MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SULLE CURVE FONDAMENTALI

DEI SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE ALGEBRICHE,

del prof. **E. Bertini**, a Pavia.

Adunanza del 25 novembre 1888.

I sistemi lineari, a cui si riferiscono le cose seguenti, non sono tutti i possibili, ma quelli soltanto che soddisfano alla condizione *di avere i punti fondamentali* (cioè i punti comuni a tutte le curve del sistema) *affatto indipendenti fra loro*. Nella qual condizione è compresa l'altra, che i detti punti sieno a distanza finita, e quindi che una curva generica del sistema abbia r rami variabili in ogni punto fondamentale r^{uplo}, giacchè, se alcuno fosse fisso, ciò significherebbe che a quel punto è infinitamente vicino qualche altro punto fondamentale.

Inoltre supporremo che i sistemi lineari non soddisfino ad altre condizioni diverse da quelle date dalla esistenza dei punti fondamentali; il che non è alcuna limitazione nell'argomento del presente lavoro. Infatti, se al sistema dato si sostituisce l'altro nel quale sono tralasciate le dette condizioni, non variano manifestamente le proprietà delle curve fondamentali.

Dimostreremo qui, con procedimento direi quasi elementare, varie proprietà delle curve fondamentali, e in particolare una (n° 10), finora non osservata, dalla quale si trae, in modo molto semplice, la dimostrazione di un notevole teorema dovuto a Cremona (*)

I.

1. Rappresenti S un sistema lineare, ∞^{α}, di curve di genere p e ordine n, avente punti fondamentali r_1^{uplo}, r_2^{uplo}, ... in punti, di cui indicheremo le posizioni (affatto indipendenti) con 1, 2, ... Una curva generica del sistema sia semplice (cioè irriduttibile) (**); e suppongasi $\alpha > 1$, perchè le considerazioni seguenti non sono applicabili ai fasci. Sussistono evidentemente le due relazioni

$$(1) \qquad \sum r_i^2 = n^2 + 1 - p - \alpha$$

$$(2) \qquad \sum r_i = 3n - 1 + p - \alpha.$$

Due (o più) punti fondamentali i, j di una stessa moltiplicità per una curva generica del sistema, tali cioè che sia $r_i = r_j$, si diranno *equimultipli*; e *tutti* quelli (due almeno) di una stessa moltiplicità si dirà che costituiscono un *gruppo*. Un punto fondamentale, unico della sua moltiplicità, si chiamerà *isolato*.

2. *Curva fondamentale* del sistema lineare è ogni curva semplice che non incontri in punti variabili una curva generica del sistema stesso. Una tal curva si indicherà in seguito col simbolo $[m, s_i]$, se m è il suo ordine e sono s_1, s_2, ... ordinatamente le sue moltiplicità nei punti fondamentali 1, 2, ... Per la definizione data si avrà

(*) Questo teorema fu trovato dal Cremona per induzione [§ 25 della Nota II^a sulle *Trasformazioni geometriche delle figure piane* (*Memorie dell'Accad. delle Scienze di Bologna*, serie 2^a, tomo V.)], e poi fu dimostrato rigorosamente da Clebsch (*Mathem. Annalen*, t. IV, p. 494-496). La dimostrazione di Clebsch fu riprodotta con alcune modificazioni nel n° 30 delle *Mélanges sur les transformations géométriques des figures planes* (*Bulletin des sciences math. et astron.*, série I, tome V, année 1873).

(**) Cfr. la mia Nota *Sui sistemi lineari* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, vol. XV, serie II, pag. 24).

la relazione

$$(3) \qquad \sum s_i r_i = mn.$$

Se una curva composta non incontra in punti variabili una curva generica del sistema lineare, le curve semplici che la compongono godono della stessa proprietà e sono quindi fondamentali.

Si chiamerà *gruppo* di curve fondamentali l'insieme di *tutte* le curve fondamentali (due almeno) di uno stesso ordine; e curva *isolata* una curva fondamentale unica del suo ordine.

3. *Una curva fondamentale è determinata dalle sue moltiplicità nei punti fondamentali.* Giacchè, se non fosse, per un punto arbitrario passerebbero (almeno) una di tali curve e una curva di S, semplici amendue, e quindi, per la (3), coincidenti. Allora, avendosi, per la stessa (3), $\Sigma r_i^2 = n^2$, il sistema S sarebbe un fascio di curve (razionali).

4. Ne risulta, i punti fondamentali essendo affatto indipendenti fra loro, che per una curva fondamentale $[m, s_i]$ si ha

$$\frac{m(m+3)}{2} = \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2}.$$

Ponendo

$$p' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

si ha quindi

$$\sum s_i^2 = m^2 + 1 - p'$$

$$\sum s_i = 3m - 1 + p'.$$

Ora le curve di S passanti per un punto arbitrario della curva fondamentale $[m, s_i]$, si spezzano, per la (3), in questa curva e in un sistema residuo S', il quale è $\infty^{\alpha-1}$. Ma, per rigore, deve farsi l'ipotesi che la curva fondamentale possa staccarsi β volte ($\beta \geqq 1$); e allora una curva generica di S' sarà di ordine $n - \beta m$ ed avrà il punto fondamentale i^{esimo} multiplo secondo $r_i - \beta s_i$. La qual ultima affermazione segue dall'osservare che, se la moltiplicità fosse $> r_i - \beta s_i$, aggiungendo ad S' la curva fondamentale β volte, si otterrebbe un sistema (appartenente ad S), $\infty^{\alpha-1}$, di curve aventi nel punto i^{esimo} una moltiplicità $> r_i$, il che condurrebbe alla conseguenza che nel punto stesso una curva generica di S avrebbe tutte le tangenti fisse. Inoltre il sistema S' non può soddisfare a condizioni che non sieno conseguenza di quelle espresse dai detti punti $(r_i - \beta s_i)^{upli}$, giacchè se ne esistessero altre indipendenti, tralasciandole, si avrebbe un sistema più che $\alpha - 1$ volte infinito, e quindi, aggiungendo la curva fondamentale β volte, si avrebbe un sistema (almeno) ∞^{α}, avente tutte le particolarità di S, il che non può essere. Adunque il sistema S' è della stessa specie di S e si ha la relazione

$$2(\alpha - 1) + \sum (r_i - \beta s_i)(r_i - \beta s_i + 1) = (n - \beta m)(n - \beta m + 3),$$

cioè, per le (1), (2), (3) e per le due formole precedenti,

$$-2 - \beta(\beta + 1)(p' - 1) = 0.$$

Dunque deve essere $p' < 1$ e però $p' = 0$, e allora $\beta = 1$. Si conclude che *una curva fondamentale è razionale* (*) : e inoltre che una curva fondamentale non può avere punti multipli fuori dei punti fondamentali del sistema e che si stacca una volta sola da una curva del sistema obbligata a passare per un suo punto.

Cioè si ha per una curva fondamentale $[m, s_i]$

$$\sum s_i^2 = m^2 + 1 \tag{4}$$

$$\sum s_i = 3m - 1 \tag{5}$$

(*) Per la rigorosa dimostrazione di questo teorema il Caporali accenna ad un'ulteriore limitazione per il sistema lineare, oltre quella già ammessa [Cfr. Nota al n° 2 della Memoria · *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve piane algebriche* (*Memorie di Geometria di* E. Caporali, Napoli, 1888 — pag. 173)]. Risulta dalla dimostrazione qui fatta che quella ulteriore limitazione non occorre.

e, per il sistema S',

$$\sum_i (r_i - s_i)^2 = (n - m)^2 + 2 - p - \alpha$$

$$\sum_i (r_i - s_i) = 3\,(n - m) + p - \alpha\,;$$

onde le curve variabili di S, S' sono dello stesso genere.

La curva fondamentale $[m, s_i]$ e una curva generica di S' si segano in

$$m(n - m) - \sum_i s_i(r_i - s_i) = 1$$

punto variabile.

5. *Se la moltiplicità di un punto fondamentale i è maggiore di quella di un altro punto fondamentale j; sarà, per una curva fondamentale qualsivoglia $[m, s_i]$, la moltiplicità nel primo punto maggiore o eguale a quella nel secondo:* cioè, se $r_i > r_j$, sarà $s_i \geqq s_j$. Giacchè se fosse $s_i < s_j$ e quindi

$$\frac{s_i(s_i+1)}{2} + \frac{s_j(s_j+1)}{2} - \frac{(s_i+1)(s_i+2)}{2} - \frac{(s_j-1)s_j}{2} = s_j - s_i - 1 \geqq 0,$$

potremmo considerare una curva C di ordine m (semplice o composta) avente nei punti $1, 2, \ldots$ le stesse moltiplicità di $[m, s_i]$, salvo che in i la moltiplicità $s_i + 1$ e in j la moltiplicità $s_j - 1$. Questa curva C (variabile in una $\infty^{s_j - s_i - 1}$) segherebbe una curva generica di S in un numero di punti dato da

$$nm - r_1 s_1 - r_2 s_2 - \ldots - r_i(s_i + 1) - \ldots - r_j(s_j - 1) - \ldots = r_j - r_i < 0,$$

il che è assurdo.

Se si suppone $r_i = r_j$ ed $s_i < s_j$ la considerazione precedente non conduce ad alcuno assurdo. Si trova anzi che C è fondamentale e quindi deve essere determinata (n° 3), cioè deve aversi $s_j - s_i - 1 = 0$. Troveremo in seguito questa proprietà con altre che la completano, per diversa via (n° 8).

6. Sieno $[m, s_i]$ ed $[m', s'_i]$ due curve fondamentali qualunque. Si consideri una curva di ordine $m + m'$ avente nel punto fondamentale i^{esimo} la moltiplicità $s_i + s'_i$. Per questa curva il numero delle condizioni ancora disponibili è, in virtù delle (4), (5),

$$\frac{(m+m')(m+m'+3)}{2} - \sum \frac{(s_i+s'_i)(s_i+s'_i+1)}{2} = mm' - \sum s_i s'_i$$

Se adunque fosse $mm' - \Sigma s_i s_i > 0$, siccome dalla (3) segue

$$\sum (s_i + s'_i) r_i = (m + m') n,$$

si avrebbe una curva variabile, semplice o composta (di cui l'insieme delle due curve fondamentali costituirebbe una posizione particolare), che segherebbe una curva generica di S nei soli punti fondamentali: la qual cosa contraddice alle proprietà del n° 2. Adunque si ha

$$(6) \qquad \sum s_i s'_i = mm',$$

cioè : *due curve fondamentali si segano soltanto in punti fondamentali.*

7. *Se l'ordine di una curva fondamentale* $[m, s_i]$ *è maggiore dell'ordine di un'altra curva fondamentale* $[m', s'_i]$; *sarà, in un punto fondamentale qualsivoglia, la moltiplicità della prima curva maggiore o eguale a quella della seconda;* cioè se $m > m'$, sarà $s_i \geqq s'_i$. In vero, consideriamo una curva C, di ordine m', avente nei punti 1, 2, ... le stesse moltiplicità di $[m', s'_i]$, tranne che nel punto i la moltiplicità $s'_i - 1$.

Questa curva C [per essere $\frac{s'_i(s'_i + 1)}{2} - \frac{(s'_i - 1)s'_i}{2} = s'_i$] varia in una

$\infty^{s'_i}$ e sega la curva $[m, s_i]$ in

$$mm' - s_1 s'_1 - s_2 s'_2 - \ldots - s_i(s'_i - 1) - \ldots = s_i$$

punti variabili. Ora, se fosse $s_i < s'_i$, la curva $[m, s_i]$ dovrebbe coincidere o far parte di quella curva C che fosse condotta per s'_i punti della stessa curva $[m, s_i]$; il che non può essere, essendo $m' < m$.

L'assurdo cessa se, essendo sempre $s_i < s'_i$, sia $m = m'$. Allora la curva C, condotta per $s_i + 1$ punti di $[m, s_i]$ deve coincidere con questa curva e quindi (n° 3) essere determinata; cioè deve aversi $s'_i = s_i + 1$: il che di nuovo rientra in una proprietà che dimostreremo nel n.° seguente.

8. Consideriamo due curve fondamentali (distinte) dello stesso ordine m e sieno $[m, s_i]$, $[m, s'_i]$ Sussistono le relazioni (4), (6); cioè

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} m^2 + 1 &= \sum s_i^2 \\ m^2 + 1 &= \sum s_i'^2 \\ m^2 &= \sum s_i s'_i. \end{aligned} \right.$$

Dalla somma delle due prime sottraendo il doppio della terza, si trova

$$2 = \sum (s_i - s'_i)^2,$$

il secondo membro della quale è una somma di numeri interi positivi. Segue, non potendo essere $(s_i - s'_i)^2 = 2$, che deve essere $(s_i - s'_i)^2 = 1$ per *due* valori di i ed $(s_i - s'_i)^2 = 0$ per tutti gli altri valori di i. Quei due valori di i sieno, ad esempio, 1, 2: e si avrà

$$(B) \qquad \left\{ \begin{aligned} s_1 - s'_1 &= \varepsilon \\ s_2 - s'_2 &= \varepsilon' \\ s_i - s'_i &= 0 \qquad\qquad (i = 3, 4, \ldots), \end{aligned} \right.$$

ove ε, ε' rappresentano ciascuno ± 1. Ma la (3) dà

$$nm = \sum s_i r_i \,, \quad nm = \sum s'_i r_i$$

e sottraendo, per le (B),

$$r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon' = 0 ,$$

da cui $\varepsilon = -\varepsilon'$, $r_1 = r_2$ (*) Infine dalla prima delle (A) sottraendo la terza e tenendo presenti le (B), si ricava

$$1 = s_1 \varepsilon + s_2 \varepsilon' = (s_1 - s_2) \varepsilon ;$$

onde se $\varepsilon = 1$: $\qquad s_2 = s_1 - 1$

se $\varepsilon = -1$: $\qquad s_2 = s_1 + 1$.

Si conclude che *due curve fondamentali dello stesso ordine hanno in ogni punto fondamentale la stessa moltiplicità, salvo che in due punti fondamentali equimultipli. Se una curva ha in uno di questi la moltiplicità* s, *avrà nell'altro punto la moltiplicità* $s \pm 1$, *e l'altra curva avrà ordinatamente negli stessi due punti le moltiplicità* $s \mp 1$, s *(corrispondendosi i segni inferiori e superiori).*

Possiamo fissare arbitrariamente che abbia luogo uno qualunque dei due casi (per es. quello in cui le ricordate moltiplicità sono rispettivamente s, $s+1$; $s+1$, s) scegliendo opportune denominazioni.

9 Si indichino con C, C' le due curve fondamentali dello stesso ordine m, dianzi considerate, aventi nei punti fondamentali

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

ordinatamente le moltiplicità

$$s+1, s, s_3, s_4, s_5, \ldots (C)$$

$$s, s+1, s_3, s_4, s_5, \ldots (C').$$

(*) Anche dalla (5), cioè dalle

$$\Sigma s_i = 3m - 1, \Sigma s'_i = 3m - 1,$$

sottraendo si ha, per le (B), $\varepsilon + \varepsilon' = 0$.

Vogliamo ricercare ciò che accade pei punti del gruppo a cui appartengono 1, 2 e per gli altri gruppi di punti.

Se $r_3 = r_2 = r_1$, si consideri una curva C'' dello stesso ordine m di C, C' e avente nei detti punti fondamentali rispettivamente le moltiplicità

$$s_3,\ s,\ s+1,\ s_4,\ s_5,\ \ldots\ (C'')$$

cioè le stesse moltiplicità di C, C', colla sola differenza che nei punti 1, 2, 3 le moltiplicità sono diversamente distribuite. Questa curva C'' esiste perchè esistono C e C' e perchè i punti fondamentali sono affatto indipendenti; ed è fondamentale, perchè, essendo 1, 2, 3 equimultipli, le intersezioni di C'' con una curva generica di S sono quanto quelle di C e di C' Applicando alle due curve C', C'' il teorema del n° 8, si noti che i due punti fondamentali equimultipli, di cui è parola in quel teorema, non possono essere che 1, 2 ovvero 2, 3, giacchè in 2 la moltiplicità delle due curve è già differente e, se è eguale in 1, deve essere differente in 3 e viceversa. Ne segue, per lo stesso teorema, che deve essere $s_3 = s$ ovvero $s_3 = s+1$. Facciasi un caso, ad es., $s_3 = s$. Allora, se fosse inoltre $r_1 = r_4$, ripetendo il ragionamento fatto per C'', per una curva di ordine m avente ordinatamente nei sunnominati punti fondamentali le moltiplicità

$$s_4,\ s,\ s+1,\ s,\ s_5,\ \ldots,$$

e confrontando questa curva con C' si osserverebbe essere già diverse le moltiplicità in 2, 3, e però dovere essere, sempre per il teorema del n° 8, $s_4 = s$. Avendo supposto invece $s_3 = s+1$, avremmo concluso che si aveva $s_4 = s+1$.

Sia invece r_3 diverso da r_1 ed $r_3 = r_4$: dico che si avrà $s_3 = s_4$. Si fà un ragionamento analogo al precedente, cioè si considera una curva (d'ordine m) avente nei ricordati punti fondamentali rispettivamente le moltiplicità

$$s,\ s+1,\ s_4,\ s_3,\ s_5,\ \ldots,$$

e questa si paragona alla curva C. Le due curve hanno già nei punti 1, 2 moltiplicità diverse; onde, per il teorema del n° 8, devono averle altrove eguali e quindi deve essere $s_3 = s_4$.

Ricordando le definizioni dei n¹ 1, 2 si ha dunque questo risultato che: *ciascuna di due curve fondamentali dello stesso ordine ha in tutti i punti di un gruppo, al quale non appartengono i due punti equimultipli indicati nel teorema del* n° 8, *la stessa moltiplicità (la medesima per le due curve); mentre, se per i detti due punti una curva ha ordinatamente le moltiplicità* s, $s+1$ e *l' altra le* $s+1$, s (teorema del n° 8), *ciascuna curva ha in tutti gli altri punti del gruppo a cui essi appartengono la stessa moltiplicità* s, *ovvero* $s+1$ *(e pure la medesima per le due curve).*

Invece *una curva fondamentale isolata ha in tutti i punti di un gruppo qualunque la stessa moltiplicità* Perchè, se essendo $r_1 = r_2$, una curva fondamentale di ordine m ha in 1, 2 le moltiplicità differenti s_1, s_2, esiste un'altra curva di ordine m, diversa da quella, la quale ha in 1, 2 le moltiplicità s_2, s_1 e in tutti gli altri punti fondamentali le stesse moltiplicità della curva considerata e che è pure fondamentale e però ecc.

10. Si continui a considerare le due curve fondamentali C, C' (n° 9). e si chiami G quel particolare gruppo di punti fondamentali indicato nel teorema del n° 9. I punti fondamentali di G sieno

$$1, 2, \ldots, i$$

e, per fissare le idee, facciasi uno dei due casi possibili, cioè che le moltiplicità di C, C' sieno rispettivamente nei punti di questo gruppo, ad esempio,

$$s+1, s, s, \ldots, s \quad (C)$$

$$s, s+1, s, \ldots, s. \quad (C')$$

Sia C'' una terza curva fondamentale *qualsivoglia* di ordine m. Per C, C'' (e così per C, C') il particolare gruppo deve essere ancora G, perchè, nei punti di ogni altro gruppo C ha, per il teorema del n° 9, una medesima moltiplicità. Dunque, per lo stesso teorema, in tutti i punti di un gruppo diverso da G le due curve C, C'' (e così C, C') hanno una stessa moltiplicità, e nei punti di G la curva C'' avrà, sempre per quel teorema, una moltiplicità $s+1$ e tutte le altre s. Ma la moltiplicità $s+1$ non potrà essere in 1, nè in 2, altrimenti C'' coinciderebbe con C o con C' (n° 3). La moltiplicità $s+1$ sarà (ad es.) in 3; cioè C'' avrà in tutti i punti le stesse moltiplicità di C, C' e nei punti di G ordinatamente le moltiplicità

$$s, s, s+1, s, \ldots, s.$$

Deve essere adunque $i \geqq 3$. Viceversa, se ciò avviene, esiste sempre la curva fondamentale C'' (cfr. n° 9). Collo stesso ragionamento, avendosi una quarta curva fondamentale C''' di ordine m si dimostra che deve avere in tutti gli altri punti fondamentali le stesse moltiplicità di C, C', C'' e nei punti di G (ad esempio) le

$$s, s, s, s+1, s, \ldots, s;$$

onde deve essere $i \geqq 4$; e viceversa, se ciò accade, una tal curva C'' esiste certamente. Continuando, si conclude l'esistenza di i curve fondamentali dello stesso ordine m e di i soltanto.

Alla stessa conseguenza si arriva nell'altro caso, cioè quando C, C' abbiano nei punti di G le moltiplicità

$$s, s+1, s+1, \ldots, s+1$$

$$s+1, s, s+1, \ldots, s+1$$

ossia (ponendo $s-1$ in luogo di s) le

$$s-1, s, s, \ldots, s$$

$$s, s-1, s, \ldots, s.$$

Si ha quindi il

Teorema. — *Ogni gruppo di* i (>1) *curve fondamentali è coordinato ad un gruppo di* i *punti fondamentali. Ciascuna curva del gruppo ha in tutti i punti del gruppo coordinato la stessa moltiplicità* s, *tranne che in un punto ove ha la moltiplicità* $s+1$ *ovvero* $s-1$; *ed ha in-*

vece in tutti i punti di un gruppo non coordinato la medesima moltiplicità σ. *I numeri* s, σ *sono gli stessi per tutte le curve del gruppo* — : nel quale sono compresi i teoremi dei n[i] 6, 7.

Cioè, se (ad esempio) si ha

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_h > r_{h+1} = r_{h+2} = \ldots = r_{h+i} > r_{h+i+1} = r_{h+i+2} = \ldots = r_{h+i+k} > \ldots$$

e sono $h+1$, $h+2$, .. , $h+i$ i punti del gruppo coordinato ad un gruppo di curve, le i curve di questo gruppo avranno ordinatamente le moltiplicità

$$\begin{array}{l} \sigma, \sigma, \ldots, \sigma, s \pm 1, s, \ldots, s, \tau, \tau, \ldots, \tau, \ldots, \\ \sigma, \sigma, \ldots, \sigma, s, s \pm 1, \ldots, s, \tau, \tau, \ldots, \tau, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma, \sigma, \ldots, \sigma, s, s, \ldots, s \pm 1, \tau, \tau, \ldots, \tau, \ldots, \end{array}$$

dovendosi prendere per tutte il segno + ovvero per tutte il segno —.

Si può osservare che, per il teorema del n° 5, deve essere $\sigma > s \geqq \tau \geqq \ldots$ ovvero $\sigma \geqq s > \tau \geqq \ldots$, secondochè si prenda il segno + ovvero il segno —.

11. Non viceversa ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve. Ad es. il sistema di quartiche aventi tre punti doppi e due punti semplici fondamentali ha le tre sole rette fondamentali congiungenti i punti doppi che costituiscono un gruppo coordinato al gruppo di questi punti, ma il gruppo dei due punti semplici non ha alcun gruppo coordinato di curve fondamentali.

Sarebbe interessante ricercare le condizioni necessarie e sufficienti per le quali ha luogo la proprietà inversa della precedente. Per ora ci limitiamo qui ad un caso particolare nel quale la inversa è vera.

II.

12. Si abbia un sistema S omaloidico di curve. È noto che con esso si può costruire una trasformazione univoca fra due piani e che quindi dal sistema dato nasce un nuovo sistema omaloidico S_1. È noto inoltre che ad ogni curva fondamentale di S corrisponde un punto fondamentale di S_1 e reciprocamente; che l'ordine di una curva fondamentale e la moltiplicità del punto fondamentale corrispondente sono eguali, e infine che la moltiplicità di una curva fondamentale in un punto fondamentale di S è eguale alla moltiplicità del punto fondamentale corrispondente per la curva fondamentale corrispondente di S_1 (*). Colle quali proprietà, applicando al sistema S_1 il teorema del n° 10 e ritornando poi al sistema S, si trova facilmente che *anche ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve.*

E allora facciasi il ragionamento noto: cioè si osservi che, essendo il numero dei punti fondamentali eguale al numero delle curve fondamentali, e la totalità delle curve dei gruppi eguale alla totalità dei punti dei gruppi, deve essere il numero delle curve isolate eguale al numero dei punti isolati. Adunque, raccogliendo: — *Se un sistema omaloidico ha α_1 punti semplici, α_2 punti doppi, α_3 punti tripli, ... fondamentali, e inoltre β_1 rette, β_2 coniche, β_3 cubiche, ... fondamentali, i numeri α sono eguali ai numeri β presi nello stesso o altro ordine*—; che è il ricordato teorema di Cremona.

13. Dal quale teorema Jung ha dedotto un teorema analogo per i sistemi S che hanno il numero dei punti fondamentali (affatto indipendenti) eguale a quello delle curve fondamentali. Le considerazioni che conducono a questa generalizzazione sono le seguenti.

In primo luogo si osservi che *un sistema di punti* 1, 2, 3, 4, ..., *affatto indipendenti, sottoposti ad una trasformazione quadratica, di cui i punti fondamentali sieno tre,* 1, 2, 3, *dei punti stessi, dà origine ad un nuovo sistema di punti* 1', 2', 3', 4', ... (*di cui* 1', 2', 3' *sono omologhi di* 1, 2, 3 *e* 4', ..., *i corrispondenti di* 4, ...) *pu-*

(*) Cfr. i già citati *Mélanges sur les transformations géométriques des figures planes.*

re affatto indipendenti. Giacchè, se (ad es.) un punto $4'$ fosse successivo ad $1'$, ne seguirebbe che i punti 2, 3, 4 sarebbero in linea retta, contrariamente al supposto E in generale, ad ogni relazione di posizione fra i punti $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, . corrisponde, per la trasformazione quadratica, una relazione di posizione fra i punti 1, 2, 3, 4, . . . (*).

Un sistema lineare S sottoposto ad una trasformazione quadratica di cui i tre punti fondamentali sieno punti fondamentali di S, produrrà adunque un nuovo sistema della stessa specie (cioè a punti fondamentali pure affatto indipendenti) Si effettuino successivamente tali trasformazioni quadratiche, adoperando i tre punti fondamentali di ordine massimo e continuando fino a che si trova un sistema lineare S_1, il cosidetto sistema minimo, nel quale la somma delle moltiplicità dei tre punti fondamentali di ordine massimo non supera l' ordine delle curve del sistema. Il sistema S_1 sarà privo di curve fondamentali (**); non potrà cioè accadere il caso eccezionale (***) che presenti due punti fondamentali e una retta fondamentale (che li congiunge), *quando,* come sempre si suppone nel seguito del presente

---

(*) Se per una curva Γ di ordine k avente in 1, 2, 3, 4, . . punti t_1 uplo, t_2 uplo, t_3 uplo, t_4 uplo, . . esistessero θ vincoli, cioè delle condizioni espresse da queste moltiplicità fossero θ conseguenza delle rimanenti, sarebbe

$$\frac{k(k+3)}{2}+\gamma-\theta=\frac{t_1(t_1+1)}{2}+\frac{t_2(t_2+1)}{2}+\ldots,$$

indicando γ il numero d' infinità del sistema nel quale Γ varia (se Γ è determinata, $\gamma=0$).

La trasformata di Γ è dell'ordine $2k-t_1-t_2-t_3$, ha in 1, 2, 3, 4, . . . punti $(k-t_2-t_3)$uplo, $(k-t_1-t_3)$uplo, $(k-t_1-t_2)$uplo, t_4 uplo, . . e varia pure in una moltiplicità ∞^γ Onde, se fossero θ' i vincoli per la trasformata, si avrebbe

$$\frac{(2k-t_1-t_2-t_3)(2k-t_1-t_2-t_3+3)}{2}+\gamma-\theta'=$$

$$=\frac{(k-t_2-t_3)(k-t_2-t_3+1)}{2}+\frac{(k-t_1-t_3)(k-t_1-t_3+1)}{2}$$

$$+\frac{(k-t_1-t_2)(k-t_1-t_2+1)}{2}+\frac{t_4(t_4+1)}{2}+\ldots$$

Dalle due relazioni precedenti segue $\theta=\theta'$. Nel caso nostro è sempre $\theta=\theta'=0$.

(**) Caporali, l. c, n° 3.

(***) Caporali, l. c, n° 4.

n°, *ci limitiamo ai sistemi S dotati della proprietà che la differenza fra il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali sia zero*. Giacchè J u n g ha dimostrato (*) che questa differenza non si altera per una trasformazione cremoniana e nel detto caso eccezionale la nominata differenza sarebbe eguale ad 1. Segue poi, dall' essere quella differenza costante e dall'essere nullo il numero delle curve fondamentali di S_1, che è pure nullo il numero dei punti fondamentali di S_1: ossia S_1 è costituito da tutte le curve di uno stesso ordine μ. Onde S (come S_1) è $\infty^{\frac{\mu(\mu+3)}{2}}$; una curva variabile del sistema è di genere $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$ e due curve si segano in μ^2 punti variabili.

Consideriamo la trasformazione cremoniana che conduce da S_1 ad S: e dicansi R_1 la rete omaloidica nel piano di S_1 ed R quella nel piano di S, date dalla detta trasformazione. Un punto fondamentale di R_1 non giace sopra una curva generica di S_1 e però la curva corrispondente a quel punto per la trasformazione, curva fondamentale per R_1, è pure fondamentale per S: e reciprocamente ad una curva fondamentale di S deve corrispondere un punto, non una curva, perchè una tal curva sarebbe pure fondamentale per S_1. Ancora: una curva fondamentale di R_1 di ordine x è segata da una curva generica di S_1 in μx punti variabili e quindi le corrisponde un punto fondamentale, x^{uplo} per R e $(\mu x)^{\text{uplo}}$ per S: e reciprocamente un punto fondamentale di S deve avere per corrispondente una curva, fondamentale per R_1, e però ecc. Dunque *i punti e le curve fondamentali di R sono tutti e soli i punti e le curve fondamentali di S, eccetto che la moltiplicità di un punto fondamentale per S è μ^{upla} di quella dello stesso punto per R.*

Le proprietà del sistema R, dette nel n°. 12, si trasportano quindi immediatamente al sistema S; cioè, *per un sistema lineare (a punti fondamentali affatto indipendenti), pel quale il numero dei punti fondamentali è eguale a quello delle curve fondamentali, anche ogni gruppo di punti è coordinato ad un gruppo di curve;* e quindi: *se un tal*

(*) *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie II, tomo XV), n° 20.

sistema ha α_1 punti μ^{pli}, α_2 punti $(2\mu)^{upli}$, α_3 punti $(3\mu)^{upli}$, ... fondamentali e inoltre β_1 rette, β_2 coniche, β_3 cubiche, ... fondamentali, i numeri α sono eguali ai numeri β presi nello stesso o altro ordine (*).

14. Nel numero precedente abbiamo applicata la proprietà, dovuta a Jung, che *la differenza fra il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali di un sistema lineare S è costante per una trasformazione quadratica (epperò per una successione di esse, cioè per una trasformazione cremoniana)*. Termineremo il presente lavoro col dare di questa proprietà una dimostrazione assai semplice. Sia S il sistema primitivo, S_1 il trasformato; e dicansi f_p, f_c rispettivamente il numero dei punti fondamentali e quello delle curve fondamentali di S. Il triangolo fondamentale (nel piano di S) della trasformazione quadratica con cui si passa da S ad S_1, contenga i vertici e j lati pure fondamentali per S (potendo avere ciascuno dei numeri i, j uno dei valori 0, 1, 2, 3). I rimanenti $f_p - i$ punti fondamentali di S produrranno altrettanti punti fondamentali di S_1 e le rimanenti $f_c - j$ curve fondamentali di S, altrettante di S_1. Inoltre S_1 conterrà altri $3 - j$ punti fondamentali corrispondenti alle rette non fondamentali per S del detto triangolo (perchè queste rette sono segate in punti variabili da una curva generica di S) e altre $3 - i$ rette fondamentali corrispondenti ai punti non fondamentali per S del triangolo stesso (perchè questi punti non esistono sopra una curva generica di S): e manifestamente null'altro. Dunque S_1 possiede $f_p - i + 3 - j$ punti fondamentali ed $f_c - j + 3 - i$ curve fondamentali e la differenza di questi due numeri è $f_p - f_c$. C. D. D

Tredozio, ottobre 1888.

AGGIUNTA.—Il teorema del n° 10 mostra che ogni gruppo di i curve fondamentali è coordinato ad un gruppo di i punti fondamentali *e ad uno solo*.

Si aggiunga che *non possono due gruppi di curve fondamentali es-*

(*) Jung, l. c., n° 52.

sere coordinati al medesimo gruppo di punti. In vero, ritenendo l'esempio del detto n° 10, abbiasi un'altra curva fondamentale d'ordine $m' \left(\gtrless m\right)$ avente nei punti

$$(A) \qquad h+1,\ h+2,\ \ldots,\ h+i$$

ordinatamente moltiplicità

$$\theta',\ \theta,\ \ldots,\ \theta.$$

Questa curva sega la prima curva del gruppo ivi considerato in

$$\theta'(s \pm 1) + (i-1)s\theta + X = mm'$$

punti, se si indica con X il numero totale delle intersezioni raccolte nei punti fondamentali diversi dai punti (A); e parimenti sega ogni altra curva dello stesso gruppo in

$$\theta' s + \theta(s \pm 1) + (i-2)s\theta + X = mm'$$

punti. Sottraendo una relazione dall'altra, risulta

$$\theta' = \theta;$$

il che dimostra che la curva fondamentale d'ordine m' considerata non appartiene ad un gruppo coordinato al gruppo (A), giacchè in tal caso doveva essere $\theta' = \theta \pm 1$.

Pavia, 30 dicembre 1888.

E. Bertini.