la totalità dei suoi lati, da ogni vertice escono 8 lati (quattro rette u e quattro rette q), su ogni lato u stanno 4 vertici e su ogni lato q tre vertici; per dualità è notevole il multilatero completo che ha per lati le 21 rette u : i punti U e i punti Q formano la totalità dei vertici ⁶⁾.

Quanto abbiamo esposto considerando le coniche del primo sistema f_v , si può ripetere considerando le coniche del 2° sistema $f'_v = 0$, e tra l'altro si può concludere che: I 42 punti V stanno distribuiti sei a sei sulle sette coniche f'_v , e i 56 punti P stanno distribuiti 8 a 8 sulle sette coniche $f'_v = 0$. Dunque i punti P e V sono punti in cui coniche dell'un sistema incontrano coniche dell'altro sistema; ma c'è di più, e mi piace farlo notare, che per ogni punto P o V passano una conica dell'un sistema e una conica dell'altro sistema le quali si toccano in quel punto.

Infatti, considerando una collineazione di 3° (o di 4°) ordine col triangolo unito QP_1P_2 (ovvero UV_1V_2) esse trasformano in sè una conica $f_k = 0$ ed una conica $f'_e = 0$ le quali passano entrambe per i vertici P_1, P_2 (ovvero V_1, V_2) ed hanno ivi per tangenti i lati QP_1, QP_2 (ovvero UV_1, UV_2).

Pertanto i punti P e i punti V sono punti di contatto tra coniche $f_k = 0$ e coniche $f'_e = 0$, essi sono in numero di $56 + 42 = 98$ e contano per $98 \times 2 = 196$ intersezioni delle sette coniche $f_k = 0$ con le coniche $f'_e = 0$, ma il numero delle intersezioni delle sette coniche f_k con le coniche f'_e è $7 \times 7 \times 4 = 196$; dunque: *Ogni conica di un sistema è bitangente a ogni conica dell'altro sistema.* È questa una proprietà analoga a quella delle due sestuple di coniche che si presentano nel gruppo G_{360} ⁷⁾.

Che ogni conica del primo sistema sia bitangente a ogni conica del secondo sistema si può dimostrare in altro modo che serve di conferma ai calcoli fatti ed ha il vantaggio di far conoscere quali coppie si tocchino in punti P e quali in punti V . Partiremo dall'osservazione che se $F = 0, F' = 0$ sono in coordinate di punti le equazioni di due coniche bitangenti ed $R = 0$ è l'equazione della corda di contatto, si possono trovare due numeri α, α' tali che sia identicamente $\alpha F + \alpha' F' = R^2$ e viceversa.

Ciò posto, si consideri il gruppo G_6 generato da ω e χ , esso trasforma in sè le coniche $f_0 = 0, f'_0 = 0$ e la retta q che ha per coordinate i valori (38). Se si pone:

$$\bar{q} = f_0 + \frac{1}{6}(3 - k)(f_1 + f_2 + f_4) - \frac{1}{6}(5 - k)(f_3 + f_5 + f_6)$$

sarà \bar{q} il quadrato del primo membro dell'equazione della retta q ; per dimostrare che le coniche $f_0 = 0, f'_0 = 0$ sono bitangenti e che q è la corda di contatto, basta trovare due numeri α e α' tali che sia identicamente $\bar{q} = \alpha f_0 + \alpha' f'_0$. Se si tiene presente l'espressione (16) di f'_0 si trova facilmente $\alpha = \frac{1}{6}(11 - k)$, $\alpha' = -\frac{1}{3}(2 + 3k)$ e quindi l'identità:

$$(39) \quad \frac{1}{6}(11 - k)f_0 - \frac{1}{3}(2 + 3k)f'_0 = \bar{q}.$$

Applicando a questa identità le operazioni $\tau^\alpha \theta^\beta$ ($\alpha = 0, 1, \dots, 6, \beta = 0, 1, 2, 3$),

⁶⁾ Cfr. WEBER, l. c.

⁷⁾ Cfr. la Memoria del prof. GERBALDI, l. c., § 9.

si ottengono 28 identità, le quali provano che sono bitangenti le coppie:

$$\begin{aligned} & (00'), (11'), (22'), (33'), (44'), (55'), (66') \\ & (02'), (13'), (24'), (35'), (46'), (50'), (60') \\ & (04'), (15'), (26'), (30'), (41'), (52'), (63') \\ & (01'), (12'), (23'), (34'), (45'), (56'), (60'), \end{aligned}$$

e che corde di contatto sono le 28 rette q , cioè punti di contatto i 56 punti P .

In modo analogo, considerando il gruppo generato da ω e θ si vede che questo lascia ferme le coniche $f_0 = 0$, $f'_6 = 0$ e la retta u che ha per coordinate i valori (36); considerando la conica che si riduce a questa retta u come doppia, il primo membro della sua equazione è:

$$\bar{u} = f_0 - \frac{1}{2}(k+1)(f_1 + f_3) + \frac{1}{2}k(f_2 + f_4 + f_5 + f_6)$$

ed è facile stabilire l'identità:

$$(40) \quad \frac{1}{2}(k+3)f_0 + \frac{1}{4}(\rho k - 6)f'_0 = \bar{u}.$$

Applicando a questa le operazioni $\tau^2 \chi^\beta$ si ottengono 21 identità, le quali provano che sono bitangenti le 21 coppie:

$$\begin{aligned} & (06'), (10'), (21'), (32'), (43'), (54'), (65') \\ & (05'), (16'), (20'), (31'), (42'), (53'), (64') \\ & (03'), (14'), (25'), (36'), (40'), (51'), (62'). \end{aligned}$$

Le 21 coppie ora considerate insieme con le 28 coppie considerate prima formano tutte le 49 coppie che possono formarsi con una conica di un sistema ed una dell'altro. I poli setteppli K , i poli ottupli U , i poli sestupli Q sono fuori delle coniche dei due sistemi.

§ 12.

Sottogruppi ottaedrici.

Il sottogruppo ottaedrico $\chi^2 \omega^4 \theta^2$ che lascia ferma la conica $f_0 = 0$ produce nelle altre sei coniche un gruppo di permutazioni generato dalle $(13)(2456)$, $(124)(365)$; questo è transitivo ed imprimitivo; sistemi d'imprimitività sono: $(1, 3)$; $(2, 6)$; $(4, 5)$. Lo stesso gruppo G_{24} di collineazioni produce nelle coniche dell'altro sistema un gruppo di permutazioni generato dalle $(0' 2' 4' 1')(3' 5')$, $(1' 2' 4')(3' 6' 5')$; quest'altro gruppo di permutazioni dei sette indici $0' 1' 2' 4' 5' 6'$ è intransitivo; i quattro indici $0' 1' 2' 4'$ si permutano soltanto tra loro (e precisamente subiscono tutte le permutazioni del gruppo simmetrico) e così gli altri tre indici $3' 5' 6'$ si permutano tra loro. Tengasi presente che il gruppo ottaedrico considerato contiene tre sottogruppi G_8 dei quali uno è generato da ω e θ , gli altri due se ne deducono trasformando quello con χ e χ^2 ; contiene inoltre quattro sottogruppi G_6 dei quali uno è generato da ω e χ e gli altri tre si deducono da quello trasformandolo con $\theta, \theta^2, \theta^3$. Il gruppo G_{24} ha tre gruppi

ciclici di collineazioni di 4° ordine, i quali hanno sei punti uniti V nei punti dove la conica $f_0 = 0$ è incontrata da tre rette u, u_1, u_2 e gli altri tre punti uniti nei punti U, U_1, U_2 ; le coordinate di due dei punti V hanno i valori (35), quelle degli altri quattro punti V si deducono da essi facendo subire ai valori (35) le permutazioni χ e χ^2 ; le coordinate del punto U hanno i valori (34), le coordinate della retta u hanno i valori (36); le coordinate dei punti U_1, U_2 e delle rette u_1, u_2 si deducono nuovamente facendo subire le permutazioni χ, χ^2 ai valori (34), (36).

Il gruppo G_{24} ha quattro gruppi ciclici di collineazioni di 3° ordine, le quali hanno 8 punti uniti in 8 punti P dove la conica $f_0 = 0$ è incontrata da quattro rette q, q_1, q_2, q_3 ; hanno inoltre quattro punti Q, Q_1, Q_2, Q_3 fuori della conica; le coordinate di due di quegli 8 punti P hanno i valori (33) e le coordinate degli altri sei punti si deducono da essi facendo loro subire le permutazioni $\theta, \theta^2, \theta^3$; le coordinate della retta q e del punto Q hanno rispettivamente i valori (38), (32) e da questi con le permutazioni $\theta, \theta^2, \theta^3$ si deducono quelle delle rette q_1, q_2, q_3 e dei punti Q_1, Q_2, Q_3 . Per le proprietà note del gruppo ottaedrico di collineazioni piane si ha: I punti U, U_1, U_2 e le rette u, u_1, u_2 sono vertici e lati di uno stesso triangolo invariante per il gruppo G_{24} , questo triangolo è triangolo diagonale sia per il quadrilatero $qq_1q_2q_3$, sia per il quadrangolo $QQ_1Q_2Q_3$, ed è triangolo unito per un sottogruppo quadrinomio che è divisore normale del G_{24} ; oltre alle tre omologie di questo gruppo quadrinomio, il gruppo G_{24} contiene altre sei omologie che hanno i centri nei vertici del quadrilatero $qq_1q_2q_3$ e gli assi nei lati del quadrangolo $QQ_1Q_2Q_3$; il quadrangolo e il quadrilatero sono il primo circoscritto al secondo, l'uno polare dell'altro rispetto alla conica $f_0 = 0$.

Il gruppo ottaedrico considerato di collineazioni piane ha: Tre poli ottupli nei punti U, U_1, U_2 ; quattro poli sestupli nei punti Q, Q_1, Q_2, Q_3 ; dodici poli quadrupli, dei quali sei sono i punti V che stanno sulla conica $f_0 = 0$, e altri sei sono i punti U vertici del quadrilatero $qq_1q_2q_3$; infine ha 8 poli tripli nei punti P giacenti sulla conica $f_0 = 0$. Lo stesso gruppo ottaedrico fa nascere sulla conica $f_0 = 0$, che è per esso un invariante, un gruppo ottaedrico di proiettività binarie, per cui i sei punti V della conica rappresentano la forma sestica (ottaedro), gli 8 punti P della conica rappresentano la forma di 8° grado (esaedro) e i 12 punti d'incontro della conica con i sei lati del quadrangolo $QQ_1Q_2Q_3$ rappresentano la forma di 12° grado ⁸⁾.

Applicando le collineazioni del G_{24} , i 24 punti intersezioni della conica invariante $f_0 = 0$ con le altre sei coniche $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_6 = 0$ si permutano tra loro e però costituiscono un gruppo di 24 punti invariante per il suddetto gruppo ottaedrico binario sulla conica f_0 . Nel tempo stesso si permutano tra loro gli altri punti in cui la conica f_0 è toccata dalle quattro f'_0, f'_1, f'_2, f'_4 e si permutano tra loro i sei punti in cui la conica f_0 è toccata da f'_3, f'_5, f'_6 , perchè abbiamo visto che il gruppo G_{24} di collineazioni permuta tra loro le tre coniche f'_3, f'_5, f'_6 e permuta tra loro le quattro coniche f'_0, f'_1, f'_2, f'_4 ; dunque i punti in cui le prime tre coniche sono bitangenti alla conica f_0 sono i sei

⁸⁾ Cfr. GERBALDI, l. c.

punti V di questa e i punti in cui le altre quattro coniche sono bitangenti alla conica f_0 sono gli otto punti P di questa.

Nel gruppo G_{168} abbiamo sette gruppi ottaedrici simili al precedente che si ottengono trasformandolo con le operazioni τ^a ; ognuno di questi gruppi ottaedrici trasforma in sè una conica f_k ed insieme con questa conica trasforma in sè anche un quadrangolo e un quadrilatero completi; quello ha per vertici quattro punti Q e sei rette u , questo ha per lati quattro rette q e per vertici sei punti U , il triangolo diagonale dell'uno è anche triangolo diagonale dell'altro ed ha per vertici e lati tre punti U e tre rette u . Ognuno dei sette gruppi ottaedrici considerati permuta intransitivamente le coniche $f_v = 0$ dell'altro sistema e le divide in una terna ed in una quaterna, costituiscono le terne le tre coniche $f'_k = 0$ che toccano la conica invariante del gruppo ottaedrico nei suoi punti V e costituiscono la quaterna le quattro coniche $f'_k = 0$ che toccano la detta conica invariante nei suoi punti P . Le sette terne e quaterne con la nostra notazione sono:

$$(B) \quad \begin{cases} (3'5'6')(0'1'2'4'), & (4'6'o')(1'2'3'5'), \\ (5'o'1')(2'3'4'6'), & (6'1'2')(3'4'5'o'), \\ (o'2'3')(4'5'6'1'), & (1'3'4')(5'6'o'2'), \\ & (2'4'5')(6'o'1'3'). \end{cases}$$

Nel gruppo G_{168} oltre ai sette gruppi ottaedrici ora considerati, abbiamo altri sette sottogruppi ottaedrici G'_{24} che in G_{168} sono simili tra loro, ma non simili ai precedenti; ognuno di questi altri sottogruppi ottaedrici ha per conica invariante una conica del 2° sistema.

Quanto si è detto sopra per i gruppi G_{24} si ripete ora per i G'_{24} , scambiando tra loro i due sistemi di coniche.

Le coniche del primo sistema si dividono in sette terne e quaterne che sono precisamente le (A) (§ 11).

Corrispondentemente ai G'_{24} si possono considerare altri sette quadrangoli completi con i vertici nei punti Q e con i lati nelle rette u , e sette quadrilateri completi con i lati in rette q e i vertici in punti U .

Il sottogruppo comune a due sottogruppi G_{24} è un gruppo quadrimio Γ_4 e il sottogruppo comune a due sottogruppi G'_{24} è Γ'_4 .

Infatti le collineazioni comuni a due sottogruppi G_{24} lasciano ferme le coniche (α) e (β) e però non possono essere nè di 3° nè di 4° ordine (perchè queste spostano sei coniche) nè di 7° ordine perchè queste spostano tutte e sette le coniche, esse sono dunque omologie; ora tra le quaterne (A) ve n'è sempre una ed una sola che non contiene due indici assegnati $(\alpha\beta)$, sia $(\gamma\delta\epsilon\zeta)$; il sottogruppo comune ai due G_{24} è dunque il Γ_4 che dà le permutazioni

$$1, \quad (\gamma\delta)(\epsilon\zeta), \quad (\gamma\epsilon)(\delta\zeta), \quad (\gamma\zeta)(\delta\epsilon).$$

Tre sottogruppi G_{24} , se lasciano ferme tre coniche che costituiscono una terna (A) , hanno in comune un sottogruppo Γ_4 , altrimenti non hanno altra operazione in comune che l'identità.

In una prossima Nota tratterò del gruppo esteso di 168 correlazioni e del problema delle forme e farò vedere come dev'essere corretto un coefficiente numerico della risolvante data dal WEBER, facendo dei confronti con quella di KLEIN onde provare l'esattezza dei calcoli.

(Continua).

Palermo, 30 giugno 1907.

RICCARDO BUCCA.
