

## Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

Von

J. LÜROTH in Freiburg i./Br.

---

Die beiden Arbeiten über die gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander, die ich in den Jahrgängen 1878 und 1899 der Sitzungsberichte der Erlanger physikalisch-medizinischen Gesellschaft veröffentlichte, sind sehr kurz gehalten, und manche Beweise nicht gegeben. Ich zögerte immer mit einer ausführlicheren Darstellung, weil ich glaubte einen weiteren Spezialfall und damit vielleicht auch den allgemeinen Fall erledigen zu können. Trotz vieler Mühe, die ich mir in dieser Hinsicht gegeben habe, ist mir dies aber bis jetzt nicht geglückt. Deshalb gebe ich im folgenden eine Ausarbeitung der oben genannten Noten, die, im wesentlichen an sie anschließend, noch einige allgemeine Betrachtungen beifügt.

Der Grundgedanke ist der folgende.

Es seien zwei Mannigfaltigkeiten  $M_m$  und  $M_n$  von verschiedener Dimensionenzahl  $m$  und  $n$  in die Beziehung zueinander gesetzt, daß für  $m = n + 1 + p$  die Koordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_n$  eines Punktes der  $M_n$  eindeutige und stetige Funktionen der Koordinaten  $t_0, t_1, \dots, t_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  eines Punktes der  $M_m$  sind (wenn  $p = 0$  ist, fehlen hier und in den folgenden Formeln die  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ), indem etwa:

$$(1) \quad y_i = f_i(t_0, t_1, \dots, t_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p),$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ist. Dabei möge der Punkt der  $M_m$  einem zusammenhängenden Gebiete  $\Phi$  angehören, und der entsprechende Punkt der  $M_n$  einem Gebiete  $\Psi$ . Ist nun  $(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p)$  ein Punkt aus  $\Phi$  und  $a$  gehörig klein, so liegen die Punkte der  $M_m$ , welche den Gleichungen:

$$(2) \quad (t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2,$$

$$\xi_1 = b_1, \quad \xi_2 = b_2, \cdots, \xi_p = b_p$$

genügen, alle in  $\Phi$  und bilden eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $K_n$ . Die Bilder dieser Punkte sind durch die Formeln

$$(3) \quad y_i = f_i(t_0, t_1, \cdots, t_n, b_1, b_2, \cdots, b_p),$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

gegeben, in denen  $t_0, t_1, \cdots, t_n$  nur durch die Gleichung:

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind. Die Gleichungen (3) definieren die  $y$  als eindeutige und stetige Funktionen eines Punktes der Mannigfaltigkeit  $K_n$ . Wenn es gelingt nachzuweisen, daß zwei *verschiedenen* Punkten der  $K_n$  das nämliche Wertsystem der  $y$  entspricht, so ist damit gezeigt, daß eine *gegenseitig eindeutige und stetige* Abbildung der  $M_m$  auf die  $M_n$  nicht möglich ist.

Im folgenden soll für  $n = 1, 2, 3$  der Beweis geliefert werden. Für  $n = 4$  ist er mir nicht gelungen, weil ich es nicht fertig brachte, im Raume von drei Dimensionen eine Kurve oder im Raume von vier Dimensionen eine Fläche zu konstruieren, die mit unendlich vielen Kurven verschlungen ist, wenigstens bei der hier anzunehmenden Allgemeinheit der Voraussetzungen.

### § 1.

Statt die  $y$  als Funktionen der  $t$  anzusehen, die durch die Gleichung (einer Kugel)

$$(1) \quad (t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind, ist es bequemer sie als Funktionen von  $n$  unabhängigen Variablen darzustellen.

Ich betrachte die beiden Punkte  $A$  und  $B$ , für die  $t_0$  die Werte  $a_0 + a$  bzw.  $a_0 - a$  und  $t_1, t_2, \cdots, t_n$  die Werte  $a_1, \cdots, a_n$  haben. Ich kann voraussetzen, daß das Wertsystem, welches die  $y$  in  $A$  annehmen, von dem in  $B$  verschieden ist, weil ja sonst der zu beweisende Satz erfüllt wäre.

Ich projiziere nun vom Punkte  $B$  aus die Kugel (1) stereographisch auf die ebene Mannigfaltigkeit, welche die Kugel in  $A$  berührt, und deren Gleichung

$$t_0 = a_0 + a$$

ist. Wenn ich für einen Punkt dieser Mannigfaltigkeit die Werte der  $n$  Größen  $t$  gleich  $s_1 + a_1, s_2 + a_2, \cdots, s_n + a_n$  setze, so finde ich die Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} t_0 - a_0 &= a \frac{4a^2 - s^2}{4a^2 + s^2}, \\ t_i - a_i &= a \frac{4as_i}{4a^2 + s^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

wo  $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2$  sein soll.

Umgekehrt wird, wenn die  $t$  die Gleichung (1) erfüllen,

$$(3) \quad s_i = \frac{2a(t_i - a_i)}{t_0 - a_0 + a}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die  $n$  Funktionen  $y$  erscheinen nun als eindeutige und stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $s_1, \dots, s_n$ . Für

$$(s_1, \dots, s_n) = (0, \dots, 0)$$

folgt  $t_0 = a_0 + a$ ,  $t_i = a_i$ , d. h. der Punkt  $A$ ; für unendlich große  $s$  wird  $t_0 = a_0 - a$ ,  $t_i = a_i$ , und ihnen entspricht der Punkt  $B$ .

## § 2.

Ich schicke nun einige allgemeine Erörterungen voraus, die für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gelten und im späteren wiederholt verwendet werden können.

Sind die Koordinaten eines Punktes der Mannigfaltigkeit  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , so nenne ich die Gesamtheit der Wertsysteme, welche eine Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n (s_i - m_i)^2 - r^2 = 0$$

befriedigen, eine *Kugel*; der Punkt  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  sei ihr *Mittelpunkt*,  $r$  ihr *Radius*. Ist der Mittelpunkt durch einen Buchstaben  $P$  bezeichnet, so will ich die Kugel auch  $(P, r)$  nennen. Die Punkte, für die

$$\sum_{i=1}^n (s_i - m_i)^2 \geq r^2,$$

seien im *Äußeren*, bzw. im *Inneren* der Kugel gelegen. Sind  $(p)$  und  $(q)$  zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , so heiße

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$$

der *Abstand*  $PQ$ .

Für jeden dritten Punkt  $R$  gilt dann, wie im gewöhnlichen Raume, die Ungleichung:

$$PQ + QR \geq PR.$$

Von den Punkten, welche durch die Gleichungen:

$$s_i = p_i + \lambda v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben werden, wenn  $\lambda$  zwischen 0 und  $+\infty$  variiert, möge gesagt werden, daß sie auf einem Strahle liegen, dessen Endpunkt der Punkt ( $p$ ) ist.

Die Punkte der Kugel (1), die gleichzeitig dem Inneren einer mit dem Radius  $r$  um  $B$  gelegten Kugel angehören, genügen der Ungleichung

$$(t_0 - a_0 + a)^2 + \sum_{i=1}^n (t_i - a_i)^2 \leq r^2.$$

In der Projektion entsprechen ihnen daher Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung

$$\sum_1^n s_i^2 \geq 4a^2 \left( \frac{4a^2}{r^2} - 1 \right)$$

erfüllen, also außerhalb einer mit dem Radius  $2a \sqrt{\frac{4a^2}{r^2} - 1}$  um den Punkt  $A$  geschlagenen Kugel liegen.

### § 3.

In einem endlichen Gebiete von beliebiger Dimensionszahl  $n$  sei eine unendliche Anzahl von zusammenhängenden Gebilden  $m^{\text{ter}}$  Dimension ( $m < n$ ) gegeben. Sie seien  $A_1, A_2, A_3, \dots$  und ihre Gesamtheit ( $A$ ) genannt. Wenn man auf unendlich vielen dieser Gebilde, nach beliebigem Gesetz, je einen Punkt  $P$  annimmt, so ist deren Zahl entweder endlich oder unendlich groß. Im ersten Falle ist unter den Punkten wenigstens einer  $P_0$ , durch den unendlich viele der Gebilde  $A$  hindurch gehen.

Im zweiten Falle gibt es mindestens einen Häufungspunkt der Punkte  $P$ , und wenn man diesen mit  $P_0$  bezeichnet, liegen in jeder Kugel ( $P_0, r$ ), wie klein  $r$  auch sein mag, unendlich viele der Punkte  $P$ . Oder mit anderen Worten: Es treten in diese Kugel unendlich viele der Gebilde  $A$  ein. In beiden Fällen kann ich also sagen: In jede Umgebung von  $P_0$ , sei sie auch noch so klein, treten unendlich viele der  $A$  ein. Die Punkte, deren Existenz hier bewiesen ist, will ich *Staupunkte* der Gebilde  $A$  nennen.\*) Ihre Anzahl kann endlich oder unendlich sein. Ich setze hier das letztere voraus.

### § 4.

Es sei nun unter ( $A$ ) die Menge der Staupunkte verstanden. Sie ist abgeschlossen. Denn ist  $A_0$  ein Häufungspunkt dieser Menge, so liegen in einer Kugel ( $A_0, \frac{a}{2}$ ) stets Staupunkte, wie klein auch  $a$  sein mag.

\*) Peano hat in dem Buche „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale“ (Torino 1887), pag. 302, schon solche Punkte betrachtet.

Es sei  $A_1$  einer von ihnen. In eine Kugel  $(A_1, \frac{a}{2})$  treten dann unendlich viele der Gebilde  $A$  ein.

Auf einem von diesen sei  $P$  ein Punkt in  $(A_1, \frac{a}{2})$ . Dann ist  $A_0P \leq A_0A_1 + A_1P \leq a$ . Also treten in die Kugel  $(A_0, a)$  unendlich viele der  $A$  ein, wie klein auch  $a$  sei. D. h.  $A_0$  ist ein Staupunkt der  $A$ .\*)

Legt man durch den beliebigen Punkt  $B$  der Menge  $(A)$  einen Strahl, dessen Endpunkt  $B$  ist, so ist entweder  $B$  der einzige auf dem Strahle liegende Staupunkt, oder es gibt noch andere. Ist deren Zahl endlich, so ist einer,  $C$ , am weitesten von  $B$  entfernt. Ist aber die Zahl unendlich, so gibt es entweder einen entferntesten Punkt  $C$  oder einen Häufungspunkt  $C$ , so daß alle auf dem Strahle liegenden Punkte von  $(A)$  zwischen  $B$  und  $C$  liegen. Da aber  $(A)$  abgeschlossen ist, ist im letzten Falle  $C$  selbst ein Punkt von  $(A)$ . Wie im ersten Falle der von  $B$  ausgehende Strahl, so trägt in den anderen Fällen der von  $C$  ausgehende nur den einen Punkt  $C$  von  $(A)$ , dessen *Träger* er heiße.

Die Kugel  $(B, r)$  bzw.  $(C, r)$  bei beliebig kleinem  $r$  wird dann von dem Strahle nur in einem Punkte  $D$  getroffen, und der gehört nicht zu  $(A)$ .

Zwischen  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  können noch unendlich viele der Gebilde  $A$  den Strahl schneiden, dagegen kann *der* Teil des Strahles, der sich von  $D$  ins Unendliche erstreckt, nur von einer endlichen Zahl der  $A$  geschnitten werden, und von diesem Teile des Strahles bleiben die  $A$  stets um Endliches entfernt, weil er sonst einen Staupunkt tragen müßte, gegen die Annahme. Ebenso können die Schnittfiguren der Kugel  $(B, r)$  bzw.  $(C, r)$  mit den Gebilden  $A$  dem Punkte  $D$  nicht unendlich nahe kommen, weil eben  $D$  kein Staupunkt ist.

Obige Betrachtungen kann man auch an eine von  $B$  aus ins Unendliche verlaufende *Kurve* anknüpfen, auf der ebenfalls ein *letzter* Staupunkt  $C$  liegen muß, so daß die Kurve zwischen  $C$  und dem Unendlichen keinen weiteren trägt.

### § 5.

Um den beliebigen Staupunkt  $B$  lege ich die Kugel  $(B, r)$  und suche eines der Gebilde  $A$ , welches in diese Kugel eintritt. Dann suche ich ein zweites, das vom ersten verschieden ist und in die Kugel  $(B, \frac{r}{2})$  eintritt, dann ein drittes, verschieden von den beiden gefundenen, das in  $(B, \frac{r}{4})$  eintritt usw. Diese Bestimmungen sind möglich, da in jede Kugel um  $B$ , sei sie auch noch so klein, immer noch unendlich viele der  $A$  eintreten. Aus der so bestimmten Reihe von Gebilden treten für jedes  $p$  alle Ge-

\*) Vgl. Peano, Math. Ann., Bd. 37, S. 199, Prop. 8.

bilde vom  $p^{\text{ten}}$  an in  $\left(B, \frac{r}{2^p}\right)$  ein. Die Gebilde dieser Teilreihe haben wieder Staupunkte (die zu  $(A)$  gehören), von denen  $B$  einer ist.

Ein anderer sei  $E$ . Ist  $s$  beliebig klein, so treten in  $(E, s)$  unendlich viele der Gebilde aus der konstruierten Teilreihe ein, die in der Ordnung, in der sie sich in der Teilreihe folgen,  $A_0, A_1, A_2, \dots$  seien.

Ist nun  $p$  so bestimmt, daß  $\frac{r}{2^p} \leq s$ , so treten die Gebilde  $A_p, A_{p+1}, \dots$  alle, sowohl in  $(B, s)$ , wie in  $(E, s)$  ein. Man kann also aus den Gebilden  $A$  eine Reihe herstellen, deren Glieder an einem gegebenen und einem nicht ganz willkürlich zu wählenden Punkte aus  $(A)$  unendlich nahe vorbeigehen.

## § 6.

In den Punkten des endlichen Gebietes, in dem sich die in den §§ 3 ff. angestellten Erwägungen abspielen, sei  $f(P)$  eine stetige Funktion des Ortes  $P$ . Liegt  $P$  auf einem der Gebilde  $A$ , so sei  $f(P) \leq 0$ . Wenn aber  $d$  eine beliebig kleine positive Größe ist, so möge es stets möglich sein, mindestens ein Gebilde  $A'$  zu finden, das an einen beliebigen Staupunkt, so nahe als man will, herankommt, und dessen Punkte von solchen, in denen  $f(P) \geq 0$  ist, um weniger als  $d$  entfernt sind.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, muß in allen Punkten aus  $(A)$  die Funktion  $f = 0$  sein. Denn sei  $A_0$  ein beliebiger Staupunkt und  $f(A_0) \neq 0$ . Es sei  $r$  der Radius einer Kugel, in deren Innerem, wo auch ihr Mittelpunkt liegen möge, die Schwankung der Funktion  $f$  kleiner als  $\frac{1}{4} |f(A_0)|$  sei. Ich nehme  $d < r$ , bestimme das  $A'$  so — was nach der Annahme möglich ist —, daß  $A'$  in die Kugel  $(A_0, r)$  eintritt, und bezeichne mit  $B$  einen Punkt auf diesem  $A'$  im Inneren von  $(A_0, r)$ . Weil dann  $B$  von einem Punkte  $C$ , in dem  $f(C) \geq 0$  ist, weniger weit als  $d$  und somit als  $r$  entfernt ist, so ist:

$$f(B) \geq f(C) - \frac{1}{4} |f(A_0)|,$$

also weil  $f(B) < 0$

$$|f(B)| = -f(B) \leq -f(C) + \frac{1}{4} |f(A_0)| \leq \frac{1}{4} |f(A_0)|.$$

Andererseits ist

$$|f(A_0) - f(B)| \leq \frac{1}{4} |f(A_0)|,$$

daher wäre

$$|f(A_0)| = |f(A_0) - f(B) + f(B)| \leq \frac{1}{2} |f(A_0)|,$$

was aber nur möglich ist, wenn  $f(A_0) = 0$  ist.

## § 7.

In einem endlichen Raume  $\Omega$  sei eine unendliche Zahl von geschlossenen Kurven  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  gegeben. Es sei  $z$  eine eindeutige stetige Funktion des Ortes  $P$  in  $\Omega$ . In den Punkten des Gebietes  $\Omega$  habe  $z$  den Minimalwert  $z_0$ . Es sei  $z$  der Wert dieser Funktion in  $P$ ,  $a$  eine positive Zahl und  $r = z - z_0 + a$  gesetzt.

Es sei ferner  $\varphi$  eine zweite stetige Funktion des Ortes  $P$  in  $\Omega$ , die um  $2\pi$  wächst oder abnimmt, wenn  $P$  eine der Kurven  $\alpha_i$  durchläuft. Ich bilde nun  $P$  in einen Punkte  $P'$  einer Ebene ab, indem ich dem Bildpunkte  $P'$  von  $P$  als Polarkoordinaten in bezug auf einen Pol  $O'$  die Werte  $r$  und  $\varphi$  gebe. Dann macht die Unbestimmtheit von  $\varphi$  in bezug auf die Lage von  $P'$  nichts aus. Jedem Punkte  $P$  entspricht so ein einziger Punkt  $P'$ .

Die Kurven  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  mögen Staupunkte in unendlicher Zahl haben, deren Menge  $\mathfrak{Y}$  sei.

Es soll gezeigt werden, daß es stets mindestens einen Wert von  $z$  gibt, der zu zwei *verschiedenen* Punkten aus  $\mathfrak{Y}$  gehört. Gäbe es irgend zwei Punkte in  $\mathfrak{Y}$ , die den nämlichen Bildpunkt hätten, so lieferten sie das nämliche  $z$  und der Beweis wäre nicht nötig. Ich kann also annehmen, daß zwei verschiedene Punkte aus  $\mathfrak{Y}$  verschiedene Bildpunkte haben. Der Punktmenge  $\mathfrak{Y}$  entspricht auf diese Art gegenseitig eindeutig eine Punktmenge  $\mathfrak{Z}$  als Bild.

Ich kann die nämliche Abbildung auch auf die Kurven  $\alpha$  anwenden. Wenn ein Punkt eine dieser Kurven  $\alpha_i$  durchläuft, so bewegt sich sein Bild in einer Kurve  $b_i$ , die ganz außerhalb des Kreises  $(O', a)$  liegt. Ist  $Z$  der größte Wert von  $z$  im Gebiete  $\Omega$  und  $b > Z - z_0 + a$ , so liegen die Kurven  $b_i$  ganz im Kreise  $(O', b)$ . Da  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  wächst, während  $P$  die  $\alpha_i$  durchläuft, so legt sich  $b_i$  in den Ring zwischen  $(O', a)$  und  $(O', b)$  um den Punkt  $O'$  herum.

Hier braucht aber gegenseitige Eindeutigkeit der Abbildung nicht mehr vorhanden zu sein, vielmehr kann ein Punkt  $P'$  Bild von mehreren Punkten  $P$  sein.

Da jede von  $O'$  aus ins Unendliche laufende Linie alle die  $b_i$  schneiden muß, so trägt jede solche Linie Staupunkte der  $b_i$ . Deren Menge, die  $\mathfrak{Z}'$  sei, ist somit unendlich.

Ich zeige jetzt, daß die Mengen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{Z}'$  identisch sind. Dazu brauche ich die Hilfssätze der folgenden Paragraphen.

## § 8.

In einem Raume von beliebig vielen Dimensionen sei  $P$  ein Punkt und  $f(P)$  ein von ihm eindeutig abhängiger, der sich mit der Lage von

$P$  stetig verändert.  $\mathfrak{S}$  sei irgend eine unendliche Menge von Punkten. Durchläuft  $P$  die Menge  $\mathfrak{S}$ , so nimmt  $f(P)$  entweder unendlich viele verschiedene Lagen an oder nur endlich viele. Im ersten Falle seien  $P_1, P_2, \dots$  unendlich viele Punkte, so daß die entsprechenden  $f(P_1), f(P_2), \dots$  alle verschieden sind. Ist dann  $P_0$  eine Häufungsstelle der Menge  $P_1, P_2, \dots$ , so ist, wie jetzt gezeigt werden soll,  $f(P_0)$  eine Häufungsstelle der  $f(P_1), f(P_2), \dots$ . Ich bezeichne mit  $\text{Abst.}(R, S)$  den Abstand der beiden Punkte  $R$  und  $S$ . Ich bestimme  $e$  zu einem angegebenen  $d$ , so daß, wenn  $\text{Abst.}(P, P_0) < e$ , dann  $\text{Abst.}(f(P), f(P_0)) < d$  ist, was wegen der Stetigkeit der durch  $f$  angedeuteten Abhängigkeit möglich ist. Da  $P_0$  Häufungsstelle ist, gibt es in der Reihe  $P_1, P_2, \dots$  unendlich viele Punkte  $P_p, P_q, P_r, \dots$ , für welche die Ungleichungen:

$$\text{Abst.}(P_p, P_0) < e, \quad \text{Abst.}(P_q, P_0) < e, \quad \dots$$

gelten, und folglich auch die Ungleichungen

$$\text{Abst.}(f(P_p), f(P_0)) < d, \quad \text{Abst.}(f(P_q), f(P_0)) < d, \quad \dots$$

richtig sind. Also gibt es in der Kugel  $(f(P_0), d)$  stets unendlich viele Punkte der Menge  $f(P_1), f(P_2), \dots$ , und folglich ist  $f(P_0)$  eine Häufungsstelle dieser Menge.

Gibt es aber nur eine endliche Zahl verschiedener Punkte  $f(P)$ , während  $P$  die Menge  $\mathfrak{S}$  durchläuft, so sei  $A$  einer von ihnen. Dann muß es eine unendliche Menge Punkte in  $\mathfrak{S}$  geben, etwa  $P_1, P_2, \dots$ , so daß

$$f(P_1) = f(P_2) = \dots = A$$

ist. Haben die Punkte  $P_1, P_2, \dots$  die Häufungsstelle  $P_0$ , so ist

$$\text{Abst.}(f(P_0), A) = \text{Abst.}(f(P_0), f(P_p)), \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

Da wegen der Stetigkeit der Abstand rechts durch passende Wahl von  $p$  unter jede Grenze gebracht werden kann, muß also

$$f(P_0) = A$$

sein.

Unter den gemachten Annahmen gibt es also entweder einen Punkt  $P_0$ , so daß  $f(P_0)$  eine Häufungsstelle der Punkte  $f(P)$  ist, oder es gibt unendlich viele Punkte von  $\mathfrak{S}$ , für die  $f(P) = f(P_0)$  ist.

## § 9.

Ist  $Q_0$  ein Häufungspunkt einer Punktmenge  $\mathfrak{R}$ , so nehme ich einen Punkt  $Q_1$  der Menge beliebig an. In der Kugel um  $Q_0$ , die durch  $Q_1$  geht, liegen dann noch unendlich viele Punkte aus  $\mathfrak{R}$ . Von diesen sei  $Q_2$  einer, für den  $\text{Abst.}(Q_0, Q_2) < \frac{1}{2} \text{Abst.}(Q_0, Q_1)$  ist. Dann betrachte ich die Kugel um  $Q_0$ , die durch  $Q_2$  geht, und nehme in ihr einen Punkt  $Q_3$



aus  $\mathfrak{R}$ , für den Abst.  $(Q_0, Q_3) < \frac{1}{2}$  Abst.  $(Q_0, Q_2)$  ist usw. Auf diese Art wird aus  $\mathfrak{R}$  eine unendliche Reihe von Punkten  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  herausgenommen, die ich eine *Normalreihe* zu  $Q_0$  nennen will. Eine solche kann nur *einen* Häufungspunkt haben.

Denn hätte sie zwei,  $Q_0, Q_0'$ , so lege ich um beide Punkte Kugeln mit dem Radius  $n = \frac{1}{4}$  Abst.  $(Q_0, Q_0')$ . Der erste Punkt der Normalreihe, der in  $(Q_0, n)$  liegt, sei  $Q_p$ . Dann ist für  $q > p$  Abst.  $(Q_0, Q_q) < n$  und

$$\text{Abst. } (Q_0', Q_q) \geq \text{Abst. } (Q_0, Q_0') - \text{Abst. } (Q_0, Q_q) \geq 3n,$$

so daß von  $Q_q$  an alle Punkte der Normalreihe außerhalb der Kugel  $(Q_0', 3n)$  lägen, also  $Q_0'$  nicht Häufungspunkt sein könnte.

### § 10.

Es sei  $Q_0$  ein Staupunkt der Kurven  $b_i$ . Ich nehme dann die Punkte  $Q_1, Q_2, \dots$  auf den Kurven  $b_1, b_2, \dots$  an, auf jeder Kurve einen Punkt, so daß sie eine Normalreihe zu  $Q_0$  bilden. Das ist möglich, selbst wenn in der Nähe von  $Q_0$  alle Kurven  $b_i$  zusammenfallen sollten, weil im Inneren eines kleinen um  $Q_0$  gelegten Kreises jedenfalls von jeder dieser Kurven eine endliche Strecke liegen muß.

Die Werte von  $r = z - z_0 + a$ , von  $z = r - a + z_0$  und von  $\varphi$  seien für den Punkt  $Q_p$  bzw.  $r_p, z_p, \varphi_p$ , dagegen für  $Q_0$ :  $r_0, z_0, \varphi_0$ . Da nach der Annahme die Punkte  $Q_i$  eine Normalreihe bilden mit dem einzigen Häufungspunkte  $Q_0$ , müssen nach dem Satze von § 8  $r_0, z_0$  und  $\varphi_0$  die Häufungswerte der  $r_p, z_p$  und  $\varphi_p$  sein.

Die Punkte  $Q_i$  seien die Bilder von Punkten  $P_i$ . Dabei kann es sein, daß durch einen Punkt  $Q_i$  sein Original  $P_i$  nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Falle kann ich  $P_i$  aus den möglichen Punkten nach Belieben auswählen. Diese Punkte  $P_i$  liegen auf den Kurven  $\alpha_i$ , auf jeder Kurve nur einer, und sind verschieden, weil ihre Bilder, die  $Q_i$ , es sind. Wenn ich die Werte von  $z$  und  $\varphi$  für den Punkt  $P_i$  mit  $z(P_i)$  und  $\varphi(P_i)$  bezeichne, so ist gemäß der Art, wie die Abbildung eingerichtet wurde,

$$z(P_i) = z_i; \quad \varphi(P_i) = \varphi_i.$$

Da die  $P_i$  alle verschieden sind, so ist für *einen* Häufungspunkt  $P_0$  von ihnen

$$z(P_0) = z_0, \quad \varphi(P_0) = \varphi_0,$$

d. h.  $Q_0$  ist das Bild von  $P_0$ . Folglich gehört  $Q_0$ , das zu  $\mathfrak{Z}'$  gehört, auch zu der Menge  $\mathfrak{Z}$ , da ja  $P_0$  zu  $\mathfrak{Y}$  gehört.

Sei umgekehrt  $Q_0'$  ein Punkt von  $\mathfrak{Z}$ , also Bild eines Punktes  $P_0'$  aus

9). Die Polarkoordinaten von  $Q_0'$  seien  $r_0'$ ,  $\varphi_0'$ . Sind dann  $r$ ,  $\varphi$  die Koordinaten irgend eines anderen Punktes  $Q'$ , so ist

$$\text{Abst. } (Q' Q_0') < \sqrt{(r - r_0')^2 + b^2(\varphi - \varphi_0')^2}.$$

Mache ich also

$$|r - r_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so wird

$$\text{Abst. } (Q' Q_0') < d.$$

Es sei  $(P_0', s)$  eine Kugel, in der die Schwankung von  $z < \frac{d}{\sqrt{2}}$  und die von  $\varphi < \frac{d}{b\sqrt{2}}$  ist. Tritt in diese Kugel eine Kurve  $\alpha_p$  ein, und ist  $P_p'$  ein Punkt auf  $\alpha_p$  im Inneren von  $(P_0', s)$ , so ist für den Punkt  $P_p'$

$$|z - z_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

da im Punkte  $P_0'$   $z = z_0'$ ,  $\varphi = \varphi_0'$  ist.

Ist  $Q_p'$  das Bild von  $P_p'$ , so liegt  $Q_p'$  auf  $\mathfrak{b}_p$ , und für diesen Punkt ist:

$$|r - r_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so daß  $\text{Abst. } (Q_p', Q_0') < d$  ist. Daher ist  $Q_0'$  so beschaffen, daß in den Kreis  $(Q_0', d)$  mit dem beliebig kleinen Radius  $d$  unendlich viele Kurven  $\mathfrak{b}_p$  eintreten, also ist  $Q_0'$  Staupunkt dieser Kurven und gehört zur Menge  $\mathfrak{B}'$ . Die Mengen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  sind somit identisch.

Da die Resultate der letzten Paragraphen im Grunde nur von der Stetigkeit der Funktionen  $z$  und  $\varphi$  des Ortes im Raume und des Ortes in der Ebene abhängen, so gelten sie auch für andere ähnlich beschaffene Abbildungen.

## § 11.

Es sei in einer Ebene eine unendliche abgeschlossene Punktmenge  $\mathfrak{M}$  gegeben. Diese Menge möge folgende Eigenschaften haben:

1. Sei es möglich um einen Punkt  $O$  der Ebene einen Kreis von solchem Radius  $a$  zu legen, daß in  $(O, a)$  kein Punkt aus  $\mathfrak{M}$  liege.

2. Treffe jede von  $O$  aus ins Unendliche laufende Kurve auf Punkte aus  $\mathfrak{M}$ .

3. Ein Kreis  $(O, b)$  umfasse alle Punkte von  $\mathfrak{M}$ . (Ich könnte dafür eine allgemeinere Bedingung nehmen.)

Ich lege in den Kreis  $(O, a)$  ein Quadrat von der Seitenlänge  $\frac{a}{q}$  und suche von ihm ausgehend diejenigen mit den Seiten zusammenhängenden Quadrate, welche einen zusammenhängenden Flächenteil bilden und

weder in ihrem Inneren, noch auf der Grenze einen Punkt aus  $\mathfrak{M}$  tragen. Damit die Grenzen dieser Fläche sich nicht schneiden, entferne ich von zwei Quadraten, die nur einen Eckpunkt gemein haben, während die vier anstoßenden Seiten zur Grenze gehören, eines, so lange, bis solche nicht mehr vorkommen. Die konstruierte Fläche kann sich nicht ins Unendliche erstrecken, weil nach der zweiten unserer Annahmen die Menge  $\mathfrak{M}$  die Ebene in zwei getrennte Teile teilt. Sie kann mehrere Grenzkurven besitzen, von denen aber dann eine alle anderen einschließt.

Sei  $r$  der kleinste Wert, den  $q$  haben kann, so mache ich die Konstruktion mit  $q = r, 2r, 4r, 8r, \dots$  und erhalte so die Flächenstücke  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \dots$ . Die äußersten Grenzkurven dieser Stücke seien  $h_1, h_2, h_3, \dots$ . Ich könnte an eine Seite von  $h_p$  noch ein Quadrat ansetzen, wenn in diesem kein Punkt aus  $\mathfrak{M}$  läge. Damit also kein Quadrat angesetzt werden kann, müssen mindestens in der Entfernung der Diagonale eines Quadrates Punkte aus  $\mathfrak{M}$  vorkommen. Wegen der Notwendigkeit, Quadrate zu entfernen wird die Grenze jedoch größer.

Sei  $\Omega$  ein Quadrat, das zur konstruierten Fläche gehört, so lege ich um  $\Omega$  die acht anstoßenden Quadrate herum, die eine Fläche  $\Omega'$  bilden mögen, und um diese eine weitere Schicht von 16 Quadraten  $\Omega''$ . Wenn nun dieser Haufen von 25 Quadraten keinen Punkt aus  $\mathfrak{M}$  enthält, so gehört er ganz der zuerst konstruierten Fläche an. Von ihm könnten aber nach den vorhin getroffenen Bestimmungen einzelne Quadrate fortgenommen werden müssen. Da die Seiten aller Quadrate parallel sind, so könnten das nur die vier in den Ecken von  $\Omega''$  liegenden sein. Dagegen blieben sämtliche in  $\Omega'$  unberührt, und somit läge das Quadrat  $\Omega$  ganz im Inneren des Quadrathaufens, und keine seiner Seiten gehörte zu dessen Begrenzung. Somit muß höchstens in der Entfernung  $\frac{6a}{2^p r}$  von einem Punkte der Grenze  $h_p$  ein Punkt aus  $\mathfrak{M}$  liegen.

Jeder Punkt von  $\mathfrak{S}_1$  gehört zu  $\mathfrak{S}_2$ , jeder von  $\mathfrak{S}_2$  zu  $\mathfrak{S}_3, \dots$ , so daß von den Grenzkurven  $h_1, h_2, h_3, \dots$  jede von allen folgenden umschlossen wird, soweit sie nicht mit ihr zusammenfällt.

Die Kurven  $h_1, h_2, \dots$  haben eine unendliche, abgeschlossene Menge  $\mathfrak{M}'$  von Staupunkten. Ist  $M$  ein solcher Staupunkt, so treten in den Kreis  $\left(M, \frac{d}{2}\right)$  unendlich viele der Kurven  $h$  ein, und zwar, wenn  $h_p$  die erste ist, auch alle folgenden. Ist  $s > p$  und  $\frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$ , so ist auf der Kurve  $h_s$  im Inneren von  $\left(M, \frac{d}{2}\right)$  ein Punkt  $N$  zu finden, von welchem ein Punkt  $L$  aus  $\mathfrak{M}$  einen Abstand  $< \frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$  hat. Daher ist der Ab-

stand  $ML$  sicher  $< d$ . In jeder Nähe von  $M$  liegen also Punkte von  $\mathfrak{M}$ , daher ist  $M$  ein Häufungspunkt von  $\mathfrak{M}$  und, weil  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen ist, ein Punkt von  $\mathfrak{M}$  selbst.

Also ist die Menge  $\mathfrak{M}'$  ein Teil von  $\mathfrak{M}$ .

### § 12.

Nun sei in der Ebene eine stetige Funktion  $u$  des Ortes gegeben. Es soll gezeigt werden, daß es sicher zwei verschiedene Punkte aus  $\mathfrak{M}$  gibt, in denen  $u$  den nämlichen Wert hat.

Seien  $A$  und  $B$  zwei der Staupunkte aus  $\mathfrak{M}'$  und  $AC, BD$  ihre Träger (vergl. § 4), wobei  $C$  und  $D$  außerhalb des Kreises  $(O, b)$  gelegen seien.

Hätte  $u$  in  $A$  den nämlichen Wert, wie in  $B$ , so wäre es nicht nötig den Satz zu beweisen. Hat aber  $u$  in  $A$  den Wert  $u_1$ , in  $B$  den  $u_2$  und ist  $u_1 < u_2$ , so sei

$$u_0 = \frac{1}{2} (u_1 + u_2), \quad g = \frac{1}{4} (u_2 - u_1).$$

Ich lege dann um  $A$  und  $B$  zwei Kreise mit so kleinem Radius  $t$ , daß in ihnen die Schwankung von  $u$  kleiner als  $g$  ist. Dann ist in  $(A, t)$   $u < u_0 - g$ , in  $(B, t)$   $u > u_0 + g$ . Die Strahlen  $AC$  und  $BD$  mögen nun  $(A, t)$  in  $E$  und  $(B, t)$  in  $F$  schneiden. Dann ist kein Punkt der Strecke  $EC$  und  $FD$  ein Punkt aus  $\mathfrak{M}'$ , und folglich kann nur eine endliche Zahl der Kurven  $\mathfrak{h}$  diese Strecken schneiden. Diese lasse ich aus deren Reihe fort.

Die erste der übrigen Kurven  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots$ , welche in  $(A, t)$  und  $(B, t)$  eintritt, sei  $\mathfrak{h}_p$ . Von ihren Schnittpunkten mit diesen Kreisen seien  $GH$  und  $JK$  (Fig. 1) so gewählt, daß zwischen  $G$  und  $H$  einerseits, zwischen  $J$  und  $K$  andererseits kein Schnittpunkt von  $\mathfrak{h}_p$  mit jenen beiden Kreisen liegt. Dabei werden nach der Annahme die Bogen  $GH$  und  $JK$  weder von  $AC$  noch von  $BD$  getroffen. Auch schneiden diese Bogen sich nicht.

Auf irgend einer anderen der Kurven  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_q$ , wo  $q > p$ , kann ich ebenso die Bogen  $G_q H_q$  und  $J_q K_q$  bestimmen, in derselben Weise wie  $GH, JK$  auf  $\mathfrak{h}_p$ . Dann gibt es auf  $G_q H_q$  einen Punkt  $P_q$ , in dem  $u = u_0$  ist, und auf  $J_q K_q$  einen zweiten  $Q_q$ . Da die Kurven  $\mathfrak{h}_q$  die  $\mathfrak{h}_p$  einschließen, wird der Bogen  $G_q H_q$  in dem

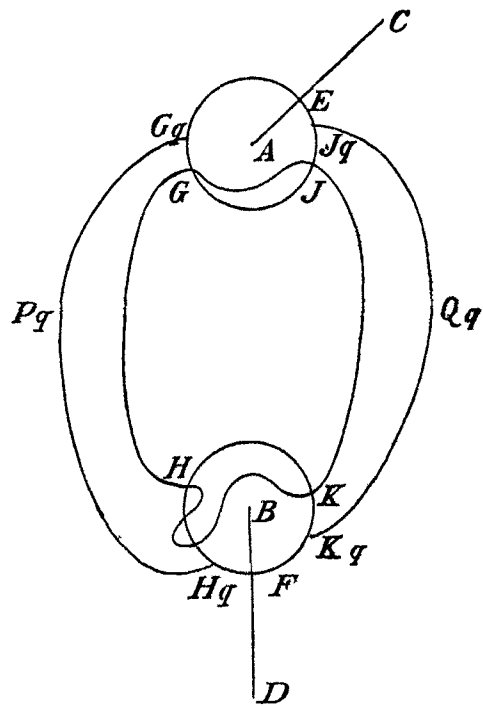


Fig. 1.

Stück der Ebene liegen, das durch  $(O, b)$  und die Linie  $CEGHFD$  begrenzt ist, und der Bogen  $J_q K_q$  in dem durch  $CEJKFD$  abgeschnittenen Stücke, und in diesen beiden Stücken liegen dann auch  $P_q$  und  $Q_q$ . Deren Häufungspunkte  $P_0$  und  $Q_0$  liefern, nach § 8,  $u = u_0$ . Sie können aber nicht identisch sein, weil sie sonst auf  $EC$  oder  $FD$  liegen müßten. Da aber  $P_0, Q_0$  zu den Häufungspunkten  $\mathfrak{M}$  gehören, ist dies nicht möglich. Also wird der Wert  $u_0$  in zwei verschiedenen Punkten der Menge  $\mathfrak{M}$  angenommen.

Ebenso gut wie  $u_0$  hätte ich eine andere zwischen  $u_1$  und  $u_2$  liegende Zahl nehmen und denselben Beweis mit kleinen Änderungen führen können. Ich kann also sagen: *Unter den im Anfange von § 11 aufgestellten Bedingungen werden unendlich viele Werte in mindestens je zwei verschiedenen Punkten der Menge  $\mathfrak{M}$  angenommen.*

Wende ich dieses Resultat auf die Verhältnisse der §§ 7—10 an, so sind die Bedingungen des § 11 erfüllt, und folglich gibt es unendlich viele Werte, die  $z$  in mindestens je zwei verschiedenen Punkten aus  $\mathfrak{Y}$  annimmt.

### § 13.

Ich mache jetzt eine Anwendung auf einen Raum von drei Dimensionen. In ihm sei eine unendliche abgeschlossene Punktmenge  $\mathfrak{N}$  gegeben von folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine Kugel  $(O, a)$ , in der kein Punkt aus  $\mathfrak{N}$  liegt.
2. Jede von  $O$  aus ins Unendliche laufende Kurve treffe stets auf Punkte aus  $\mathfrak{N}$ .
3. Alle Punkte aus  $\mathfrak{N}$  seien in einer Kugel  $(O, b)$  enthalten (diese Bedingung ist in der Allgemeinheit eigentlich nicht nötig).

Ich lege in die Kugel  $(O, a)$  einen Würfel von der Kantenlänge  $\frac{a}{q}$  und baue von ihm ausgehend mit kongruenten Würfeln einen zusammenhängenden Raum auf, indem ich so lange als möglich Würfel an Würfel ansetze und zwar stets so, daß sie mit einer Seitenfläche zusammenhängen. Wegen der Eigenschaft 2. muß dieser Aufbau einmal ein Ende haben. Diese zusammengebauten Würfel bilden einen Raum, der vielleicht Hohlräume einschließen kann, aber eine zusammenhängende äußere Oberfläche besitzt. Es könnte vorkommen, daß die Oberfläche sich selbst schneidet, indem zwei Würfel einer Ecke oder eine Kante gemein haben, während die sich in der Ecke oder Kante schneidenden Seitenflächen zur Begrenzung gehören. Um dies zu verhindern, entferne ich aus dem Würfelhaufen von solchen Würfeln so lange einen, bis derartige Vorkommnisse nicht mehr auftreten.

Wenn ich die Konstruktion für eine gewisse kleinste Zahl  $q = r$  mache und dann für  $q = 2r, 4r, 8r, \dots$ , so erhalte ich äußere Oberflächen  $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ , die sich ganz einschließen, soweit sie nicht zusammenfallen. Da  $O$  ganz im Inneren aller Flächen  $\mathcal{G}$  liegt, trifft jede von  $O$  aus ins Unendliche gehende Linie alle diese Flächen und trägt also einen ihrer Staupunkte. Somit ist deren Zahl unendlich und nach § 4 abgeschlossen. Ihre Menge sei  $\mathcal{N}'$ .

Jeder Punkt der Fläche  $\mathcal{G}$  hat in seiner Nähe Punkte aus  $\mathcal{N}$ . Wenn es nicht nötig wäre, Würfel aus dem Haufen nachträglich zu entfernen, würden in der Entfernung  $\frac{a}{2^s r}$  von einem Punkte der Fläche  $\mathcal{G}$ , Punkte aus  $\mathcal{N}$  liegen müssen. Wegen jenes Umstandes aber muß ich eine Überlegung anstellen, die der von § 11 analog ist, nur daß Würfel an die Stelle von Quadraten treten, und daß aus dem Haufen von  $5^3$  Würfeln vielleicht alle die  $5 \cdot 12 - 8 = 52$  zu entfernen wären, die an der Bildung der Kanten dieses Würfelhaufens beteiligt sind. Ich sehe daraus, daß höchstens in der Entfernung  $\frac{9a}{2^s r}$  von einem Punkte von  $\mathcal{G}$ , sich Punkte aus  $\mathcal{N}$  befinden müssen.

Damit kann ich nun, ähnlich wie in § 11, zeigen, daß die Menge  $\mathcal{N}'$  ein Teil von  $\mathcal{N}$  ist.

#### § 14.

Im Raume seien jetzt zwei stetige Funktionen  $u$  und  $v$  des Ortes gegeben. Ich kann dann zeigen, daß es stets unendliche viele Wertsysteme  $(u_0, v_0)$  gibt, welche in zwei verschiedenen Punkten von  $\mathcal{N}$  angenommen werden.

Es sei  $A$  ein Punkt aus  $\mathcal{N}'$ , dessen Träger  $AC$  sei, und  $BD$  der Träger des Punktes  $B$  aus  $\mathcal{N}'$ , wobei  $C$  und  $D$  außerhalb  $(O, b)$  liegen mögen (ich nehme dieselben Bezeichnungen, wie in § 12, obgleich es sich dort um die Ebene, hier um den Raum handelt). Haben  $u$  und  $v$  die nämlichen Werte in  $A$  wie in  $B$ , so ist der Satz richtig. Ich kann also annehmen, daß etwa  $u$  in  $A$  den Wert  $u_1$  und in  $B$  den davon verschiedenen Wert  $u_2$  habe. Es sei dabei  $u_2 > u_1$ . Ich setze:

$$\frac{1}{2} (u_2 + u_1) = u_0, \quad \frac{1}{4} (u_2 - u_1) = g,$$

lege um  $A$  und  $B$  die Kugeln  $(A, t), (B, t)$  (Fig. 2) so klein, daß sie sich nicht schneiden und in ihnen  $u$  bzw.  $< u_0 - g$  und  $> u_0 + g$  ist.  $E$  und  $F$  seien die Schnittpunkte dieser Kugeln mit den Strahlen  $AC$  und  $BD$ .

Ich denke mir aus der Reihe der Flächen  $\mathcal{G}$  die fortgelassen — und deren Zahl ist endlich —, welche  $EC$  und  $FD$  schneiden.

Die erste von den übrigbleibenden, die in  $(A, t)$  und  $(B, t)$  eindringt, sei die  $\mathcal{G}_p$ . Dann dringt jede andere  $\mathcal{G}_q$  auch ein, wenn  $q > p$  ist. Sei nun der Punkt  $M$  in der Kugel  $(A, t)$  und  $N$  in  $(B, t)$  so gewählt, daß sie im Inneren von  $\mathcal{G}_p$  liegen, so sind sie auch im Inneren von  $\mathcal{G}_q$ . Verbinde ich sie im Inneren von  $\mathcal{G}_p$  durch ein Kurvenstück, und die Punkte  $C$  und  $D$  durch ein Kurvenstück im Äußeren von  $(O, b)$  und füge die Strecken  $AM$  und  $BN$  bei, so erhalte ich eine Kurve  $\mathfrak{f}$ , bestehend aus dem letzt erwähnten Stück, der Linie  $CA$ ,  $AM$ , dem Kurvenstück  $MN$ , den Strecken  $NB$ ,  $BD$ . Diese Kurve trifft jede  $\mathcal{G}_r$  nur dort, wo die  $MA$  und  $NB$  sie schneiden, also jedesmal ungerade\*) und im Inneren von  $(A, t)$  bzw.  $(B, t)$ .

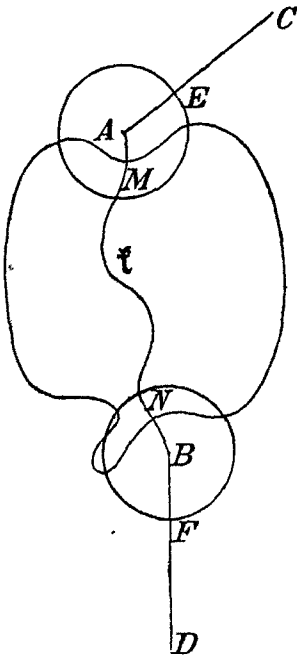


Fig. 2.

## § 15.

Die geschlossene Fläche  $\mathcal{G}_r$ ,  $r \geq p$ , trifft  $(A, t)$  in einer oder mehreren geschlossenen Kurven. Da aber das von diesen begrenzte Stück von  $\mathcal{G}_r$  durch  $\mathfrak{f}$  ungerade geschnitten wird, muß eine von ihnen mit  $\mathfrak{f}$  verschlungen sein. In ihren Punkten ist  $u < u_0 - g$ . An sie setze ich nun Quadrat an Quadrat der Fläche  $\mathcal{G}_r$  an, soweit sie durch Seiten zusammenhängen, so lange als in den anzusetzenden Quadraten noch  $u < u_0$  ist. Dies Ansetzen muß ein Ende haben, weil in  $(B, t)$  auf  $\mathcal{G}_r$   $u > u_0$  ist. Ich erhalte so einen zusammenhängenden Teil von  $\mathcal{G}_r$ , der eine oder mehrere Grenzkurven haben kann. Aber mindestens eine von diesen muß mit  $\mathfrak{f}$  verschlungen sein, weil ich von einer solchen Kurve ausging und die angesetzten Quadrate  $\mathfrak{f}$  nicht trafen. Die Kurven, die ich so auf  $\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_{p+1}, \dots$  erhalte, seien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ .

Diese Kurven lasse ich jetzt an die Stelle der  $a$  des § 7 treten, und  $v$  an die Stelle von  $z$ .

Die dort verlangte Variable  $\varphi$  aber erhalte ich auf folgende Weise: Ich lege von  $O$  nach einem beliebigen Punkt  $P$  eine ganz willkürliche Kurve  $\mathfrak{p}$  und bezeichne mit  $J$  den Wert des Gaußschen Integrals

$$\iint \frac{\begin{vmatrix} s_1 - s_1' & ds_1 & ds_1' \\ s_2 - s_2' & ds_2 & ds_2' \\ s_3 - s_3' & ds_3 & ds_3' \end{vmatrix}}{\sqrt{(s_1 - s_1')^2 + (s_2 - s_2')^2 + (s_3 - s_3')^2}^{\frac{3}{2}}},$$

\*) Ich sage kurz „eine Kurve trifft oder schneidet eine Fläche ungerade“, statt in einer ungeraden Zahl von Punkten.

wo  $(s_1, s_2, s_3)$  die Koordinaten eines Punktes auf  $\mathfrak{f}$ ,  $(s'_1, s'_2, s'_3)$  die eines Punktes auf  $\mathfrak{p}$  sind, und die Integration über  $\mathfrak{f}$  und  $\mathfrak{p}$  sich erstreckt. Da man ohne und mit Umschlingung von  $\mathfrak{f}$  von  $O$  nach  $P$  gehen kann, ist  $J$  nicht ganz bestimmt, vielmehr um ganze Vielfache von  $4\pi$  unbestimmt. Nehme ich nun  $\varphi = \frac{1}{2} J$ , so ist  $\varphi$  eine Variable von den gewünschten Eigenschaften, weil ja die  $g_r$  die  $\mathfrak{f}$  umschlingen.

Es folgt also nach den Resultaten der §§ 7—12, daß es unter den Staupunkten der Kurven  $g$ , die ja einen Teil von  $\mathfrak{N}'$ , und damit von  $\mathfrak{N}$  bilden, zwei verschiedene gibt, die den beiden Funktionen  $u$  und  $v$  die nämlichen Werte  $u_0$  und  $v_0$  erteilen.

### § 16.

Jetzt ist es nicht schwer, die im Eingang dieser Arbeit erwähnten drei Fälle des Satzes: „Daß zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension nicht gegenseitig eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden können“ zu beweisen, indem ich den zweiten Satz beweise: *Daß  $n$  stetige und eindeutige Funktionen des Ortes auf einer  $n$ -dimensionalen Kugel stets unendlich viele Wertsysteme mindestens zweimal annehmen müssen — wenigstens für  $n = 1, 2$  oder  $3$ .*

Im Falle  $n = 1$  hat man einen Kreis, auf dem eine stetige Funktion  $w$  des Ortes gegeben sei. Nimmt  $w$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$  des Kreises verschiedene Werte  $w_1$  und  $w_2$  an, so nimmt  $w$  jeden Zwischenwert in zwei Punkten auf den beiden Teilen an, in die der Kreis durch die Punkte  $A$  und  $B$  zerfällt.

Für  $n = 2$  hat man die Kugel

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 = a^2.$$

Die beiden Funktionen, die in der Einleitung  $y_1$  und  $y_2$  hießen, mögen jetzt  $w$  und  $u$  genannt werden.

Auf der Kugel muß es zwei Punkte  $A$  und  $B$  geben, in denen die beiden Funktionen  $w, u$  nicht die nämlichen Werte haben. Ich kann annehmen, in  $A$  habe  $w$  den Wert  $w_1$ , in  $B$  den  $w_2$ , und es sei  $w_1 \neq w_2$ ,  $w_1 < w_2$ . Ich setze  $w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}$ ,  $\frac{w_2 - w_1}{4} = d$  und nehme dann diese Punkte  $A$  und  $B$  für die in § 1 gebrauchten, indem ich die Kugel von  $B$  aus auf ihre Tangentenebene in  $A$  projiziere. Wenn ich den Projektionen die nämlichen Werte von  $w$  und  $u$  zuteile, die sie in den Originalen haben, so hat in der Ebene im Punkt  $A$   $w$  den Wert  $w_1 = w_0 - 2d$ . Wenn ich im § 2 die Größe  $r$  so bestimme, daß in den Kugelpunkten, die zugleich im Inneren von  $(B, r)$  liegen,  $w > w_2 - d$  ist, so ist in der



Ebene außerhalb des Kreises vom Radius  $2a \sqrt{\frac{4a^2}{r^2} - 1}$   $w > w_2 - d$ , also auch  $> w_0 + d$ . Um den Punkt  $A$  kann ich einen Kreis  $(A, r_0)$  so schlagen, daß in ihm  $w < w_1 + d = w_0 - d$  ist. Jede von  $A$  ausgehende, ins Unendliche laufende Kurve trägt nun Punkte, in denen  $w = w_0$  ist. Sie liegen, wie es § 11 verlangt, alle außerhalb des Kreises  $(A, r_0)$ , aber innerhalb des Kreises  $(A, b)$ , wenn  $b = 2a \sqrt{\frac{4a^2}{r^2} - 1}$  ist. Die Menge der Punkte ist unendlich und abgeschlossen. Denn wäre in einem Häufungspunkte  $P$   $w$  nicht  $= w_0$ , so könnte ich eine Umgebung herstellen, in der er ebenfalls nicht  $= w_0$  wäre, und  $P$  wäre dann kein Häufungspunkt. Nach § 12 folgt also, daß es in der Menge von Punkten, für die  $w = w_0$  ist, sicher zwei verschiedene gibt, in denen auch  $u$  den nämlichen Wert hat.

Für  $n = 3$  habe ich die Kugel zu betrachten

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 + (t_3 - a_3)^2 = a^2,$$

und die drei Funktionen seien nun  $w, u, v$ , statt wie früher  $y_1, y_2, y_3$  genannt. Auch jetzt muß es zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Kugel geben, in denen das Tripel  $(w, u, v)$  nicht das gleiche ist. Ich mache dieselben Annahmen und Bezeichnungen wie oben und finde dann, daß im Raume von drei Dimensionen, in den die obige Kugel stereographisch von  $B$  aus projiziert wird, in einer Kugel  $(A, r_0)$  kein Punkt liegt, für den  $w = w_0$  ist, während außerhalb  $(A, b)$  auch keiner sich befindet. In dem Hohlraume zwischen beiden liegt die unendliche abgeschlossene Menge von Punkten mit  $w = w_0$ .

Ich finde also nach § 14, daß in *zwei verschiedenen* Punkten dieser Menge neben  $w = w_0$  auch noch  $u$  und  $v$  die nämlichen Werte  $u_0$  und  $v_0$  haben.

Berichtigung zu meinem Aufsatz: „Historische Bemerkung zur Funktionentheorie“, Band 60, Seite 398 ff.

Seite 398 letzter Absatz ist vor Schröder anzuführen: Seidel (Journ. f. r. u. ang. Math. Band 73).

„ 400 Zeile 12 v. o. muß es heißen „Glieder der Reihe werden unendlich“ statt „die Funktion wird unendlich“.

„ 401 ist der letzte Satz zu streichen.

Herr Professor Landau in Berlin hatte die Güte, mich auf diese Fehler aufmerksam zu machen.