

Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche.

Von

HEINRICH TIETZE in Brünn (Mähren).

Der folgende Aufsatz zerfällt in zwei Teile. Den Ausgangspunkt bildet im ersten Teil die Betrachtung jener Entwicklungen einer reellen Zahl ω in einen ganzzahligen Kettenbruch, bei denen bei jedem einzelnen Schritt der Entwicklung nach Belieben entweder der kleinste positive Rest oder der absolut kleinste negative Rest gewählt wird. Diese Verallgemeinerungen der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung, bei der durchgehends der kleinste positive Rest zu wählen ist, wurden bereits in älterer Zeit und zwar insbesondere von Lagrange*) behandelt. Dabei ist jedoch die Frage nach der Konvergenz des bei irrationalem ω erhaltenen unendlichen Kettenbruches, die von Lagrange behauptet, aber nicht ausreichend bewiesen wird, ferner die nach dem Werte des Kettenbruches meines Wissens bis jetzt nicht allgemein**) durchgeführt worden. Das gleiche gilt von der Frage, ob für die sich ergebenden ganzzahligen Kettenbrüche

$$(1) \quad b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \frac{\varepsilon_2}{b_2} + \dots \quad (\varepsilon_v = \pm 1)$$

die offenbar notwendig erfüllten Bedingungen:

$$(2) \quad b_v \geq 1; \quad b_v \geq 2, \text{ wenn } \varepsilon_{v+1} = -1 \quad (v = 1, 2, \dots)$$

auch zur vollständigen Charakterisierung hinreichen. Es gelingt leicht,

*) Lagrange, Additions aux éléments d'algèbre d'Euler (Œuvres, t. VII, S. 3). Nr. 3—13 (deutsch herausgeg. von H. Weber in Ostwalds Klassikern, Nr. 103); vgl. auch Additions aux mémoires etc., Remarque III, (Œuvres t. II, p. 622 et suiv.). Die Abweichungen von der regelmäßigen Entwicklung werden besonders für den Zweck der Abkürzung des Entwicklungsverfahrens in Betracht gezogen. Der Fall rationaler ω in neuerer Zeit behandelt bei Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von K. Hensel, 1. Band, 9. Vorl., §§ 3, 4 (S. 113) und K. Th. Vahlen, Journ. f. Math. 115.

**) Über *spezielle* Fälle von besonderem Interesse vgl. die in § 1 angeführten Arbeiten von Hurwitz, Minkowski, Mc Kinney.

diese einfachen Fragen unter Heranziehung der von F. Klein*) mitgeteilten geometrischen Deutung der Kettenbrüche zu erledigen, die sich also auch als anwendbar auf Konvergenz- sowie auf Irrationalitätsfragen erweist. Nebenbei ergibt sich (2) als hinreichend für die Konvergenz jedes Kettenbruches (1) mit beliebigen reellen Teilennern b_v **).

Der zweite Teil des folgenden Aufsatzes knüpft daran an, daß die bei den vorgenannten Konvergenzuntersuchungen angewendeten Betrachtungen teilweise übertragbar erscheinen auf gewisse reelle Kettenbrüche

$$(3) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$$

die der Bedingung

$$(4) \quad \left| \frac{a_v}{b_v} \right| \leq 1 \quad (v = 1, 2, \dots)$$

genügen. Besondere Bedeutung kommt dabei dem Falle zu, daß die weitergehende Bedingung

$$|b_v| \geq |a_v| + 1,$$

d. h. jenes Konvergenzkriterium erfüllt ist, das von A. Pringsheim***) aufgefunden und bewiesen worden ist (und zwar nicht nur für die hier allein betrachteten Kettenbrüche mit reellen, sondern auch für solche mit komplexen Elementen) und für das sich so eine einfache geometrische Deutung und ein geometrischer Beweisgang ergeben. Durch die Konvergenzbedingung (2) für Kettenbrüche (1) wird es nahegelegt, darüber hinaus unter jenen Kettenbrüchen (3), für welche

$$(5) \quad b_v \geq |a_v| > 0; \quad b_v \geq |a_v| + 1, \quad \text{wenn } a_{v+1} < 0$$

erfüllt ist, nach Klassen von konvergenten Kettenbrüchen zu suchen. Durch Abänderung der Bedeutung der auftretenden geometrischen Figuren wird die Konvergenz des zu untersuchenden Kettenbruches auf die eines anderen (nicht äquivalenten) mit nichtnegativen Gliedern und Teilzählern a_v , die alle gleich +1 sind, zurückgeführt, eines Kettenbruches also, für dessen Konvergenz bekannte Kriterien zur Verfügung stehen. Ihre Verwendung ergibt†) neben anderen Konvergenzkriterien, daß unter den (5)

*) Göttinger Nachrichten 1895 und „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie“, Autogr. Vorlesungen, I, herausgeg. von A. Sommerfeld, „Einleitung“.

**) Ein Vorbericht über den Inhalt dieses I. Teiles im Anzeiger d. Wiener Akad., 1909 (Nr. XVI), S. 269.

***) Sitzungsber. d. bayer. Akad., math.-phys. Cl. 28 (1898) (Über die Convergenz unendlicher Kettenbrüche, § 3). Vgl. auch dieselben Sitzungsber. 35 (1905), S. 359. Über die eine gewisse Ähnlichkeit mit (2) zeigenden Spezialfälle dieses Kriteriums, die von S. Pincherle (1889) und D. Gambioli (1890) aufgestellt wurden, vgl. Enc. (éd. franç.) t. I. vol. 1 (I 4, note 272).

†) Vgl. einen in den Monatsheften f. Math. u. Phys. erscheinenden Aufsatz (Einige Kettenbruchkonvergenzkriterien).

genügenden Kettenbrüchen alle jene, für die überdies sämtliche $|a_n|$ über einer von ν unabhängigen positiven Zahl liegen, insbesondere also alle ganzzahligen konvergieren. Damit läßt sich auf diese letzteren der zuerst von Pringsheim*) wirklich erbrachte Beweis des Legendreschen Irrationalitätssatzes**) übertragen und liefert einen Irrationalitätssatz für ganzzahlige unendliche Kettenbrüche, der sowohl den Legendreschen als den von O. Stolz***) gegebenen (der sich auf den Fall $b_n \geq a_n > 0$ bezieht) umfaßt†).

In einem Schlußabschnitt wird einer Verallgemeinerung der Bedingung (4), ferner der durch den Jacobischen Algorithmus dargestellten Verallgemeinerung der Kettenbrüche und der geometrischen Deutung dieses Algorithmus gedacht; endlich darauf hingewiesen, was meines Wissens noch nicht geschehen ist, daß die Lehre von den Kettenbrüchen im wesentlichen zusammenfällt mit der Behandlung einer Folge von Elementen eines Gebildes erster Stufe, die durch Angabe der Doppelverhältnisse von je vier aufeinanderfolgenden Elementen bestimmt ist, daß also den Kettenbruchalgorithmen ein projektiver Charakter zukommt.

I. Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen.

§ 1.

Die im folgenden untersuchten Kettenbruchentwicklungen erhält man, indem man die zu entwickelnde reelle Zahl ω darstellt in der Gestalt

$$\omega = b_0 + r_1,$$

wobei b_0 eine ganze Zahl und r_1 eine dem Intervall $-1 < r_1 < 1$ angehörende Zahl bedeutet. Sofern ω nicht selbst ganz ist, besteht für diese Zerlegung die Wahl zwischen zwei Arten, von denen die eine einen positiven, die andere einen negativen Rest r_1 liefert††). Analog werde allgemein, wenn $r_n \neq 0$ ist,

*) In der erstgenannten Abhandlung, § 4.

**) Legendre, *Éléments de Géométrie*, Note IV. Eine neuere deutsche Ausgabe dieser Note bei F. Rudio, *Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels*.

***) Allgemeine Arithmetik, 2, S. 297.

†) Man findet diesen Satz bereits ausgesprochen bei Stern, *Journ. f. Math.* 11, S. 40. Der von Stern geführte Beweis gründet sich jedoch auf die in einem vorhergehenden Teil seiner Abhandlung (*Journ. f. Math.* 10, S. 366) ausgesprochene, aber nur angeblich bewiesene Konvergenz. Den gleichen Einwänden unterliegt die dort gegebene Behandlung der speziellen Fälle durchwegs positiver Teilzähler (der Stolzsche Fall) und durchwegs negativer Teilzähler.

††) Die beiden Fälle von Lagrange (vgl. Binet, *Journ. d. math.* 6, S. 451) als „division en dedans“ und „division en dehors“ oder „en excès“ unterschieden.

und

$$|r_\nu| = \varrho_\nu, \quad r_\nu = \varepsilon_\nu \varrho_\nu$$

$$\frac{1}{\varrho_\nu} = b_\nu + r_{\nu+1}$$

gesetzt ($\nu=1, 2, \dots$), wobei wieder b_ν eine ganze Zahl und $-1 < r_{\nu+1} < 1$ sein soll. Stets und nur dann, wenn ω rational ist, bricht das Verfahren ab und liefert einen endlichen Kettenbruch*)

$$(6) \quad \omega = \left[b_0; \frac{\varepsilon_\nu}{b_{\nu-1}} \right]_1^n;$$

andernfalls erhält man formal den unendlichen Kettenbruch

$$(7) \quad \left[b_0; \frac{\varepsilon_\nu}{b_{\nu-1}} \right]_1^\infty.$$

Aus $\frac{1}{\varrho_\nu} > 1$ folgt das Erfülltsein von (2), sowie für den endlichen Kettenbruch (6), wenn $n \geq 1$ ist:

$$(8) \quad b_n \geq 2.$$

Durch ω und die Festlegung der Vorzeichenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ **) ist die einzelne Kettenbruchentwicklung völlig bestimmt***). Auf die in der Einleitung erwähnten, bisher genauer studierten speziellen Entwicklungen in regelmäßige, in reduziert-regelmäßige, in Kettenbrüche nach nächsten Ganzen und auf die allgemeineren „ λ -Entwicklungen“ führen die folgenden besonderen Festsetzungen der Vorzeichenfolge der ε_ν : a) alle $\varepsilon_\nu = +1$, d. h. anders ausgedrückt $0 \leq r_\nu < 1$; b) alle $\varepsilon_\nu = -1$ ($-1 < r_\nu \leq 0$)†);

*) Bezüglich der im folgenden verwendeten, von Pringsheim eingeführten Bezeichnungen vgl. Sitzungsber. d. bayer. Akad. 28 (1898), S. 296 ff. und Encykl. I A 3, Nr. 45; Enc. (éd. franç.), t. I, vol. 1 (I 4, 26).

**) D. h. durch Angabe der Klasse des Kettenbruches gemäß der Klasseneinteilung Ludwig Seidels (Abhandl. d. math. phys. Kl. d. bayer. Akad. 7 (1855), S. 575 [Zusatz bei d. Korr.].

***) Es gibt ihrer offenbar für jede irrationale Zahl ω unendlich viele von der Mächtigkeit des Kontinuums. Für ein rationales $\omega = p:q$ ist die Anzahl der Entwicklungen, wie Vahlen (a. a. O., S. 227) gezeigt hat, gleich q .

†) Vgl. Enc., I A 3, S. 126, 130; Enc. (éd. franç.), t. I, vol. 1 (I 4), S. 292, 293 [für spezielle ω , nämlich Quadratwurzeln aus ganzen positiven Zahlen, von Stern, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 12, behandelt (Zusatz b. d. Korr.)]. Die Festsetzung $-1 \leq r_\nu < 0$ würde für jede Zahl ω einen unendlichen Kettenbruch, bei

rationalem ω offenbar mit der Periode $-\frac{1}{2}$, liefern. Diese Kettenbruchentwicklung wäre also für die Anwendung der von G. Cantor (J. f. Math. 84, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, § 2) angegebenen Methode, die Gesamtheit aller reellen Zahlen- n -tupel auf die aller reellen Zahlen umkehrbar eindeutig abzubilden, besonders geeignet, da sie keine ergänzende Betrachtung für die rationalen Zahlen erforderlich macht.

c) Festlegung der ε_v durch die Forderung $-\frac{1}{2} \leq r_v < \frac{1}{2}$ *); bzw. d) durch die allgemeinere Forderung $-1 + \lambda \leq \varepsilon_{v-1} r_v < \lambda$, wo $\varepsilon_0 = \operatorname{sgn} \omega$ zu setzen und unter λ eine der Bedingung $0 < \lambda \leq 1$ genügende Zahl zu verstehen ist. **) Der Fall e) der Diagonalkettenbrüche H. Minkowskis ***) ist durch Festsetzungen, die sich nicht direkt auf die ε_v oder r_v beziehen, charakterisiert. Es ist klar, daß durch diese speziellen Fälle a) bis e) die Gesamtheit der hier in Betracht genommenen Entwicklungen nicht erschöpft ist, da man leicht Entwicklungen angeben kann, in denen die Reste r_v (bzw. $\varepsilon_{v-1} r_v$) nicht wie bei a) bis d) sich in ein Intervall der Länge 1 einschließen lassen und die auch keine Diagonalkettenbrüche sind. †)

Die allgemeinen hier besprochenen Kettenbruchentwicklungen ††) mögen bisweilen zur Abkürzung „unregelmäßige“ genannt werden und darunter im weiteren Sinne auch der Spezialfall a) mit gemeint werden. Es ist zunächst zu zeigen, daß jeder durch eine solche Entwicklung erhaltene Kettenbruch (7) konvergiert; dann, daß ω sein Wert ist.

*) A. Hurwitz, Acta math. 12 (1889). Diese Entwicklung ist für spezielle Irrationalitäten ω (Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen) vorher von C. Minnigerode, Göttinger Nachr. 1873, S. 160 behandelt, für rationale ω schon früher häufig erwähnt worden. Durch die im Text angegebene Ungleichung für r_v ist die Hurwitzsche Festsetzung nicht ganz genau wiedergegeben, was durch die von Hurwitz gewählte Form des Kettenbruches mit lauter Teilzählern -1 (statt der hier gewählten Form mit positiven Teilnennern) hervorgerufen wird. Genau wäre zu schreiben

$$-\frac{1}{2} \leq (-1)^{v-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{v-1} r_v < \frac{1}{2},$$

was jedoch nur für die Entwicklungen gewisser rationaler Zahlen einen Unterschied in den letzten Gliedern bedeutet. Eine analoge Bemerkung wäre aus dem gleichen Grunde bei der unter d) angeführten Ungleichung zu machen.

**) Th. E. McKinney, Americ. Journ. of Math., vol. 29 (1907). Die Arbeit knüpft an die vorgenannte von Hurwitz an, in der die Spezialfälle $\lambda = \frac{1}{2}$ (s. o.) und $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ („Kettenbruchentwicklung zweiter Art“) behandelt sind. Andere Verallgemeinerungen von c), bei denen die Intervalle für $\frac{1}{e_v}$, denen dasselbe b_v entspricht, zum Unterschiede von d) sämtlich gleichartig sind, ergeben sich durch eine Forderung von einer der Gestalten $\lambda - 1 \leq r_v < \lambda$, $\lambda' - 1 < r_v \leq \lambda'$, unter λ, λ' Zahlen der Intervalle $0 < \lambda \leq 1$, $0 \leq \lambda' < 1$ verstanden.

***) Math. Ann. 54 (1900) und „Diophantische Approximationen“, II. Kap., §§ 6–10.

†) Z. B. jede mit $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \dots$ beginnende Entwicklung einer Zahl ω

zwischen $\frac{5}{3}$ und 2, wie etwa $\omega = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

††) Andere Entwicklungen, die hier nicht inbegriffen sind, betrachtet Stolz, Allgemeine Arithmetik 2, S. 298.

§ 2.

Für die Zähler A_v und Nenner B_v der Näherungsbrüche eines Kettenbruches (6) oder (7) bestehen die bekannten Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_{-2} &= 0, \quad A_{-1} = 1, \quad A_v = \varepsilon_v A_{v-2} + b_v A_{v-1} \\ B_{-2} &= 1, \quad B_{-1} = 0, \quad B_v = \varepsilon_v B_{v-2} + b_v B_{v-1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} (v=0, 1, 2, \dots) \\ \varepsilon_0 = +1 \end{array} \right)$$

Diese liefern für die Punkte P_v mit den Koordinaten $x = B_v$, $y = A_v$ bezüglich eines ebenen Parallelkoordinatensystems mit dem Ursprung O die Rekursion*)

$$(9) \quad P_v = \varepsilon_v P_{v-2} + b_v P_{v-1},$$

wobei — wie stets im folgenden — derartige Relationen zwischen Punkten P zu verstehen sind als Relationen zwischen den Vektoren OP . Dabei bedeutet, wenn P die Koordinaten (x, y) hat, αP den Punkt $(\alpha x, \alpha y)$. Unsere Behauptung geht dahin, daß für jeden durch unregelmäßige Entwicklung von ω gewonnenen unendlichen Kettenbruch (7) die Richtungen der Vektoren OP_v eine Grenzrichtung haben und daß diese durch die Gerade $y = \omega x$ gegeben ist. Die folgende zum Nachweis dieser Behauptung angestellte Konvergenzuntersuchung möge, wie dies durch den Verlauf der Untersuchung nahegelegt wird, von vorneherein ausgedehnt werden auf alle den Bedingungen**)

$$(10) \quad \varepsilon_v = \pm 1; \quad b_v \geq 1; \quad \varepsilon_{v+1} = +1, \text{ wenn } b_v < 2 \quad (v \geq 1)$$

genügenden Kettenbrüche (7) mit beliebigen, auch nicht-ganzzahligen b_v .

Zum Ausgangspunkt nehmen wir die Bemerkung, daß durch die Lage der „Näherungspunkte“ P_i für $i \leq v$ ($v \geq 0$), anders gesagt durch die Teilzähler und -nenner bis zum Index v inklusive, sich zufolge (9) und $b_{v+1} \geq 1$ folgende Einschränkung für die mögliche Lage von P_{v+1} ergibt: P_{v+1} muß auf einem der beiden Halbstrahlen u_v, v_v liegen, die von dem Punkt R_v , bzw. Q_v in der durch den Vektor OP_v (auch bezüglich des Richtungssinnes) gekennzeichneten Richtung ausgehen, hierbei unter R_v, Q_v die Punkte

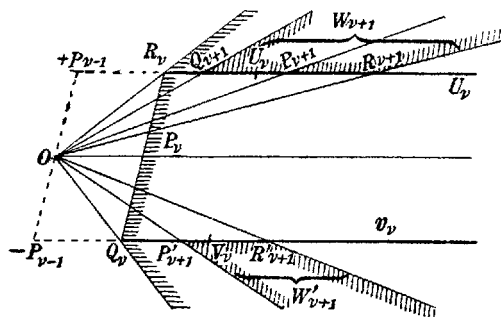
$$(11) \quad R_v = P_v + P_{v-1}, \quad Q_v = P_v - P_{v-1} \quad (v \geq 0)$$

verstanden. Die Richtung OP_{v+1} gehört also dem Winkel $R_v O Q_v$ an, zu dem auch die durch die Schenkel gegebenen Richtungen hinzugerechnet werden. Für den Fall, daß $v > 0$ und $b_v < 2$ ist, können wir wegen (10)

*) Bezüglich der Eigenschaften dieser geometrischen Deutung der Näherungsbrüche im Falle $\varepsilon_v = +1$ vgl. F. Klein, a. a. O.

***) (2) ist hierbei etwas modifiziert wiedergegeben. Noch anders könnte man dafür sagen: b_v und $b_v + \varepsilon_{v+1} \geq 1$ ($v \geq 1$).

überdies sagen, daß P_{v+1} notwendig auf dem Halbstrahl u_v liegen, die Richtung OP_{v+1} also dem Winkel $R_v OP_v$ angehören muß. Je nachdem nun $b_v \geq 2$ oder < 2 ist, werde der Winkel $R_v OQ_v$ oder der Winkel $R_v OP_v$ mit \mathfrak{B}_v bezeichnet ($v \geq 1$).



Dabei möge vorübergehend zur Abkürzung der Ausdrucksweise der Index v im ersten Falle als regulär, im zweiten als singulär bezeichnet werden. Mit \mathfrak{B}_0 werde, je nachdem $\varepsilon_1 = +1$ oder -1 ist, der Winkel $R_0 OP_0$ oder $Q_0 OP_0$, dabei der Index $v = 0$ als singulär bezeichnet.

Jeder der Winkel \mathfrak{B}_{v+1} ist ein Teil des vorhergehenden \mathfrak{B}_v . Denn wenn wir mit U_v, V_v die Punkte $R_v + P_v, Q_v + P_v$ bezeichnen und zunächst $\varepsilon_{v+1} = +1$ annehmen*), so liegen auf dem Halbstrahl u_v im Falle $b_{v+1} \geq 2$ die Punkte P_{v+1} und R_{v+1} noch über U_v hinaus, nur daß allenfalls $P_{v+1} = U_v$ sein kann. Es kommt also sicher Q_{v+1} auf den Halbstrahl u_v zu liegen und fällt im äußersten Falle mit R_v zusammen. Wenn aber $b_{v+1} < 2$ ist, so liegen sicher P_{v+1} und R_{v+1} auf u_v , und zwar P_{v+1} auf der Strecke $R_v U_v$ mit Ausschluß von U_v . Der Fall $\varepsilon_{v+1} = -1$ erledigt sich ganz ebenso, nur daß v_v, Q_v, V_v an die Stelle von u_v, R_v, U_v treten. Im folgenden werde der Einfachheit halber $\varepsilon_1 = +1$ angenommen.

Für den Nachweis der Kettenbruchkonvergenz ist es hinreichend, zu zeigen, daß die Winkel \mathfrak{B}_v mit wachsendem v schließlich beliebig klein werden. Hierzu werde die aus dem Winkel \mathfrak{B}_v durch Wegnehmen des Dreieckes $R_v OQ_v$ ($R_v OP_v$) im Falle eines regulären (singulären) v entstehende Figur betrachtet, die als das unendliche Dreiseit ϑ_v bezeichnet werde ($v \geq 0$)**). Zu ϑ_v mögen die Strecke und die zwei Halbstrahlen, die ϑ_v begrenzen, sämtlich hinzugerechnet werden. Jedes ϑ_{v+1} ist ein Teil von ϑ_v . Für alle $v \geq 0$ liegen die Punkte P_v, R_v und, sofern v regulär ist, auch Q_v im Winkel \mathfrak{B}_0 , und zwar speziell im Dreiseit ϑ_0 . Wird nun das System der zugrunde gelegten Parallelkoordinaten rechtwinklig und mit gleichen Einheitslängen auf beiden Achsen oder nur überhaupt so gewählt, daß der Winkel $\mathfrak{B}_0 < \frac{\pi}{2}$ ausfällt, so wird von irgend

*) In der Figur ist der Fall: $3 > b_{v+1} > 2, \varepsilon_{v+1} = +1$ und außerdem (durch Akzente unterschieden) der Fall $2 > b_{v+1} > 1, \varepsilon_{v+1} = -1$ dargestellt.

**) In der Figur sind (unter der Annahme, v sei regulär) die Ränder der auftretenden Dreiseite ϑ_i durch Schraffierung hervorgehoben.

drei Punkten $S, T, S+T$ dieses Winkels stets $S+T$ die größte Entfernung von O haben und wenn alle drei Punkte zu ϑ_0 gehören, so wird die Entfernung $O(S+T)$ jede der Entfernungen OS, OT um einen über einer festen Schranke g liegenden Betrag übertreffen*). Daraus folgt, daß für $\nu \geq 1$ stets P_ν näher an O liegt als $R_\nu = P_\nu + P_{\nu-1}$ und bei regulärem ν Q_ν näher als P_ν . Bei regulärem, bezw. singulärem $\nu (\geq 1)$ ist also Q_ν , bezw. P_ν der O am nächsten liegende Punkt des Dreieckes ϑ_ν , — er möge mit $D_\nu = (x_\nu, y_\nu)$ bezeichnet werden — und es ist stets

$$(12) \quad OD_{\nu+1} \geq OD_\nu.$$

Ferner ist R_ν gleich $D_\nu + 2P_{\nu-1}$ oder gleich $D_\nu + P_{\nu-1}$, folglich $OR_\nu > OD_\nu + g$ ($\nu \geq 1$) und daher für alle Indizes $\nu \geq 1$ für die $\varepsilon_{\nu+1} = +1$ ist,

$$(13) \quad OD_{\nu+1} \geq OR_\nu > OD_\nu + g.$$

Wenn also in dem Kettenbruche unendlich viele Teilzähler $\varepsilon_{\nu+1} = +1$ vorkommen, so wachsen mit zunehmendem ν die Entfernungen OD_ν und daher die beiden an O anliegenden Seiten des Dreieckes $D_\nu OR_\nu$ über alle Grenzen. Da der Inhalt dieser Dreiecke (bei geeigneter Bestimmung des Flächenmaßes) stets einen der Werte $\frac{1}{2}$ oder 1 hat, so muß der eingeschlossene Winkel \mathfrak{B}_ν beliebig klein werden.

Wenn hingegen für alle $\nu \geq \nu_1$ $\varepsilon_{\nu+1} = -1$, also $D_\nu = Q_\nu$ ist, so braucht zwar nicht $\lim_{\nu=\infty} OD_\nu = \infty$ zu sein, wohl aber besteht auch hier $\lim_{\nu=\infty} OP_\nu = \infty$ **) und $\lim_{\nu=\infty} OR_\nu = \infty$, wie sich aus der zufolge $P_\nu = Q_\nu + P_{\nu-1}$ bestehenden Ungleichung

$$(14) \quad OP_\nu > OP_{\nu-1} + g \quad (\nu \geq \nu_1)$$

ergibt. Da sonach von den die Winkel \mathfrak{B}_ν einschließenden Seiten der Dreiecke $D_\nu OR_\nu$ die einen beliebig groß werden, die anderen sicher über einer festen Schranke bleiben, so folgt auch hier die Konvergenz der Winkel \mathfrak{B}_ν gegen Null. Die Kettenbruchkonvergenz würde sich übrigens in diesem Falle schon allein daraus ergeben, daß die Richtungen OP_ν für $\nu \geq \nu_1 - 1$ eine monotone Folge innerhalb des Winkels \mathfrak{B}_0 bilden.

Da die hiermit nachgewiesene Grenzrichtung der Richtungen OP_ν dem Winkel \mathfrak{B}_0 angehört und dabei, wie die Lage von \mathfrak{B}_1 zeigt, von

*) Wie leicht zu sehen, stellt $g = OD_0 \cos(R_0 OP_0)$ eine solche Schranke vor, wenn D_0 den Punkt von ϑ_0 mit kleinster Entfernung von O bedeutet.

**) Im Falle ganzzahliger Kettenbrüche läßt sich diese Relation einfach aus dem Umstande ableiten (und damit der ganze Konvergenzbeweis abkürzen), daß, da kein P_ν in $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ liegt, alle $P_\nu (\nu \geq 0)$ voneinander verschieden, in \mathfrak{B}_0 gelegen und ihre Koordinaten ganzzahlig sind.

OP_0 sicher verschieden ist, so ist der Wert des Kettenbruches $> b_0$ und $\leq b_0 + 1$. Sonach gilt allgemein der

Satz 1. Jeder unendliche Kettenbruch $\left[b_0; \frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$, der den Bedingungen

$$(15) \quad \varepsilon_\nu = \pm 1; \quad b_\nu \geq 1; \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \text{ wenn } b_\nu < 2 \quad (\nu \geq 1)$$

genügt, konvergiert und sein Wert ist eine dem Intervalle $(b_0, b_0 + \varepsilon_1)$ mit Einschluß von $b_0 + \varepsilon_1$ angehörende Zahl.

Die vorstehenden Betrachtungen zum Nachweis der unbeschränkten Abnahme der Winkel \mathfrak{B}_ν lassen sich ganz analog, statt mit den Entfernungen von O der eine Rolle spielenden Punkte, mit ihren Abszissen durchführen, wobei besondere Festsetzungen über das verwendete Parallelkoordinatensystem überflüssig werden und insbesondere die Ungleichungen

$$(16) \quad x_{\nu+1} \geq x_\nu,$$

ferner

$$(17) \quad x_{\nu+1} \geq B_\nu + B_{\nu-1} > x_\nu + 1, \text{ wenn } \varepsilon_{\nu+1} = +1$$

und

$$B_{\nu+1} \geq B_\nu + 1 \quad (\nu \geq \nu_1)$$

an die Stelle von (12), (13) und (14) treten. Von den hieraus folgenden Gleichungen $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = \infty$, bzw. $\lim_{\nu=\infty} B_\nu = \infty$ kann man dann entweder, zu den Entfernungen übergehend, in die obige geometrische Betrachtung einlenken oder aber, auf die Relation

$$(B_\nu + B_{\nu-1}) \cdot x_\nu \cdot \left| \frac{A_\nu + A_{\nu-1}}{B_\nu + B_{\nu-1}} - \frac{y_\nu}{x_\nu} \right| = \begin{cases} 2, & \text{wenn } \nu \text{ regulär,} \\ 1, & \text{wenn } \nu \text{ singulär,} \end{cases}$$

gestützt, die Konvergenz der in Betracht kommenden Folge von Richtungskoeffizienten arithmetisch nachweisen. Es ist klar, daß zum Konvergenzbeweis neben dem Nachweis von $\lim_{\nu=\infty} B_\nu = \infty$ auch der Nachweis dafür,

daß die späteren \mathfrak{B}_ν ganz in den früheren liegen, — bzw. für eine äquivalente Tatsache — erforderlich ist. Lagrange*) beweist nur die

*) Additions aux éléments d'algèbre d'Euler, Nr. 11 (Œuvr. t. VII, p. 22 et suiv.; Ostwalds Klass. 103, S. 18 f.). Der Beweis a. a. O. für $\lim A_\nu = \infty$, und $\lim B_\nu = \infty$ setzt einen ersten Index ν , für den $A_{\nu+1} > A_\nu$, bzw. $B_{\nu+1} > B_\nu$ ist, voraus, ist also für die B_ν gültig, da wegen der von Lagrange vorausgesetzten Ganzzahligkeit der a_ν , b_ν stets entweder $B_1 > B_0$ oder $B_2 > B_1 = B_0$ ist. Für die A_ν bildet in der Tat der Kettenbruch $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots$, wo alle $A_\nu = 1$ werden, eine Ausnahme.

Für die von Lagrange de facto allein betrachteten Kettenbrüche, die aus einer unregelmäßigen Entwicklung einer Zahl ω hervorgehen, und nur für solche Kettenbrüche ließe sich die Konvergenz übrigens ableiten aus $\lim B_\nu = \infty$ und der Abschätzung von $\left| \omega - \frac{A_\nu}{B_\nu} \right|$ (l. c. Nr. 13) unter Beachtung von $B_{\nu+1} \neq B_\nu$ ($\nu > 0$).

erstgenannte Tatsache und sein Beweis für den ausgesprochenen Konvergenzsatz ist darum unvollständig.

Erfüllt ein unendlicher Kettenbruch die Bedingungen (15) des Satzes 1 nur für $\nu \geq \nu_0^*$), so zeigen die angestellten Überlegungen nach wie vor das Vorhandensein einer bestimmten Grenzrichtung für die Richtungen OP_ν , die aber eventuell mit der y -Achse zusammenfallen kann. Nach der gelegentlich von L. Saalschütz**) und von O. Perron***) verwendeten Terminologie liegt also für den Kettenbruchalgorithmus auch dann zumindest „Konvergenz im weiteren Sinne“ vor†).

§ 3.

Im besonderen wird durch Satz 1 die Konvergenz jener Kettenbrüche (7) gewährleistet, die aus einer unregelmäßigen Entwicklung einer irrationalen Zahl ω hervorgehen. Daß der Wert jedes solchen Kettenbruches gleich ω ist, ergibt sich aus dem bekannten††)

Satz 2. *Jeder Näherungsbruch einer unregelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl ω ist entweder ein Haupt- oder ein Nebennäherungsbruch der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von ω .*

Dabei werden, wenn durch die regelmäßige Kettenbruchentwicklung von ω sich $\left[\beta_0; \frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^m$, ($m \leq \infty$) ergibt und sonach die Punkte

$$\Pi_{-2} = (1, 0), \Pi_{-1} = (0, 1), \Pi_\nu = \Pi_{\nu-2} + \beta_\nu \Pi_{\nu-1} \quad (\nu \geq 0)$$

*) Der Fall, daß unter den vorhergehenden Teilzählern sich Nullen finden, kann bekanntlich als trivial, bzw. sinnlos ausgeschlossen werden, da, sobald ein Teilzähler gleich Null ist, von einer gewissen Stelle an alle Punkte P_ν auf derselben Geraden liegen und, wenn auch der zugehörige Teilnenner und der folgende Teilzähler gleich Null sind, überdies mit O zusammenfallen.

**) Journal f. Math. 120, S. 139.

**) Grundlage für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Habilitationsschr. (= Math. Ann. Bd. 64), § 9.

†) Mit diesem Ausdruck werden also zusammengefaßt die „Konvergenz im engeren Sinne“ und der von Pringsheim („Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche“, § 2, Münch. Ber. 1898) als „Divergenz schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ “, von Pringsheim und Perron (vgl. Perron, Münch. Ber. 1908, S. 484) gelegentlich auch als „eigentliche Divergenz“ bezeichnete Fall. (Die Zusammenfassung dieser Fälle schon bei Seidel, l. c. S. 571 [Zusatz bei d. Korrektur].) Im folgenden bedeutet „divergent“ ohne Zusatz soviel wie: auch im weiteren Sinne nicht konvergent.

††) Unter Beschränkung auf den Fall rationaler ω ausgesprochen und bewiesen von Vahlen, a. a. O. S. 226. Ein geometrisch geführter allgemeiner Beweis möge an anderer Stelle ausgeführt werden. Die Gültigkeit des Satzes erstreckt sich nicht nur auf die Hauptnäherungsbrüche (durch die Punkte P_ν repräsentiert), sondern auch auf die Nebennäherungsbrüche (vgl. Enc. I A 3, Anm. 370; Enc., éd. franç., t. I, vol. 1, I 4 note 242) der unregelmäßigen Kettenbruchentwicklung.

die Hauptnäherungspunkte (oder Näherungspunkte schlechthin) dieses Kettenbruches sind, als Nebennäherungsbrüche bekanntlich jene Brüche bezeichnet, deren Zähler und Nenner gegeben sind bzw. durch die y - und x -Koordinate der „Nebennäherungspunkte“

$$(18) \quad N_{\nu-1,i} = \Pi_{\nu-2} + i \Pi_{\nu-1} \quad (\nu \geq 1; 1 \leq i \leq \beta_{\nu} - 1).$$

Mit Satz 2 ist für den Fall eines irrationalen ω die Konvergenz des unregelmäßigen Kettenbruches (7) gegen den Wert ω auf die Tatsache zurückgeführt, daß Haupt- und Nebennäherungsbrüche der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von ω gegen ω konvergieren. Will man diese Tatsache nicht als bekannt voraussetzen, sondern im Rahmen der vorliegenden Entwicklungen einsehen, so ergibt sie sich sofort daraus, daß, wie leicht*) zu sehen, die gemäß Satz 1 eine konvergente Folge bildenden Richtungen $O\Pi_i$, abwechselnd oberhalb und unterhalb $y = \omega x$ liegen und daß alle Richtungen $ON_{\nu,i}$ sich zufolge (18) zwischen $O\Pi_{\nu-1}$ und $O\Pi_{\nu+1}$ befinden. Sonach ergibt sich

Satz 3. *Der Wert jedes durch eine unregelmäßige Entwicklung gewonnenen Kettenbruches ist gleich der entwickelten Zahl.*

Für alle Kettenbrüche (7) mit unendlich vielen $\varepsilon_{\nu} = +1$ ließe sich übrigens dieser Satz unter Heranziehung von Satz 1 aus der leicht*) ersichtlichen Bemerkung gewinnen, daß sowohl oberhalb als unterhalb der Geraden $y = \omega x$ unendlich viele Näherungspunkte P_{ν} liegen müssen.

§ 4.

Den Ausgangspunkt der bisherigen Betrachtungen bildeten die im § 1 beschriebenen unregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen einer vorgegebenen Zahl. Die dabei entstehenden Kettenbrüche ergaben sich als ganzzahlig, von der Gestalt (6), bzw. (7) und den Bedingungen (8) und (10) genügend. Es entsteht die Frage, ob diese Eigenschaften für die so gewonnenen Kettenbrüche charakteristisch sind, ob also jeder beliebig hingeschriebene Kettenbruch mit diesen Eigenschaften durch eine unregelmäßige Entwicklung einer Zahl erhalten werden kann. Diesbezüglich mögen zunächst unendliche Kettenbrüche behandelt und der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 4. *Jeder den Bedingungen (10) genügende unendliche, ganzzahlige Kettenbruch $\left[b_0; \frac{\varepsilon_{\nu}}{b_{\nu}}\right]_1^{\infty}$ hat einen irrationalen Wert mit einziger Ausnahme des Falles, daß von einer gewissen Stelle $\nu = \nu_1 + 1$ an durchwegs die Gleichungen bestehen:*

$$\varepsilon_{\nu} = -1, \quad b_{\nu} = 2.$$

*) Mit Hilfe einer für den Beweis von Satz 2 dienlichen geometrischen Deutung der Kettenbruchentwicklungen.

Zum Beweise nehmen wir an, der Wert ω des Kettenbruches sei rational $= \frac{q}{p}$ ($p > 0$). Der Gitterpunkt $G = (p, q)$ liegt demgemäß auf der durch $y = \omega x$ gekennzeichneten Grenzrichtung der Strahlen OP_v , und muß daher im Innern oder am Rande jedes Winkels \mathfrak{B}_v liegen. Wegen der Ganzzahligkeit des Kettenbruches sind die Punkte P_v, Q_v, R_v und sonach auch D_v Gitterpunkte und daher kann zufolge (16) nur $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = \infty$ oder von einer gewissen Stelle an $x_{v+1} = x_v$ sein. Im ersteren Falle wird x_v schließlich $> p$ werden, und da das Dreieck OD_vR_v außer den Ecken und eventuell (wenn $D_v = Q_v$) dem Mittelpunkt der Seite D_vR_v keinen Gitterpunkt enthält, während doch der von den genannten Gitterpunkten sicher verschiedene Gitterpunkt G dem Dreieck notwendig angehören müßte, so ist dieser erste Fall auszuschließen. Es bleibt also nur der Fall $x_{v+1} = x_v$ ($v \geq v_1$) übrig, der (vgl. (17)) für $v \geq v_1, \varepsilon_{v+1} = -1$ also $b_v \geq 2, D_v = Q_v$ zur Folge hat. Da in jedem Dreieck \mathfrak{B}_v ($v \geq v_1$) der Punkt kleinster Abszisse die Abszisse x_{v_1} hat, so müssen für $v \geq v_1$ diese Punkte kleinster Abszisse selbst — d. h. die Punkte $D_v = Q_v$ — zusammenfallen:

$$Q_{v+1} = Q_v \quad (v \geq v_1)$$

oder

$$P_{v+1} - P_v = (b_{v+1} - 1)P_v - P_{v-1} = P_v - P_{v-1},$$

also $b_{v+1} = 2$ für $v \geq v_1$. Damit ist in der Tat aus der angenommenen Rationalität des Kettenbruches das Bestehen des in Satz 4 genannten Ausnahmefalles abgeleitet. Für diesen ergibt sich zugleich, da die Winkel $P_v O Q_v$ gegen Null konvergieren, daß die Grenzrichtung der Vektoren OP_v mit der allen diesen Winkeln (für $v \geq v_1$) gemeinsamen Richtung von O nach $Q_{v_1} = (b_{v_1} - 1)P_{v_1-1} + \varepsilon_{v_1}P_{v_1-2}$ zusammenfallen muß. Beachtet man noch, daß in dem besonderen Falle $b_{v_1} = 2$ ($v_1 > 0$), — in dem man $\varepsilon_{v_1} = +1$ annehmen kann, da sonst v_1 durch $v_1 - 1$ ersetzt werden könnte, —

$$Q_{v_1} = P_{v_1-1} + \varepsilon_{v_1}P_{v_1-2} = (b_{v_1-1} + \varepsilon_{v_1})P_{v_1-2} + \varepsilon_{v_1-1}P_{v_1-3}$$

ist, so ergibt sich aus dem oben Gesagten der Wert des periodischen unendlichen Kettenbruches

$$(19) \quad b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \dots + \frac{\varepsilon_{v_1}}{b_{v_1}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots$$

gleich

$$(20) \quad b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \dots + \frac{\varepsilon_{v_1-1}}{b_{v_1-1}} + \frac{\varepsilon_{v_1}}{b_{v_1}-1} \quad \text{für } b_{v_1} > 2^*)$$

*) Auch für $v_1 = 0$ und beliebiges $b_0 =$ oder $\neq 2$ wird der Wert des Kettenbruches (19) durch den endlichen Kettenbruch (20), der sich dann auf das Anfangsglied $b_{v_1} - 1$ reduziert, gegeben.

bezw. gleich

$$(21) \quad b_0 + \frac{\varepsilon_1}{|b_2|} + \cdots + \frac{\varepsilon_{v_1-2}}{|b_{v_1-2}|} + \frac{\varepsilon_{v_1}-1}{|b_{v_1-1} + \varepsilon_{v_1}|} \quad \text{für } b_{v_1} = 2, (\varepsilon_{v_1} = +1).$$

In jedem Falle erfüllt dabei der angeführte endliche Kettenbruch die Bedingung (8).

Der besprochene Ausnahmefall stellt einen Spezialfall des Ausnahmefalles des Legendreschen Irrationalitätssatzes dar, der bekanntlich die Irrationalität aller ganzzahligen Kettenbrüche (mit Teilzählern $\neq 0$)

$$\left[b_0; \frac{a_v}{b_{v-1}} \right]^\infty \quad (b_v - 1 \geq a_v \geq 1 \text{ für } v \geq v_0)$$

ausagt mit Ausnahme jener, für die von einem gewissen Index an durchwegs $a_v = -|a_{v-1}|$, $b_v = |a_{v-1}| + 1$ ist. Im übrigen ist klar, daß Satz 4 sowohl Fälle, die sich dem Legendreschen Irrationalitätssatz unterordnen, als solche, die sich nicht unterordnen, umfaßt.

In Ergänzung der Schlußbemerkung des § 2 sei noch beigelegt, daß ein die Bedingungen (15) des Satzes 1 erst für $v \geq v_0$ erfüllender *ganzzahliger* Kettenbruch (mit durchwegs von Null verschiedenen Teilzählern), für den nicht der Ausnahmefall des Satzes 4 vorliegt, stets im engeren Sinne, u. zw. gegen einen irrationalen Wert konvergiert, da die Grenzrichtung der Vektoren OP_v nach Satz 4 irrational ist bezüglich eines Koordinatensystems, dessen Einheitsvektoren $O(\varepsilon_{v_0} P_{v_0-2})$ und OP_{v_0-1} sind. Da dieses Koordinatensystem aber mit dem ursprünglichen, dessen Einheitsvektoren OP_{-2} und OP_{-1} sind, durch eine rationalzahlige lineare Transformation verbunden ist, so ist die Grenzrichtung auch bezüglich des ursprünglichen Systems irrational und also insbesondere von der Richtung OP_{-1} , die der „Divergenz schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ “ entspricht, verschieden.

Satz 5. *Zwei ganzzahlige, den Bedingungen (8) und (10) genügende, endliche oder unendliche Kettenbrüche*

$$K = \left[b_0; \frac{\varepsilon_v}{b_{v-1}} \right]^n, \quad K' = \left[b'_0; \frac{\varepsilon'_v}{b'_{v-1}} \right]^{n'}$$

(wobei also sowohl n als n' auch gleich ∞ sein kann) mit, soweit beiderseits vorhanden, gleicher Folge der Teilzähler ε_v haben nur dann gleichen Wert, wenn sie identisch sind, also bei gleicher, eventuell unendlicher Länge auch in der Folge der Teilnenner übereinstimmen, oder wenn die beiden Kettenbrüche ein Paar von der Art der Kettenbrüche (19), (20) bzw. (19), (21) ($v_1 \geq 0$) bilden.

Dem Beweise seien einige auf einen einzelnen endlichen oder unendlichen Kettenbruch K bezügliche Bemerkungen vorausgeschickt. Dabei

werde für den Punkt $P_v + \varepsilon_{v+1} P_{v-1}$, der entweder mit R_v oder Q_v zusammenfällt, die Bezeichnung

$$(22) \quad P_v + \varepsilon_{v+1} P_{v-1} = S_v \quad (0 \leq v \leq n)$$

eingeführt, wobei, solange nur ein einzelner Kettenbruch betrachtet wird, und wenn dieser endlich ist, ε_{n+1} nach Belieben gleich $+1$ oder -1 gewählt werden kann. Dem Winkel $P_2 O S_\lambda$ ($\lambda \geq 0$) gehören offenbar alle Winkel \mathfrak{B}_v an, deren Index $v > \lambda$ ist.*) Ferner gehört die Richtung OP_2 keinem dieser Winkel \mathfrak{B}_v an. Die durch ihren Richtungskoeffizienten den Wert des Kettenbruches repräsentierende Richtung gehört also dem Winkel $P_2 O S_\lambda$ an, u. zw. mit Ausschluß der Richtung OP_2 , es sei denn, daß $\lambda = n$ ist. Aber auch die Richtung OS_λ kann nur ausnahmsweise Grenzrichtung sein. Denn damit sie allen Winkeln \mathfrak{B}_v ($v > \lambda$) angehöre, ist notwendig und übrigens auch hinreichend, daß $S_v = Q_{v+1}$, also $b_{v+1} = 2^{**})$ und $\varepsilon_{v+2} = -1$, also $S_{v+1} = Q_{v+1}$ für alle $v \geq \lambda$, daß also der Kettenbruch die spezielle Gestalt hat:

$$b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \dots + \frac{\varepsilon_\lambda}{b_\lambda} + \frac{\varepsilon_{\lambda+1}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots$$

Wir gehen nun zum Beweis von Satz 5 über, wobei die auf K' bezüglichen Größen, Punkte usw. durch einen Akzent von den auf K bezüglichen unterschieden werden sollen, z. B. P'_v , \mathfrak{B}'_v . Die im Falle endlicher Kettenbrüche für die Bestimmung der Punkte S_n , bzw. S'_n maßgebende Wahl von ε_{n+1} , bzw. $\varepsilon'_{n'+1}$ ist so zu treffen, daß die Übereinstimmung der beiden Kettenbrüche bezüglich der Folge der ε_v erhalten bleibt für alle v , die $\leq n+1$ und $\leq n'+1$ sind.

Es werde zunächst vorausgesetzt, es sei

$$b_v = b'_v \quad (0 \leq v \leq \mu - 1),$$

hingegen $b_\mu \neq b'_\mu$, also etwa

$$b'_\mu \geq b_\mu + 1.$$

Dabei wird $\mu \geq 0$ und natürlich n und $n' \geq \mu$ angenommen. Sowohl P_μ als P'_μ liegen auf dem Halbstrahl $u_{\mu-1} = u'_{\mu-1}$, bzw. auf $v_{\mu-1} = v'_{\mu-1}$, je nachdem $\varepsilon_\mu = +1$ oder -1 ist***). Auf demselben Halbstrahl liegen dann auch S_μ und S'_μ . Die Strecken $P_\mu S_\mu$ und $P'_\mu S'_\mu$ sind gleich lang und gleichgerichtet und haben äußersten Falles, wenn nämlich $b'_\mu = b_\mu + 1$ ist, einen einzigen Punkt gemein, der entweder mit S_μ und P'_μ oder mit P_μ und S'_μ zusammenfällt, je nachdem $\varepsilon_{\mu+1} = +1$ oder -1 ist. Sollen K und K' den gleichen Wert haben, so muß die den Wert

*) Sofern solche Winkel vorhanden sind, also $\lambda < n$ ist.

**) Wegen $P_{v+1} = S_v + (b_{v+1} - 1) P_v = Q_{v+1} + P_v$.

***) Für $\mu = 0$ ist unter $u_{-1} = u'_{-1}$ die Gerade durch P_{-2} parallel zu OP_{-1} zu verstehen.

beider Kettenbrüche repräsentierende Richtung mit der Richtung von O nach diesem gemeinsamen Punkt zusammenfallen. Das ist aber nach den früheren Bemerkungen nur so möglich, daß im Falle $\varepsilon_{\mu+1} = +1$

$$(23) \quad \begin{aligned} K &= b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu}{b_\mu} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cdots, \\ K' &= b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu}{b_\mu + 1}, \end{aligned}$$

und im Falle $\varepsilon_{\mu+1} = -1$

$$(24) \quad \begin{aligned} K &= b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu}{b_\mu}, \\ K' &= b_0 + \frac{\varepsilon_1}{b_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu}{b_\mu + 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cdots \end{aligned}$$

ist.

Der Beweis des Satzes 5 ist damit erledigt bis auf den Fall, daß bei zwei Kettenbrüchen K, K' verschiedener Länge ($n' < n$) die Teilnenner b'_ν des kürzeren sämtlich den an gleicher Stelle befindlichen Teilennern b_ν des längeren Kettenbruches gleich sind. Da aber dann $P'_n = P_n$ ist und den vorausgeschickten Bemerkungen zufolge ein dem letzten Näherungsbruch vorhergehender Näherungsbruch niemals gleich dem Wert des Kettenbruches sein kann, so ist damit auch dieser Fall abgetan.*)

Aus den Sätzen 4 und 5 ergibt sich die Antwort auf die zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage. Sei nämlich $K = \left[b_0; \frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu} \right]_1^n$ ($n \leq \infty$) irgend ein den Bedingungen (8), (10) genügender ganzzahliger Kettenbruch, für den nicht der Ausnahmefall des Satzes 4 vorliegt, und ω sein Wert. Wird nun ω in einen unregelmäßigen Kettenbruch so entwickelt, daß die Reste der Reihe nach die Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ erhalten, so muß der entstehende Kettenbruch, für den ja gleichfalls der genannte Ausnahmefall nicht eintreten kann, nach Satz 5 mit K identisch sein.**)

*) Man erkennt aus dem vorstehenden Beweis, daß zwei beliebige, auch nicht ganzzahlige, den Bedingungen (8), (10) genügende Kettenbrüche K, K' , wenn ihre Teilzähler ε_ν für $\nu \leq \mu$, ihre Teilnenner b'_ν für $\nu \leq \mu - 1$ übereinstimmen und wenn entweder $|b'_\mu - b_\mu| \geq 1$ oder $b'_\mu = b_\mu$ und $\mu = n' < n$ ist, abgesehen von den durch (23) und (24) dargestellten Ausnahmefällen stets verschiedene Werte haben.

**) Evident kann Satz 4 aus Satz 5 abgeleitet werden, sofern nur für den „Ausnahmefall“ die Rationalität des Kettenbruches gezeigt ist. So setzt z. B. auch der bei Euler (De fract. cont. diss., Comment. Petrop. 9 (1737)) implizit vorgefundene Irrationalitätsbeweis für e und e^2 aus den bekannten bezüglichen unendlichen regelmäßigen Kettenbrüchen (vgl. A. Pringsheim, Sitzber. d. bayer. Ak. 1898, S. 325; Enc. I A3, S. 60; Enc., éd. franç. I 3, p. 170) die von Euler allerdings a. a. O. nicht hervor gehobene Tatsache voraus, die in dem Spezialfall des Satzes 5 für regelmäßige Kettenbrüche enthalten ist. [Zusatz bei d. Korr.]

Für die durch die unregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen des § 1 gewonnenen Kettenbrüche sind also die Eigenschaften (8), (10), wenn man noch den Fall ausschließt, daß von einer gewissen Stelle an die Periode $\varepsilon_\nu = -1$, $b_\nu = 2$ auftritt, in der Tat charakteristisch.

Will man nach der in dem zweiten und diesem Paragraphen mitgeteilten Weise die Konvergenz- und Irrationalitätssätze speziell nur für die regelmäßigen Kettenbrüche zur Darstellung bringen*), wie ich dies gelegentlich in einer Vorlesung versucht habe, so kann man zur Vereinfachung für \mathfrak{B}_ν allgemein den Winkel $R_\nu OP_\nu$ nehmen. Eine analoge Modifikation erhielte man im allgemeinen Fall der unregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen, wenn man — von dem in § 2 gewählten Ausgangspunkt etwas abweichend — nach der Einschränkung fragt, die sich für die möglichen Lagen von $P_{\nu+1}$ zufolge (9) und $b_{\nu+1} \geq 1$ ergibt, wenn die ε_{i+1} und die b_i für $i \leq \nu$ als bekannt angenommen werden. Es treten dann an die Stelle des Winkel \mathfrak{B}_ν die Winkel $P_\nu OS_\nu$, die schon oben gelegentlich verwendet wurden.

II. Eine Verallgemeinerung des Legendreschen und des Stolzischen Irrationalitätssatzes.

§ 5.

Die Sätze 1 und 4 des I. Teiles fallen inhaltlich zum Teil unter bekannte Konvergenz- und Irrationalitätssätze, wie den schon angeführten Legendreschen Irrationalitätssatz. Doch handeln diese nicht wie die hier bewiesenen Sätze nur von Kettenbrüchen, deren Teilzähler absolut genommen gleich 1 sind. Dadurch wird der Versuch einer Ausdehnung der angewendeten Methoden auf allgemeinere Fälle als die im vorhergehenden behandelten nahegelegt.

Es mögen unendliche Kettenbrüche $\left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$ mit reellen Gliedern, von Null verschiedenen Teilzählern und positiven Teilnennern b_ν ($\nu \geq 1$) betrachtet werden, die, wenigstens von einem gewissen Index ν an, der Bedingung

$$(25) \quad 0 < \left| \frac{a_\nu}{b_\nu} \right| \leq 1$$

genügen, die ja auch von allen bisher vorgekommenen Kettenbrüchen erfüllt wurde. Werden die Punkte (vgl. § 2)

$$(26) \quad P_{-2} = (1, 0), \quad P_{-1} = (0, 1), \quad P_\nu = a_\nu P_{\nu-2} + b_\nu P_{\nu-1} \quad (\nu \geq 0; a_0 = 1)$$

wieder als Näherungspunkte und mit ε_ν die Zahl $\frac{a_\nu}{|a_\nu|}$, mit R_ν , Q_ν , S_ν die

*) Eine derartige Anordnung des Stoffes bei rein arithmetischer Darstellung in Stolz-Gmeiner, Einl. in d. Funktionenth. II. Abteilung, Abschn. XI, Nr. 4.

durch (11) und (22) definierten Punkte bezeichnet, so wird bei Kenntnis der Zahlen a_i, b_i für $i \leq \nu - 1$ vermöge (25) die mögliche Lage von P_ν ($\nu \geq 1$) auf den Winkel $R_{\nu-1} O Q_{\nu-1}$ eingeschränkt. Denn

$$(27) \quad P_\nu = |a_\nu| S_{\nu-1} + (b_\nu - |a_\nu|) P_{\nu-1} \quad (\nu \geq 1)$$

liegt auf dem Halbstrahl $w_{\nu-1}$, der vom Punkte $|a_\nu| S_{\nu-1}$, einem der Punkte $|a_\nu| R_{\nu-1}, |a_\nu| Q_{\nu-1}$, in der Richtung von $OP_{\nu-1}$ ausgeht.

Wirft man die Frage auf, wann der Winkel $R_\nu O Q_\nu$ ganz dem Winkel $R_{\nu-1} O Q_{\nu-1}$ angehört, so erkennt man, daß hierfür notwendig und hinreichend ist, daß der Punkt $Q_\nu = |a_\nu| S_{\nu-1} + (b_\nu - |a_\nu| - 1) P_{\nu-1}$, und dann natürlich um so mehr die Punkte P_ν und R_ν auf $w_{\nu-1}$ liegen, daß also

$$(28) \quad b_\nu \geq |a_\nu| + 1$$

ist.

Das bekannte Konvergenzkriterium von A. Pringsheim, formuliert für Kettenbrüche mit positiven Teilennennern*), besagt, daß das Erfülltsein von (28) für alle Indizes $\nu \geq 1$ für die Konvergenz des Kettenbruches $[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}]_\infty$ hinreichend ist. Für reelle Kettenbrüche — das Pringsheimsche Kriterium erstreckt sich auch auf Kettenbrüche mit komplexen Gliedern — hat diese Bedingung also die Bedeutung, daß in der Folge der Winkel $R_\nu O Q_\nu$, deren Einführung ja durch (25) nahegelegt wird, jeder Winkel den folgenden (und deswegen auch alle Näherungspunkte $P_\nu, P_{\nu+1}, \dots$) enthält. Hieraus läßt sich, abgesehen von einem ohne weiteres die Konvergenz der Richtungen OP_ν garantierenden Sonderfall, zeigen (§ 6), daß die Winkel $R_\nu O Q_\nu$ mit wachsendem ν beliebig klein werden, und damit ein Beweis des Pringsheimschen Kriteriums für den Spezialfall reeller Kettenbrüche mit Hilfe der hier verwendeten geometrischen Vorstellungen führen.

Wenn die Bedingung (28) nicht, wohl aber (25) erfüllt ist, so wird zwar nicht der Winkel $R_\nu O Q_\nu$, immer aber noch der Winkel $R_\nu O P_\nu$ ein Teil des Winkels $R_{\nu-1} O Q_{\nu-1}$ sein. Dies führt dazu, Kettenbrüche zu betrachten, die neben (25) nur noch der weiteren Bedingung genügen, daß stets erfüllt ist:

$$(29) \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \quad \text{wenn } b_\nu < |a_\nu| + 1^{**}),$$

*) Eine Fassung, auf die die allgemeine Formulierung ohne weiteres zurückführbar ist.

**) Ganzzahlige Kettenbrüche, die (25) und (29) erfüllen, behandelt Stern (Journ. f. Math. 10, S. 366, u. 11, S. 40) und spricht ihre Konvergenz und die Irrationalität ihres Wertes aus, was sich im folgenden bestätigt findet. Doch ist sein Konvergenzbeweis unzulänglich und würde, auf den Fall nicht ganzzahliger a_ν, b_ν ausgedehnt, zu der keineswegs zutreffenden Folgerung führen, daß alle (25) und (29) erfüllenden reellen Kettenbrüche konvergent sind. Auch hat Stern (a. a. O. Bd. 11, S. 37) die

wobei diese Indizes ν als singuläre, diejenigen, für die (28) gilt, als reguläre bezeichnet werden mögen. Wird dann ganz wie in dem durch die Bedingungen (10) charakterisierten Spezialfall mit \mathfrak{B}_ν der Winkel $R_\nu O Q_\nu$ oder $R_\nu O P_\nu$ bezeichnet, je nachdem ν regulär oder singulär ist, so enthält wieder in der Folge der \mathfrak{B} , jeder Winkel alle folgenden und sonach alle Vektoren $OP_\nu, OP_{\nu+1}, \dots$. Die Abnahme der Winkel \mathfrak{B}_ν gegen Null, die hier jedoch keineswegs für alle Kettenbrüche der betrachteten Art stattfindet, ist sicher hinreichend — übrigens, wie aus dem Folgenden hervorgeht, im allgemeinen*) auch nothwendig — für die Konvergenz des Kettenbruches.

Für die Untersuchung dieser Kettenbrüche sind statt der Winkel \mathfrak{B}_ν vielfach bequemer die Winkel $w_\nu = P_\nu OS_\nu$ zu verwenden, eine Modifikation, die schon im I. Teil am Schlusse des § 4 erwähnt wurde. Daß auch jeder Winkel w_ν im vorhergehenden $w_{\nu-1}$ liegt, — wobei offenbar $OP_{\nu-1}$ nicht w_ν angehört, — kann direkt aus den Formeln (27) und

$$S_\nu = |a_\nu| S_{\nu-1} + (b_\nu - |a_\nu| + \varepsilon_{\nu+1}) P_{\nu-1}$$

und aus den Bedingungen

$$(30) \quad |a_\nu| > 0; \quad b_\nu - |a_\nu| \quad \text{und} \quad b_\nu - |a_\nu| + \varepsilon_{\nu+1} \geq 0$$

entnommen werden, die nur eine andere Form für die Bedingungen (25) und (29) darstellen.

In den folgenden Ausführungen mögen zur Abkürzung die Bezeichnungen $p_\nu, r_\nu, q_\nu, s_\nu$ für die von O aus durch die Punkte P_ν , bzw. R_ν, Q_ν, S_ν gehenden Halbstrahlen gebraucht und z. B. mit (r_ν, q_ν) der von den Halbstrahlen r_ν und q_ν gebildete Winkel bezeichnet werden.

§ 6.

Wie im vorigen Paragraphen besprochen wurde, liegt bei einem reellen Kettenbruch $\left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$, der $|a_\nu| > 0$ und für $\nu \geq \nu_0$ die *Pringsheimsche*

Möglichkeit einer derartigen Ausdehnung seiner Beweise zumindest in einem speziellen Falle (alle $a_\nu < 0$) tatsächlich ausgesprochen. Die Unstichhaltigkeit der Beweise beruht auf der von ihm damals übersehenen und erst später (vgl. Journ. f. Math. 37) erkannten Möglichkeit oszillierender, d. i. weder konvergierender noch nach unendlich divergierender Kettenbrüche, weshalb er ursprünglich auch alle Kettenbrüche mit positiven Elementen für konvergent erklärt (vgl. a. a. O., Bd. 10, S. 164, 365 und den Reihenkonvergenzatz Nr. 29, S. 166). (Dieser Irrtum übrigens auch bei Euler, Comm. Petrop. 11, p. 32, § 1 [Zusatz bei d. Korr.]). Daß dabei sein Kettenbruchkonvergenzbegriff von dem heute üblichen *nicht* abweicht, scheint mir aus dem Wortlaut der Definition (a. a. O. S. 364—365) und der Behandlung von Irrationalitätsfragen hervorzugehen. (Eine andere Beurteilung in Enc. I A 3, Anm. 378; Enc., éd. franç., t. I, vol. 1 (I 4, Note 252).

*) D. h. wenn nicht bloß endlich viele $\varepsilon_\nu = +1$ sind.

Bedingung (28) erfüllt, wenigstens von $\nu = \nu_0$ an jeder Winkel $\mathfrak{B}_\nu = (r_\nu, q_\nu)$ im vorhergehenden $\mathfrak{B}_{\nu-1}$. Das der geometrischen Deutung zugrundegelegte Parallelkoordinatensystem sei so gewählt, dass der Winkel $(r_{\nu_0-1}, q_{\nu_0-1}) \leq \frac{\pi}{2}$ ausfällt. Da von den beiden diesem Winkel angehörnden Punkten Q_ν, P_ν ($\nu \geq \nu_0$) der erste näher an O liegt als der zweite*), und da die Strecken $Q_\nu P_\nu$ und $P_\nu R_\nu$ gleich lang und auf derselben Geraden gelegen sind, so ist

$$(31) \quad (p_\nu, r_\nu) < (q_\nu, p_\nu) \quad (\nu \geq \nu_0)$$

also

$$(p_\nu, r_\nu) < \frac{1}{2}(q_\nu, r_\nu).$$

Wenn nun im Kettenbruch unendlich viele Teilzähler $a_{\nu+1} > 0$ vorkommen, so wird für die entsprechenden Indizes $\nu + 1$ der Winkel $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ ein Teil von (p_ν, r_ν) und daher $< \frac{1}{2}\mathfrak{B}_\nu$ sein, während im übrigen für jeden beliebigen Index $\nu \geq \nu_0 - 1$ die Ungleichung $\mathfrak{B}_{\nu+1} < \mathfrak{B}_\nu$ besteht. Daraus folgt, dass die Winkel \mathfrak{B}_ν schließlich beliebig klein werden, und damit die Konvergenz des Kettenbruches.

Wenn aber von einem gewissen Index $\nu_1 (\geq \nu_0)$ an alle $a_{\nu+1} < 0$ sind, so folgt die Konvergenz des Kettenbruches daraus, dass dann die Halbstrahlen $p_{\nu_1-1}, p_{\nu_1}, p_{\nu_1+1}, \dots$ eine monotone Folge von Richtungen innerhalb des Winkels \mathfrak{B}_{ν_0-1} bilden. Auch hier gilt natürlich $\mathfrak{B}_{\nu+1} < \mathfrak{B}_\nu$, doch kann die Abnahme der Winkel \mathfrak{B}_ν gegen Null nicht allgemein behauptet werden**).

Die angestellten Überlegungen ergeben für den Fall $\nu_0 > 1$ nur eine Konvergenz der Richtungen p_ν , also für den Kettenbruch nur eine Konvergenz im weiteren Sinne***). Im Falle $\nu_0 = 1$ gehört die Grenzrichtung dem Winkel (r_0, q_0) , speziell dem Winkel (p_0, s_0) an, und zwar mit Ausschluß von p_0 , wie aus der Lage von \mathfrak{B}_1 ersichtlich ist. Der Wert der Kettenbruches liegt also zwischen b_0 und $b_0 + \varepsilon_1$ oder ist allenfalls gleich $b_0 + \varepsilon_1$ und es ist in diesem Falle sicher Konvergenz im engeren Sinne vorhanden. Von vorneherein läßt sich die Konvergenz im engeren Sinne auch in einem von Pringsheim†) angegebenen Falle, in

*) Vgl. analoge im § 2 angestellte Überlegungen.

**) Man setze z. B. $b_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, b_\nu = \frac{3}{2}, a_{\nu+1} = -\frac{1}{2} (\nu \geq 1)$. Für diesen

Kettenbruch ist $P_\nu = (2 - 2^{-\nu}, 1 - 2^{-\nu}), Q_\nu = (2^{-\nu}, 2^{-\nu}), R_\nu = (4 - 3 \cdot 2^{-\nu}, 2 - 3 \cdot 2^{-\nu})$. Die p_ν und r_ν konvergieren gegen $2y = x$, die q_ν fallen alle auf $y = x$. Vgl. auch den unten besprochenen Fall der Erweiterung des Pringsheimschen Kriteriums für $\nu_0 = 2, b_1 = 1$ und Konvergenz von (33a).

***) Vgl. § 2 (Schluß u. letzte Anm.).

†) Sitzber. d. bayer. Akad. zu München, math. phys. Kl. 35 (1905), Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern, § 1.

dem $\nu_0 = 2$ ist, behaupten Wird nämlich unter den Voraussetzungen (28) für $\nu \geq 2$, $a_1 \neq 0$ und $b_1 > 0$ gefragt, wann \mathfrak{B}_1 den Halbstrahl p_{-1} , d. i. die positive y -Achse, im Innern, wann am Rande und wann gar nicht enthält, so zeigt die Betrachtung der Lage der Punkte $a_1 P_{-1}$, P_1 , Q_1 auf der durch sie gelegten Geraden, daß diese drei Fälle für $b_1 < 1$, bzw. $b_1 = 1$, bzw. $b_1 > 1$ eintreten. Wird also $b_1 \geq 1$ angenommen, so wird p_{-1} nur dann allen Winkeln $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ angehören, wenn genau

$$(32) \quad b_1 = 1$$

und für $\nu \geq 1$

$$p_{-1} = q_\nu, \quad \varepsilon_{\nu+1} = -1, \quad Q_{\nu+1} = |a_{\nu+1}| Q_\nu,$$

also wegen (11) und (26)

$$(33) \quad \varepsilon_\nu = -1, \quad b_\nu = |a_\nu| + 1 \quad (\nu \geq 2)$$

ist*). p_{-1} wird überdies Grenzrichtung sein, wenn die Winkel (p_ν, q_ν) gegen Null konvergieren. Da nun unter den Bedingungen (32), (33) alle $B_\nu = 1$ sind und

$$A_\nu - A_{\nu-1} = |a_\nu| (A_{\nu-1} - A_{\nu-2}) = |a_\nu| \cdot |a_{\nu-1}| \cdots |a_2| \cdot a_1 \quad (\nu \geq 2)$$

ist, so erweist sich dabei die in Frage stehende Konvergenz der p_ν gegen p_{-1} , anders gesagt das Bestehen von $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \infty$, d. h. von $\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_\nu = \infty$ als gleichwertig mit der Divergenz der unendlichen Reihe

$$(33a) \quad \sum |a_1 a_2 \dots a_\nu|.$$

Abgesehen von dem Falle, daß (32), (33) und Divergenz von (33a) besteht, hat man also für $\nu_0 = 2$ und $b_1 \geq 1$ sicher Konvergenz im engeren Sinne. Damit ist auch die von Pringsheim l. c. gegebene Erweiterung seines „Haupt-Kriteriums“ reproduziert.

Der oben mitgeteilte, die Ungleichung (31) verwendende Beweisgang gestattet zugleich eine mäßige Verallgemeinerung des Pringsheimschen Konvergenzsatzes. Während nämlich die Pringsheimsche Bedingung (28) unter den Kettenbrüchen, die (25) und (29) erfüllen, jene herausgreift, welche singuläre Indizes gar nicht (oder höchstens in endlicher Anzahl) aufweisen, so genügt es für den Nachweis der Konvergenz anzunehmen, daß, wenn für unendlich viele Indizes ν $a_{\nu+1} > 0$ ist, unter diesen unendlich viele reguläre vorkommen. Denn für alle diese Indizes gilt die Ungleichung (31).

Sonach können unter den (25) und (29), anders gesagt (30) erfüllenden Kettenbrüchen jedenfalls divergent nur solche sein, die unend-

*) Vgl. gewisse analoge dem Beweise des Satzes 5 (§ 4) vorausgeschickte Überlegungen.

lich viele positive Teilzähler haben und von einem gewissen Index an durchwegs der Bedingung

$$b_v < |a_v| + 1, \text{ wenn } a_{v+1} > 0$$

genügen.

§ 7.

Daß es unter den unendlichen Kettenbrüchen, die (30) erfüllen, tatsächlich divergente gibt, läßt sich leicht aus folgendem Umstand erkennen. Nicht nur bestimmt ein solcher Kettenbruch*) eine Folge von Winkeln $w_v = (p_v, s_v)$ von der Art, daß w_v stets ein den Halbstrahl p_{v-1} nicht enthaltender Teil von w_{v-1} ist, wobei die Schenkel p_0, s_0 des ersten Winkels in folgender Weise darstellbar sind (b_0 eine reelle Zahl, $\varepsilon_1 = \pm 1$):

$$p_0: y = b_0 x, \quad x \geq 0$$

$$s_0: y = (b_0 + \varepsilon_1)x, \quad x \geq 0;$$

sondern es wird auch umgekehrt durch eine solche Folge von Winkeln ein Kettenbruch, der (30) erfüllt, bestimmt. Dabei wird dieser Kettenbruch festgelegt durch die Forderung, daß die ihm zugehörigen Punkte P_v, S_v beziehungsweise auf den vorgegebenen Halbstrahlen p_v und s_v liegen sollen**). Da man nun die Winkel w_v einer solchen Folge und die Verteilung der Bezeichnungen p_v, s_v auf die Schenkel dieser Winkel so wählen kann, daß die Winkel gegen einen nicht verschwindenden Winkel w_∞ konvergieren und beide Schenkel von w_∞ Häufungsrichtungen der Halbstrahlen p_v darstellen, so ist die Existenz divergenter Kettenbrüche, die (30) erfüllen, einleuchtend.

Die Frage nach der Konvergenz oder Divergenz eines den Bedingungen (30) genügenden Kettenbruches K mit unendlich vielen positiven Teilzählern***) läßt sich nun auf die gleiche Frage für einen Kettenbruch mit nicht-negativen Gliedern zurückführen, indem man der durch die Folge der Winkel (p_v, s_v) dargestellten Figur eine abgeänderte Deutung gibt. Man setze nämlich

$$p_0 = p'_0, \quad s_0 = s'_0$$

oder

$$p_0 = s'_0, \quad s_0 = p'_0$$

je nachdem $\varepsilon_1 = +1$ oder -1 ist, und verteile für $v \geq 1$ die Bezeich-

*) Vgl. § 5, am Schluß.

**) Bezüglich einer näheren Ausführung dieser Verhältnisse muß auf einen demnächst in den Monatsheften f. Math. u. Phys. erscheinenden Aufsatz verwiesen werden (§ 2).

***) Wenn die Anzahl der positiven Teilzähler endlich ist, steht von vorneherein (gemäß § 6) die Konvergenz fest.

nungen p'_v, s'_v derart auf die beiden Halbstrahlen p_v, s_v , daß p'_v, s'_v in entgegengesetztem Drehungssinn wie p'_{v-1}, s'_{v-1} aufeinanderfolgen. Die Lagenanordnung der Halbstrahlen p'_v zeigt dann, daß man einen Kettenbruch K' mit positiven Teilzählern und nicht-negativen Teilennern so bestimmen kann, daß seine Näherungspunkte P'_v auf den Halbstrahlen p'_v liegen. Fordert man speziell lauter Teilzähler $= +1$, so ist

$$K' = \left[b'_0; \frac{1}{\beta'_v} \right]^\infty \quad (\beta_v \geq 0)$$

vollständig bestimmt*).

Da nun nach Voraussetzung in dem die Bedingungen (30) erfüllenden Kettenbruch K nicht von einer gewissen Stelle an alle Teilzähler negativ sind, so ist für die Konvergenz von K die Konvergenz der Winkel $w_v = (p_v, s_v)$ d. h. der Winkel (p'_v, s'_v) gegen Null, und daher die Konvergenz des zugehörigen Kettenbruches K' notwendig und hinreichend. Und da bekanntermaßen**) für die Konvergenz von K' die Divergenz von $\Sigma \beta_v$ notwendig und hinreichend***), die Divergenz von $\Sigma \sqrt{\beta_v \beta_{v+1}}$ hinreichend ist†), so kann man durch wirkliche Berechnung der β_v einerseits eine notwendige und hinreichende, andererseits hinreichende Konvergenzbedingungen für K herleiten††). Von letzteren seien, unter Hinzunahme des bereits in § 6 erledigten Falles nur endlich vieler positiver Teilzähler, die in folgenden Satz zusammengefaßten hervorgehoben†††):

Satz 6: Für die Konvergenz eines den Bedingungen

$$(34) \quad b_v \geq |a_v| > 0; \quad b_v \geq |a_v| + 1, \quad \text{wenn } a_{v+1} < 0 \quad (v \geq 1)$$

genügenden Kettenbruches $K = \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]^\infty$ ist jede der folgenden Bedingungen für sich hinreichend:

a) von einer gewissen Stelle an sind alle $\varepsilon_v = \frac{a_v}{|a_v|} = -1$;

b) Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty \sqrt{d_v}$, — speziell der Reihe $\sum d_v$, unter d_v die kleinere der Zahlen $b_v - |a_v|$, $b_v - |a_v| + \varepsilon_{v+1}$ verstanden;

*) Ein Teilnenner β_v wird $= 0$, wenn die Halbstrahlen p'_{v-2}, s'_{v-1} und p'_v zusammenfallen.

**) Die hier herangezogenen, gewöhnlich unter der Voraussetzung $\beta_v \geq 0$ ausgesprochenen Kriterien werden dabei auf den etwas allgemeineren Fall nicht-negativer Teilnenner ausgedehnt.

*** Seidel, Habilitationsschr., München 1846. Vgl. Enc. I A 3, Anm. 378.

†) Dieses Kettenbruchkonvergenzkriterium wurde zuerst von L. Saalschütz, Journ. f. Math. 120, S. 138, Anm. ausgesprochen. Ein Beweis bei Pringsheim, Sitzber. d. bayer. Akad., math. phys. Kl., 29 (1899), wo die Angabe, die Bedingung sei auch notwendig für die Konvergenz, widerlegt wird.

††) Vgl. den zitierten Aufsatz in den Monatsh. f. Math. u. Phys.

†††) A. a. O. § 4, Satz 3.

c) Divergenz der über alle positiven unter den Teilzählern a_v erstreckten Reihe $\Sigma \sqrt{a_v}$, speziell der Reihe der positiven Teilzähler selbst.

Besonders spezielle Fälle der Bedingungen b), bzw. c) sind:

b*) Der obere Limes aller Zahlen $b_v - |a_v|$ und $b_v - |a_v| + \varepsilon_{v+1}$ ist > 1 ,

c*) $\lim a_v > 0$.

Zusatz 1. Der Wert eines den Bedingungen (34) genügenden konvergenten Kettenbruches K liegt zwischen b_0 und $b_0 + \varepsilon_1$ oder ist gleich $b_0 + \varepsilon_1$, und zwar ist dann und nur dann $K = b_0 + \varepsilon_1$, wenn durchwegs

$$b_v = |a_v| + 1, \quad a_{v+1} < 0 \quad (\nu \geq 1)$$

ist, wie aus schon mehrfach verwendeten Betrachtungen erhellt. K ist also konvergent im engeren Sinne. — Überlegungen, die den in der zweiten Hälfte des § 6 zur Erweiterung des Pringsheimschen Hauptkriteriums angestellten ganz analog sind, zeigen, dass Konvergenz im engeren Sinne auch dann vorliegt, wenn — neben einer der Bedingungen a), b), c) — (34) nur für $\nu \geq 2$ erfüllt und außerdem nur noch

$$|a_1| > 0, \quad b_1 \quad \text{und} \quad b_1 + \varepsilon_2 \geq 0$$

ist, mit einziger Ausnahme des schon a. a. O. aufgetretenen Falles, daß $b_1 = 1$, $\varepsilon_v = -1$, $b_v = |a_v| + 1$ ($\nu \geq 2$) und $\Sigma |a_1 \dots a_v|$ divergent ist.

Zusatz 2. Für jeden dem Satz 6 gemäß konvergenten Kettenbruch K folgt schon aus dem Charakter der Konvergenzbedingungen, daß auch jeder durch Weglassen von Anfangsgliedern entstehende Kettenbruch

$$K_m = \left[\frac{a_v}{b_v} \right]_m^\infty, \quad K_m^0 = \left[b_m; \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^\infty$$

konvergiert, d. h. daß die Konvergenz von K eine *unbedingte**) ist. Im übrigen gilt bekanntlich allgemein für jeden beliebigen konvergenten Kettenbruch K^{**}), daß die durch Weglassen (oder auch Voransetzen)

*) A. Pringsheim, Sitzber. d. bayer. Akad., math. phys. Cl., 28 (1898), S. 299; Enc. I A 3, S. 127. Es sei mir gestattet, bei der Gelegenheit ein paar Worte zugunsten der nur bedingt konvergenten Kettenbrüche einzulegen (d. i. solcher konvergenter mit wenigstens einem divergenten K_m) bezüglich ihrer Stellung zu den unbedingt konvergenten, welch letzteren allein Pringsheim a. a. O. (S. 307) „den Charakter einer gewissen analytischen Notwendigkeit“ beimißt, den er den ersteren völlig aberkennt. Bei beiden Arten konvergenter Kettenbrüche führt die Änderung des Wertes eines einzelnen Elementes eine Änderung des Wertes des Kettenbruches (eventuell — sit venia verbo — in den Wert ∞) herbei. Wie bei den bedingt konvergenten kann man aber auch bei einem unbedingt konvergenten Kettenbruch seine Elemente ohne Änderung seines Wertes von einer gewissen Stelle $\nu = m + 1$ an durch andere, bis auf die Bedingung, daß der Wert von $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^\infty$ ungeändert bleiben soll, völlig willkürliche ersetzen.

**) Desgleichen für jeden „schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ diver

von Anfangsgliedern entstehenden Kettenbrüche wenigstens „im weiteren Sinne konvergent“ sind. Denn ihrem Bildungsgesetz gemäß stellt die Folge der Punkte $P_{-1}, P_0, \dots, P_v, \dots$, wenn sie nur von einer geeignet späten Stelle an betrachtet wird, auch die Folge der Näherungspunkte dar für jeden der Kettenbrüche $K_1, \varepsilon_1 K_1^*, K_1^0; K_2, \varepsilon_2 K_2, K_2^0; \dots$ unter jeweiliger Zugrundelegung des entsprechenden unter den Koordinatensystemen:

$$\begin{aligned} &\{P_0, P_{-1}\}, \{P_0, \varepsilon_1 P_{-1}\}, \{a_1 P_{-1}, P_0\}; \\ &\{P_1, P_0\}, \{P_1, \varepsilon_2 P_0\}, \{a_2 P_0, P_1\}; \\ &\dots \end{aligned}$$

anstatt des bisher verwendeten Koordinatensystems $\{P_{-2}, P_{-1}\}$. Dabei ist allgemein unter $\{E_x, E_y\}$ das Parallelkoordinatensystem mit O als Ursprung und E_x, E_y als Einheitspunkten der x -, bzw. y -Achse zu verstehen. Das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Grenzrichtung der Vektoren OP_v bedeutet also gleichzeitig für alle Kettenbrüche K, K_m, K_m^0 das Bestehen oder Nichtbestehen von Konvergenz im weiteren Sinne**).

Satz 6 umfaßt, wie aus a) und b), speziell aus a) und b*) hervorgeht, das Pringsheimsche Haupt-Kriterium (28), soweit es sich auf reelle Kettenbrüche bezieht***).

§ 8.

Jeder *ganzzahlige*, den Bedingungen (34) genügende Kettenbruch K ist gemäß Satz 6a) oder c) (speziell c*)) konvergent. Bezüglich seines Wertes gilt der folgende sowohl den Legendreschen als den Stolz'schen Irrationalitätssatz†) umfassende

Satz 7. *Jeder den Bedingungen*

$$(34) \quad b_v \geq |a_v| > 0; \quad b_v \geq |a_v| + 1, \text{ wenn } a_{v+1} < 0 \quad (v \geq 1)$$

genügende ganzzahlige Kettenbruch $K = \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]_{v=1}^{\infty}$ *hat einen irrationalen Wert, es sei denn, daß von einem gewissen Index* $v = v_1$ *an durchwegs*

genten“ (vgl. die letzte Anm. d. § 2), d. h. für einen Kettenbruch, der der Bedingung $\lim \frac{B_v}{A_v} = 0$ genügt, die y -Achse zur Grenzrichtung der OP_v hat.

*) Wobei $\left[\frac{\varepsilon_m a_m}{b_m}, \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^8$ mit $\varepsilon_m K_m$ bezeichnet ist.

**) Vgl. über diese Beziehung, die den unbedingten Charakter der Konvergenz im weiteren Sinne [dem Wesen nach schon von L. Seidel, l. c., S. 571, hervorgehoben (Zusatz bei d. Korr.)] und die enge Verwandtschaft der konvergenten (im engeren Sinne) und „schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergenten“ Kettenbrüche zeigt, den § 2 der mehrfach zitierten Pringsheimschen Arbeit „Über die Convergenz unendlicher Kettenbrüche“ (1898).

***)) Bezüglich anderer unter Satz 6 fallender Konvergenzkriterien vgl. § 5 des zitierten Aufsatzes in den Monatsheften f. Math. u. Phys.

†) Desgleichen den im § 4 bewiesenen Satz 4.

$$b_v = |a_v| + 1, a_{v+1} < 0$$

ist.

Die einfache Übertragung der von Pringsheim*) zum Beweise des Legendreschen Irrationalitätssatzes angewendeten Schlußweise auf die hier betrachteten Kettenbrüche liefert den Beweis des ausgesprochenen Satzes aus den Bedingungen (34) und der unbedingten Konvergenz. Wie Pringsheim**) hervorgehoben hat, bildet dabei die unbedingte Konvergenz eine wesentliche Grundlage für die Beweiskraft der benützten Schlüsse.

Unter Ausschluß des in Satz 7 genannten Ausnahmefalles gilt nämlich, den Zusätzen zu Satz 6 gemäß, — bei Verwendung der Zeichen für die Kettenbrüche auch zur Bezeichnung ihrer Werte, —

$$|K_m| < 1 \quad (m \geq 1).$$

Wäre nun K , also auch jedes K_m , rational und in der Darstellung als reduzierter Bruch

$$K_m = \varepsilon_m |K_m| = \varepsilon_m \frac{p^{(m)}}{q^{(m)}} \quad (m \geq 1),$$

so würde aus

$$\frac{p^{(m+1)}}{q^{(m+1)}} = \left| -b_m + \frac{|a_m| q^{(m)}}{p^{(m)}} \right|$$

$q^{(m+1)} \leq p^{(m)}$, also

$$q^{(m+1)} < q^{(m)} \quad (m \geq 1)$$

folgen, was offenbar unmöglich ist. Die Einkleidung dieser Schlußweise in geometrisches Gewand — dabei $q^{(m+1)}$ aufgefaßt bezüglich des Koordinatensystems $\{a_m P_{m-2}, P_{m-1}\}$ als Abszisse des an O nächstgelegenen Gitterpunktes auf dem Grenzhalbstrahl der Vektoren OP_v , $p^{(m)}$ als Ordinate, $q^{(m)}$ als Abszisse des gleicherweise definierten Punktes im System $\{P_{m-1}, \varepsilon_m P_{m-2}\}$ — bietet keine Schwierigkeit, aber auch keine besonders übersichtliche geometrische Deutung, da zu beachten ist, daß für jedes der beiden Koordinatensysteme im allgemeinen ein anderer Punkt der nächstgelegene Gitterpunkt ist.

Satz 7 gilt natürlich auch für jeden ganzzahligen Kettenbruch mit nicht verschwindenden Teilzählern, der (34) erst für $v \geq v_0$ erfüllt und nicht den Ausnahmefall darstellt, da offenbar auch dann unbedingte Konvergenz im engeren Sinne***) vorliegt.

*) Sitzber. d. bayer. Akad., math. phys. Kl., 28 (1898), Über die Convergenz unendlicher Kettenbrüche, § 4. Die Schlußweise ist im Wesen übereinstimmend mit der Legendreschen, erhält aber a. a. O. zum erstenmal durch die erforderlichen Konvergenzbeweise wirkliche Berechtigung.

**) „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π “ im gleichen Bande der genannten Sitzber., S. 325.

***) Vgl. die letzte der an Satz 4 (§ 4) geknüpften Bemerkungen.

§ 9.

Den vorstehenden Entwicklungen mögen ein paar Bemerkungen, auf gewisse Verallgemeinerungen bezüglich, beigelegt werden.

Im § 5 wurde ausgegangen von Kettenbrüchen $\left[b_0; \frac{a_v}{b_{v-1}} \right]$, für welche jeder Näherungspunkt $P_v = a_v P_{v-2} + b_v P_{v-1}$ dem durch die Bedingung (35)

$$b_v \geq |a_v|$$

definierten Winkel angehört. Schreibt man nun allgemeiner für jeden Index v die Bedingung $b_v \geq k_v |a_v|$ vor, unter k_1, k_2, \dots eine Folge positiver Zahlen verstanden, so ergibt sich als Bedingung dafür, daß jeder so definierte Winkel den folgenden (für den nächsten Index gebildeten) enthält, die Bedingung

$$(36) \quad b_v \geq k_v |a_v| + \frac{1}{k_{v+1}}$$

an Stelle der im Falle $k_v = 1$ a. a. O. erhaltenen *Pringsheimschen Bedingung* (28).*)

Die Betrachtungen im § 6, durch welche (28) als hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches nachgewiesen wird, gelten ganz unverändert auch für die im Falle (36) vorliegende Folge von Winkeln. Man erkennt, daß das so gefundene eine Folge willkürlicher Zahlen k_v enthaltende Konvergenzkriterium (36) durch äquivalente Umformung (Änderung der Näherungspunkte P_v unter Beibehaltung der Strahlen OP_v) aus (28) ableitbar ist**).

Die in diesem Aufsatz verwendete geometrische Deutung der Kettenbrüche ist ohne weiteres übertragbar auf den allgemeineren Fall des in jüngster Zeit von O. Perron***) eingehend studierten Jacobischen Algo-

*) Auch bei komplexen Kettenbrüchen, ganz analog wie bei reellen, stellt $|b_v| \geq |a_v| + 1$ die Bedingung dafür dar, daß von den Gebieten, die sich für P_v aus $|b_v| \geq |a_v|$ ergeben, — Gebieten des \mathfrak{R}_4 , die von dem Projektionskegel einer ringförmigen (Regel-) Fläche zweiter Ordnung begrenzt sind, — jedes Gebiet das folgende enthält.

**) Pringsheim (Sitzber. d. bayer. Akad. 35 (1905), Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern, § 2) gewinnt durch die dem Ansatz $k_v = \frac{l_v - 1}{b_{v-1}}$ entsprechende Umformung das Konvergenzkriterium (l_v eine Folge positiver Zahlen):

$$(37) \quad \left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right| \leq \frac{l_v - 1}{l_{v-1} l_v}.$$

***) Habilitationsschr. (= Math. Ann. 64, S. 1), Sitzber. d. bayer. Akad., 37 (1907) S. 401, 38 (1908) S. 181.

rithmus. Die Deutung erfolgt für die „Jacobikette n^{ter} Ordnung“*) im Raum \mathfrak{R}_{n+1} von $n+1$ Dimensionen ($n=1$, Fall der Kettenbrüche). Sei $n=2$ und im \mathfrak{R}_3 ein Strahl g durch den Ursprung O vorgelegt, als Repräsentant zweier reeller Zahlen (seiner Richtungsgrößen). P_{-3}, P_{-2}, P_{-1} seien die Punkte mit den Koordinaten $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Man erhält als Analogon der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung folgenden Algorithmus. Wenn die Näherungspunkte $P_{v-3}, P_{v-2}, P_{v-1}$ bereits gefunden sind ($v \geq 0$) u. zw. als Gitterpunkte, so lege man durch P_{v-3} die zur Ebene $OP_{v-2}P_{v-1}$ parallele Ebene u_v und teile u_v in Gitterparallelogramme, die dem Parallelogramm

$$\pi = OP_{v-2}P_{v-1}(P_{v-2} + P_{v-1})^{**})$$

kongruent und parallelliegend sind, wobei jedem Parallelogramm jener Gitterpunkt und jene Seiten zugezählt werden, die dem Punkt O , bzw. den Seiten OP_{v-2}, OP_{v-1} des Parallelogrammes π homolog sind. P_v bestimmt sich dann als der Gitterpunkt, der demselben Parallelogramm angehört, wie der Durchschnittspunkt M von g und u_v . Den im I. Teil behandelten unregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen entspräche es, für P_v die Wahl zwischen allen vier Eckpunkten des von g getroffenen Parallelogramms zu lassen***). Doch soll hier auf Fragen analog den im I. Teil behandelten (Konvergenzfragen, usw.†)) nicht eingegangen und nur auf einen Unterschied hingedeutet werden, der zwischen dem Falle $n=1$ der Kettenbrüche und den eigentlichen Jacobientwicklungen $n \geq 2$ besteht, die, wie Perron gezeigt hat, nicht durchwegs die verallgemeinerten Eigenschaften der Kettenbrüche aufweisen. Im Falle der Kettenbrüche, etwa der regelmäßigen, vollzieht sich nämlich der Übergang vom Grundparallelogramm mit den Seiten OP_{v-2}, OP_{v-1} ($v \geq 1$) zum Grundparallelogramm mit den Seiten OP_{v-1}, OP_v in einer nur durch das erste Parallelogramm und den Strahl g ($y = \omega x$) bestimmten Weise. Welche

*) Dabei ist nur von dem Jacobischen Algorithmus mit reellen Elementen die Rede. Jacobis nachgelassene Untersuchung bezieht sich nur auf die „Jacobiketten“ zweiter Ordnung.

**) $P_{v-2} + P_{v-1}$ bedeutet den vierten Eckpunkt des Parallelogrammes und allgemein, wie bisher (vgl. § 2) $P + Q$ den Endpunkt des durch Addition der Vektoren OP, OQ gewonnenen Vektors.

***) Die genaue Festsetzung wäre: Man lege um M als Mittelpunkt ein dem Parallelogramm mit den Ecken $(\pm P_{v-2} \pm P_{v-1})$ kongruentes und parallelliegenes Parallelogramm p und wähle für P_v irgendeinen im Innern von p liegenden Gitterpunkt. In Ausnahmefällen ist dann gar keine Wahl oder nur eine zwischen zwei Punkten vorhanden.

†) Für den regelmäßigen Jacobialgorithmus (für beliebiges n) hat Perron die Konvergenz, u. zw. gegen die „entwickelten“ 2 (bezw. n) Zahlen nachgewiesen (Habilitationsschr. § 4).

Parallelogrammecke P_{v-2} , welche P_{v-1} ist, braucht dabei gar nicht angegeben zu sein, da dies schon aus der Lage von g sich ergibt. Anders im Falle $n = 2$ (oder > 2) des Jacobischen Algorithmus. Der Übergang vom Parallelepipet π_{v-1} mit den Kanten OP_{v-3} , OP_{v-2} , OP_{v-1} zu dem mit den Kanten OP_{v-2} , OP_{v-1} , OP_v ist nicht nur durch das erstere und den Strahl g , sondern noch sehr wesentlich dadurch bestimmt, wie die Bezeichnungen P_{v-3} , P_{v-2} auf die beiden hierfür in Betracht kommenden Eckpunkte von π_{v-1} verteilt sind. Dadurch unterscheidet sich der Jacobische Algorithmus von einer rein geometrischen Verallgemeinerung der Kettenbruchentwicklung, wie sie z. B. die von Poincaré in den Comptes Rendus 1884*) angegebene darstellt, die ebenfalls mit einer Folge von Grundparallelepipeden des Gitters operiert.

Den beliebigen hingeschriebenen (nicht durch Entwicklung gewonnenen) Kettenbrüchen mit den Teilzählern $a_v = a_0^{(v)}$ und den Teilnennern

$$b_v = a_1^{(v)} = a_n^{(v)}$$

entspricht ein von den Punkten

$P_{-n-1}, P_{-n}, \dots, P_{-1} = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ ausgehender durch die Relation

$$P_v = a_0^{(v)} P_{v-n-1} + a_1^{(v)} P_{v-n} + \dots + a_n^{(v)} P_{v-1} \quad (v \geq 0)$$

vermittelter Algorithmus zur sukzessiven Ermittlung der Punkte P_v , dessen Konvergenz (im weiteren Sinne) in dem Vorhandensein einer Grenzrichtung der Vektoren OP_v besteht**). Die Übertragung der geometrischen Deutung des Pringsheimschen Konvergenzkriteriums führt hier zu verschiedenen Bedingungen, — die natürlich von vorneherein noch nicht als Konvergenzbedingungen angesprochen werden dürfen, — je nach der Art der an Stelle von (35) zugrundegelegten Gebiete. Man erhält z. B. als Bedingung dafür, daß von den durch

$$(38) \quad |a_0^{(v)}| + |a_1^{(v)}| + \dots + |a_{n-1}^{(v)}| \leq a_n^{(v)}$$

bzw.

$$(39) \quad |a_i^{(v)}| \leq a_n^{(v)} \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

definierten Gebieten jedes die folgenden enthält, die Ungleichungen***)

*) 99, S. 1014 (Sur une généralisation des fractions continues).

**) Man hat $|a_0^{(v)}| > 0$ vorauszusetzen, wenn der Algorithmus sich nicht von einer gewissen Stelle an in einem Raum von weniger als $n+1$ Dimensionen abspiegeln soll.

***) O. Perron (Sitzber. d. bayer. Akad. 1907) hat gezeigt, daß die Bedingung (38a) in der Tat nahezu in vollem Umfange, — wenn nicht überhaupt ohne jede Nebenbedingung, wie er vermutet (a. a. O., S. 441), — für die Konvergenz des Algorithmus hinreichend ist, während das gleiche für (39a) wenigstens bei positiven $a_0^{(v)}, \dots, a_n^{(v)}$ gilt, wie sich durch Spezialisierung eines von Perron an anderer Stelle (Math. Ann. 64, S. 12) aufgestellten Konvergenzkriteriums ergibt.

$$(38a) \quad |a_0^{(v)}| + |a_1^{(v)}| + \dots + |a_{n-1}^{(v)}| \leq a_n^{(v)} - 1$$

bezw.

$$(39a) \quad |a_0^{(v)}| \text{ und } |a_i^{(v)}| + 1 \leq a_n^{(v)} - 1 \quad (i=1, \dots, n-1).$$

Zur geometrischen Deutung der durch (38) bzw. (39) für die Lage von P_v festgelegten Gebiete im Falle $n=2$ zeichne man in der durch P_{v-1} parallel zu $OP_{v-2}P_{v-3}$ gelegten Ebene die Parallelogramme, deren Ecken $P_{v-1} \pm P_{v-2}$, $P_{v-1} \pm P_{v-3}$ bzw. $P_{v-1} \pm P_{v-2} \pm P_{v-3}$ sind. Der Vektor OP_v ist auf die Richtungen von O nach den Punkten des betreffenden Parallelogrammes (mit Ausnahme einer Diagonale bzw. Seitenhalbierenden) beschränkt.

Es mögen diese Bemerkungen beschlossen werden mit dem Hinweis darauf, daß die für die Kettenbrüche verwendete geometrische Deutung offenbar, wie aus der willkürlichen Wahl des Parallelkoordinatensystems hervorgeht, *affinen* Charakter trägt, daß aber überdies das wesentlichste an den Kettenbrüchen, nämlich alles das, was gegenüber äquivalenter Umformung (Beibehaltung nur der Folge der Näherungsstrahlen $p_v = OP_v$) invariant bleibt, von *projektiver* Natur ist. Es ergibt sich dies sofort daraus, daß der bekanntlich bei äquivalenten Transformationen un-

änderte*) Ausdruck $-\frac{b_v b_{v-1}}{a_v}$ wegen

$$-\frac{b_v b_{v-1}}{a_v} = -\frac{b_v \cdot \overline{OP_{v-1}}}{a_v \cdot \overline{OP_{v-2}}} \cdot \frac{b_{v-1} \cdot \overline{OP_{v-2}}}{\overline{OP_{v-1}}} = \frac{\sin(p_v, p_{v-2})}{\sin(p_v, p_{v-1})} \cdot \frac{\sin(p_{v-1}, p_{v-3})}{\sin(p_{v-2}, p_{v-3})}$$

gleich dem Doppelverhältnis der vier Strahlen $p_v, p_{v-3}, p_{v-2}, p_{v-1}$ ist**). Man kann also jeden Kettenbruchalgorithmus ansehen als die Bestimmung einer Folge von Elementen eines Gebildes erster Stufe dadurch, daß jedes neue Element p_v durch sein Doppelverhältnis mit den drei letzten schon gebildeten Elementen bestimmt wird. Umgekehrt ist natürlich auch jeder solche Algorithmus einem Kettenbruch gleichwertig, da ja durch Angabe aller Doppelverhältnisse $b_v b_{v-1}$, — wir schreiben dabei dem Kettenbruch von vorneherein Teilzähler = 1 vor, — auch die Folge der Teilnenner b_v bestimmt ist***). Es haben also alle Kettenbruch-Konvergenz- und

*) Vgl. Pringsheim, a. a. O. S. 366, Anm.

**) Anders gesagt: gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Näherungsbrüche. Die ausgesprochene Tatsache und die folgenden Bemerkungen sind ebenso wie für das reelle auch für das komplexe Gebiet gültig.

***) Diese Gleichwertigkeit der beiden Probleme ergibt sich auch rein rechnerisch bei der Bestimmung des Doppelverhältnisses

$$(p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_v) = \left| \frac{1}{1} - \frac{1}{D_1} - \frac{D_1}{D_2} - \frac{D_2}{D_3} - \dots - \frac{D_{v-1}}{D_v} \right|$$

aus den Doppelverhältnissen $D_i = (p_i, p_{i-3}, p_{i-2}, p_{i-1})$ also durch einen mit

Divergenzkriterien, in denen der Ausdruck $\frac{b_v b_{v-1}}{a_v}$ auftritt*), unmittelbar Bedeutung für den erwähnten Algorithmus projektiver Natur, und in zweiter Linie gilt das auch von anderen Konvergenz-, übrigens auch von Irrationalitätssätzen.

In analoger Weise stellen bei dem Jacobischen Algorithmus die gegenüber äquivalenter Umformung invarianten Ausdrücke

$$a_n^{(v)} \frac{a_1^{(v-1)}}{a_0^{(v)}}, a_n^{(v)} \frac{a_2^{(v-1)}}{a_1^{(v)}}, \dots, a_n^{(v)} \frac{a_n^{(v-1)}}{a_{n-1}^{(v)}}$$

ein System projektiver Koordinaten für den Strahl $p_v = OP_v$, dar, bezogen auf die $n+2$ vorhergehenden Strahlen $p_{v-1}, p_{v-2}, \dots, p_{v-n-2}$ als Fundamentelemente in dem aus allen Strahlen durch O bestehenden Gebilde n^{ter} Stufe.

$$\left| \frac{b_0}{b_0} \right| + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_v}{b_v} \right|$$

äquivalenten Kettenbruch.

*) Z. B. das oben erwähnte Pringsheimsche Kriterium (37), ein Kriterium von Helge von Koch (Bull. Soc. math. de France 23, S. 37) u. a. m. Vgl. Pringsheim, l. c. und Enc., éd. franç., t. I vol. 1 (I 4, Nr. 31; I 6, Nr. 7).