RISOLUZIONE DEL PROBLEMA:

RIPORTARE I PUNTI DI UNA SUPERFICIE SOPRA UN PIANO IN MODO CHE LE LINEE GEODETICHE VENGANO RAPPRESENTATE DA LINEE RETTE

DEL PROF. E. BELTRAMI.

I.

Nella maggior parte delle ricerche che sono state fin qui istituite dai geometri intorno alla teoria delle carte geografiche, si sono prese le mosse o dal principio della conservazione degli angoli (cioè della similitudine fra le figure infinitesime), o da quello della conservazione dei rapporti d' area.

Benchè questi due principii sieno da riguardarsi come i più semplici ed i più importanti, può darsi tuttavia il caso che se ne debba prescindere, per adottarne qualche altro più rispondente al fine speciale della carta che si vuol costruire.

Così, se la carta dovesse principalmente servire alla misura delle distanze, converrebbe escludere quelle projezioni per le quali le curve di minima distanza sulla superficie terrestre venissero ad essere rappresentate da linee troppo sensibilmente diverse dalla retta. Fra quelle considerate fin qui, la sola projezione centrale nella sfera ha la proprietà di trasformare in linee rette le curve summenzionate; e Lagrange riguarda a ragione questa proprietà come un pregio speciale di essa (*).

Siccome, fra le proprietà di cui può essere dotata una carta, quella di prestarsi alla facile misura delle distanze non è certamente la meno utile, così io aveva pensato che la risoluzione generale del problema formulato nel titolo di questo scritto potrebbe essere di qualche giovamento. Oltre la sua applicazione alla teoria delle carte geografiche, essa mi sembrava promettere un nuovo metodo di calcolo geodetico, nel quale tutte le quistioni relative a triangoli formati da linee geodetiche sopra una superficie sarebbero ridotte a semplici quistioni di trigonometria piana.

(*) Nelle *Memorie di Berlino* per l'anno 1779.

Ma l' investigazione da me istituita in proposito mi ha condotto a riconoscere che il detto problema non ammette una risoluzione generale, e che il caso della projezione centrale nella sfera è sostanzialmente il solo nel quale sia realizzabile la condizione prescritta.

La singolarità di questo risultato mi sembrò atta a giustificare la pubblicazione delle mie ricerche su questo soggetto, quantunque ne risulti dimostrata l' impossibilità di raggiungere pienamente lo scopo pel quale esse vennero iniziate.

II.

Sieno x, y le coordinate rettilinee dei punti del piano, non importa se rettangolari od oblique; X, Y le coordinate curvilinee dei punti corrispondenti della superficie. Supposto che sia possibile soddisfare alle condizioni del problema, le x, y saranno legate alle X, Y da due relazioni

$$x = u\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,, \qquad\qquad y = v\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,,$$

la natura delle quali dovrà esser tale che ad una retta qualunque del piano

$$ax + by + c = 0\,,$$

corrisponda sulla superficie una linea geodetica. Ora l' equazione in coordinate curvilinee della curva corrispondente a questa retta è evidentemente

$$au\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + bv\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + c = 0\,;$$

bisognerà dunque che quest' equazione rappresenti una linea geodetica, ovvero che, riguardando le a, b, c come costanti arbitrarie, essa rappresenti l' integrale completo dell' equazione delle linee geodetiche.

Ma nulla impedisce di riguardare come coordinate curvilinee della superficie le stesse funzioni $u\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $v\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, anzichè le X, Y. Quindi è chiaro che il nostro problema si riduce a trovare come e quando sia possibile integrare l'equazione delle linee geodetiche per mezzo della relazione lineare

$$au + bv + c = 0\,,$$

e, ciò che torna allo stesso, come e quando l' equazione differenziale delle linee geodetiche sia riducibile alla forma

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = 0. \tag{1}$$

Trovate le superficie e le variabili per le quali ciò abbia luogo, basterà porre

$$x = u\,, \qquad y = v\,,$$

od anche

$$x = au + bv + c\,, \qquad y = a'u + b'v + c',$$

od anche più in generale

$$x = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}\,, \qquad y = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}\,.$$

Queste ultime formole corrispondono ad una trasformazione omografica della figura rappresentata dalle formole $x = u$, $y = v$.

III.

Per trovare le condizioni sotto le quali l'equazione differenziale delle linee geodetiche è riducibile alla forma (1), rammentiamo che, rappresentando al solito con

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare della superficie, la suddetta equazione differenziale è la seguente:

$$\begin{aligned} 0 = &(EG - F^2)\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) \\ &+ (Edu + Fdv)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right\} \\ &- (Fdu + Gdv)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}dv\,du + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2\right\} \ (*). \end{aligned}$$

Dovendosi annullare i coefficienti di du^3, du^2dv, $dudv^2$, dv^3 si avranno queste quat-

---

(*) Veggasi per es. l'articolo XXI delle mie *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* nel Giornale di Napoli, tom. III.

tro condizioni:

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}=0\,, \tag{2}$$

$$E\frac{\partial E}{\partial u}+F\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}=0, \tag{3}$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v}+F\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-F\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}=0, \tag{4}$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}=0. \tag{5}$$

Il nostro problema dipende adunque dalla integrazione simultanea di queste equazioni, e poichè il loro numero è maggiore di quello delle funzioni da determinare, si può già prevedere l'impossibilità di risolverlo generalmente.

IV.

La (2) e la (5) si possono mettere sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

e quindi esprimono che i due binomii

$$\frac{E du + F dv}{\sqrt{E}}\,,\qquad \frac{F du + G dv}{\sqrt{G}} \tag{6}$$

devono essere differenziali esatti a due variabili.

È bene osservare che queste due equazioni non impongono alla superficie veruna condizione speciale. Infatti, annullandosi per esse i coefficienti di du^3 e dv^3 nell'equazione differenziale delle linee geodetiche, l'equazione stessa è soddisfatta tanto per $du=0$, quanto per $dv=0$, il che significa semplicemente che le linee coordinate $u=$ cost., $v=$ cost. devono essere geodetiche. Ciò si deduce anche dalle note espressioni delle curvature geodetiche relative alle linee $u=$cost., $v=$cost., le quali sono annullate dalle (2) (5) (come si può vedere nelle citate *Ricerche*, eq. (60)).

V.

Consideriamo ora le (4) (5). Eliminando $\frac{\partial E}{\partial v}$ fra la (2) e la (3), e $\frac{\partial G}{\partial u}$ fra la (5) e la (4), si ottengono le due equazioni:

$$E\frac{\partial G}{\partial u} - \tfrac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{3F^2}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} = 0\,,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v} - \tfrac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{3F^2}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} = 0\,,$$

che hanno il vantaggio di contenere le derivate relative ad una sola variabile.

L' eliminazione effettuata è sempre possibile. Infatti quand' anche, per una determinata scelta delle variabili, le due derivate $\frac{\partial E}{\partial v}$, $\frac{\partial G}{\partial u}$ fossero nulle, cesserebbero d'essere tali surrogando alle u, v le nuove variabili $au + bv + c$, $a'u + b'v + c'$, surrogazione che non altera punto le condizioni del problema.

Si può verificare facilmente che le due precedenti equazioni sono riducibili alla forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}}\right) = 0,$$

laonde se indichiamo con U, V due funzioni da determinarsi, la prima della sola u, la seconda della sola v, possiamo porre

$$(7) \qquad \frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} = V^3, \qquad \frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}} = U^3.$$

Bisogna ora vedere se sia possibile determinare le U, V in modo che i due binomii (6) diventino differenziali esatti.

VI.

Introducendo una funzione incognita di u e di v, che diremo λ, possiamo soddisfare alle (7) ponendo

$$(9) \quad 8: \qquad \sqrt{E} = \lambda U\,, \qquad F = \lambda\mu UV\,, \qquad \sqrt{G} = \lambda V\,,$$

dove si è fatto per brevità

$$(6) \qquad \mu = \sqrt{\lambda(\lambda - UV)}.$$

9:

I due binomii (6) diverranno

$$\lambda U du + \mu V dv\,, \qquad \mu U du + \lambda V dv$$

o più semplicemente

$$\lambda du_1 + \mu dv_1\,, \qquad \mu du_1 + \lambda dv_1 :$$

ponendo

$$du_1 = U du\,, \qquad dv_1 = V dv\,, \tag{10}$$

ed immaginando sostituite le u_1, v_1 alle u, v tanto nelle funzioni λ, μ quanto nelle U, V.

Le condizioni per l'integrabilità dei due ultimi binomii sono

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} = \frac{\partial \mu}{\partial u_1}\,, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \mu}{\partial v_1}\,.$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u_1} - \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

$$\frac{\partial (\lambda - \mu)}{\partial u_1} + \frac{\partial (\lambda - \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

e quindi integrando

$$\lambda + \mu = 2\varphi\,(u_1 + v_1)\,,$$

$$\lambda - \mu = 2\psi\,(u_1 - v_1)\,,$$

dove φ, ψ sono caratteristiche di funzioni arbitrarie.

Ponendo finalmente

$$u_1 + v_1 = \alpha\,, \qquad u_1 - v_1 = \beta \tag{11}$$

si ha

$$\lambda = \varphi\,(\alpha) + \psi\,(\beta)\,, \qquad \mu = \varphi\,(\alpha) - \psi\,(\beta). \tag{12}$$

VII.

Restano ora a determinare le φ, ψ, U, V in modo che risulti soddisfatta la (9), ossia la

$$\lambda U V = \lambda^2 - \mu^2\,,$$

cioè, per le (12),

$$(\varphi + \psi)\, U V = 4\varphi\psi.$$

Per tal uopo poniamo

$$(13) \qquad \varphi = \frac{1}{\Phi}, \qquad \psi = \frac{1}{\Psi}$$

talchè la precedente equazione diventerà

$$(14) \qquad \Phi(\alpha) + \Psi(\beta) = \frac{4}{UV},$$

donde

$$\log(\Phi + \Psi) = \log 4 - \log U - \log V.$$

Ora U è funzione di u_1 ossia di $\frac{\alpha+\beta}{2}$, V è funzione di v_1 ossia di $\frac{\alpha-\beta}{2}$, quindi il secondo membro è della forma

$$f(\alpha+\beta) + F(\alpha-\beta)$$

epperò soddisfa all' equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} = 0,$$

alla quale deve quindi soddisfare anche il primo membro. Si ottiene così

$$(\Phi + \Psi)\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = (\Phi + \Psi)\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2,$$

ossia

$$(15) \qquad \Phi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \Psi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = A(\alpha) - B(\beta),$$

ponendo

$$\Phi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = A(\alpha),$$

$$\Psi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2 = B(\beta).$$

Finalmente derivando la (15) due volte di seguito prima rispetto ad α, poi rispetto a β, si ha

$$(16) \qquad \frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d^3\Psi}{d\beta^3} - \frac{d\Psi}{d\beta}\frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = 0.$$

Se nessuna delle quattro quantità che entrano in quest' equazione è nulla, è chiaro che l' indipendenza delle variabili α e β richiede necessariamente che sia

$$(17) \qquad \frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = r^2\frac{d\Phi}{d\alpha}, \qquad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3} = r^2\frac{d\Psi}{d\beta},$$

dove r è una costante reale od immaginaria della forma $r'i$, ma sempre differente da zero.

Se invece qualcuna di quelle quantità è nulla si dovrà porre

$$(17') \qquad \frac{d^3\Phi}{d\alpha^3}=0, \qquad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3}=0,$$

quando nessuna delle derivate prime è nulla; oppure

$$(17'') \qquad \Psi = \text{cost.}$$

quando una delle derivate prime, per es. quella di Ψ, è nulla.

Se fossero costanti ambedue le funzioni Φ, Ψ, la superficie risulterebbe sviluppabile. Noi non ci occuperemo punto di questo caso, per sè stesso evidente.

VIII.

Consideriamo dapprima le (17) dalle quali si deduce

$$\Phi(\alpha) = A_0 + A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha},$$

$$\Psi(\beta) = B_0 + B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta},$$

donde

$$A(\alpha) = r^2 \{ A_0 (A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha}) + 4A_1A_2 \},$$

$$B(\beta) = r^2 \{ B_0 (B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta}) + 4B_1B_2 \},$$

valori che riducono l'equazione (15) alla seguente:

$$0 = r^2 \{ (A_0 + B_0)(A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha} - B_1 e^{r\beta} - B_2 e^{-r\beta}) + 4(A_1A_2 - B_1B_2) \}.$$

Essendo r diverso da zero bisogna dunque porre

$$A_0 + B_0 = 0, \qquad A_1A_2 = B_1B_2,$$

condizioni alle quali si può soddisfare cambiando le costanti e ponendo

$$A_0 = -B_0 = -2h, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = kk'A,$$

$$B_1 = k'A, \qquad B_2 = kA,$$

nel qual modo si avrà:

$$(18) \qquad \begin{cases} \Phi = A(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h, \\ \Psi = A(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h. \end{cases}$$

Così tutte le condizioni imposte dal problema alle funzioni Φ, Ψ sono soddisfatte.

IX.

Bisogna ora determinare le U, V.

Per tal uopo osserviamo che si ha

$$\Phi + \Psi = A\,(1 + ke^{-r(\alpha+\beta)})\,(e^{r\alpha} + k'e^{r\beta})\,,$$

e riponendo le variabili u_1, v_1 in luogo delle α, β mediante le (11)

$$\Phi + \Psi = A\,(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})\,(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1}).$$

Confrontando quest' equazione colla (14) si vede doversi porre

$$(19)\qquad U = \frac{2}{m\,(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})}\,,\qquad V = \frac{2}{m'\,(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1})}\,,$$

purchè si faccia $\qquad A = mm'.$

Si avrà poscia, per le (13),

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{mm'\,(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h}\,,\\[2mm] \psi(\beta) &= \frac{1}{mm'\,(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h}\,,\end{aligned}\right.$$

e finalmente dalle (8):

$$(21)\qquad E = (\varphi + \psi)^2\,U^2\,,\quad F = (\varphi^2 - \psi^2)\,UV\,,\quad G = (\varphi + \psi)^2\,V^2.$$

X.

Prima di dedurre dai risultati precedenti la forma finale delle E, F, G espresse per u, v, osserviamo che dalle (21) si deduce:

$$ds^2 = (\varphi + \psi)\ \left\{\varphi\,(Udu + Vdv)^2 + \psi\,(Udu - Vdv)^2\right\}\,,$$

ossia, per le (10), (11)

$$(22)\qquad ds^2 = (\varphi + \psi)\,(\varphi d\alpha^2 + \psi d\beta^2).$$

Questo risultato c' insegna che le α, β sono coordinate isoterme della superficie, e che la forma dell' elemento lineare ad esse corrispondente è una di quelle che danno luogo all' integrazione completa del problema delle linee geodetiche, come dimostrarono i Sig. Liouville e Brioschi.

Ma l' equazione (22) è suscettibile di una ulteriore trasformazione. Infatti il suo secondo membro può riguardarsi come il prodotto di due somme di quadrati e può quindi, colla nota regola, esser messo sotto la forma di una somma di due quadrati, nel modo seguente:

$$ds^2 = (\varphi d\alpha \pm \psi d\beta)^2 + \varphi\psi\,(d\alpha \mp d\beta)^2.$$

Quindi se si pone

(21) $$\varphi d\alpha - \psi d\beta = dt, \qquad \varphi d\alpha + \psi d\beta = d\tau$$

si hanno le due espressioni

(22) $$ds^2 = dt^2 + 4\varphi\psi\, du_1^2 = d\tau^2 + 4\varphi\psi dv_1^2,$$

le quali insegnano che le linee geodetiche $u_1 =$ cost., $v_1 =$ cost. hanno per trajettorie ortogonali le linee $t =$ cost., $\tau =$ cost. rispettivamente.

XI.

Veniamo ora alla determinazione delle E, F, G, in funzione delle u, v.

Dalle (10) si ha:

$$u = \int \frac{du_1}{U}, \qquad v = \int \frac{dv_1}{V},$$

quindi, viste le (19),

$$u = \frac{m}{2r}\left(e^{ru_1} - ke^{-ru_1}\right), \qquad v = \frac{m'}{2r}\left(e^{rv_1} - k'e^{-rv_1}\right),$$

ommettendo per semplicità le costanti d' integrazione, che si possono riguardare come implicite in u, v.

Dai valori precedenti si deduce

$$e^{ru_1} + ke^{-ru_1} = \frac{2\sqrt{r^2u^2 + km^2}}{m},$$

$$e^{rv_1} + k'e^{-rv_1} = \frac{2\sqrt{r^2v^2 + k'm'^2}}{m'},$$

talchè le espressioni di U, V in u, v, sono

$$U = \frac{1}{\sqrt{r^2u^2 + km^2}}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 + k'm'^2}}.$$

Inoltre ponendo

$$W^2 = (r^2u^2 + km^2)\,(r^2v^2 + k'm'^2)$$

si trova facilmente

$$e^{r\alpha}+kk'e^{-r\alpha}=\frac{2\,(\mathrm{W}+r^2uv)}{mm'},$$

$$k'e^{r\beta}+ke^{-r\beta}=\frac{2\,(\mathrm{W}-r^2uv}{mm'},$$

e quindi (20)

$$2\varphi=\frac{1}{\mathrm{W}+(r^2uv-h)},\qquad 2\psi=\frac{1}{\mathrm{W}-(r^2uv-h)},$$

Finalmente, cambiando km^2, $k'm'^2$ in k, k', ciò che è lecito ora che le costanti k, m non compajono più separate, e ponendo quindi

$$\mathrm{W}^2=(r^2u^2+k)\,(r^2v^2+k'),\tag{23}$$

si trovano i valori seguenti

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}&=\frac{r^2v^2+k'}{[\mathrm{W}^2-(r^2uv-h)^2]^2},\\
\mathrm{F}&=-\frac{r^2uv-h}{[\mathrm{W}^2-(r^2uv-h)^2]^2},\\
\mathrm{G}&=\frac{r^2u^2+k}{[\mathrm{W}^2-(r^2uv-h)^2]^2},\\
\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2&=\frac{1}{[\mathrm{W}^2-(r^2uv-h)^2]^3}.
\end{aligned}\right.\tag{24}$$

XII.

Dalle cose dette alla fine dell'art. II. risulta che alle variabili u, v soddisfacenti al problema possono essere surrogate altre variabili legate linearmente ad esse, senza che le condizioni del problema vengano mutate. Poichè dunque le formole (24) danno una soluzione del problema, bisogna che in particolare ogni sostituzione della

forma $$u=au'+bv',\qquad v=a'u'+b'v'$$

lasci inalterata la composizione di quelle formole.

Verifichiamo questa proprietà.

Rappresentando con

$$ds^2=\mathrm{E}'du'^2+2\mathrm{F}'du'dv'+\mathrm{G}'dv'^2$$

*

la nuova espressione dell' elemento lineare, si ha

$$E' = Ea^2 + 2Faa' + Ga'^2,$$

$$F' = Eab + F(ab' + a'b) + Ga'b',$$

$$G' = Eb^2 + 2Fbb' + Gb'^2.$$

Quindi ponendo per brevità

$$\frac{k'a^2 + 2haa' + ka'^2}{(ab' - a'b)^2} = K',$$

$$\frac{k'ab + h(ab' + a'b) + ka'b'}{(ab' - a'b)^2} = H,$$

$$\frac{k'b^2 + 2hbb' + kb'^2}{(ab' - a'b)^2} = K,$$

si trova:

$$E' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2v'^2 + K')}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2},$$

$$F' = -\frac{(ab' - a'b)^2 (r^2u'v' - H)}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2},$$

$$G' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2u'^2 + K)}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}.$$

Ma è noto che si ha

$$E'G' - F'^2 = (a'b - ab')^2 (EG - F^2),$$

quindi, ponendo

$$W'^2 = (r^2u'^2 + K)(r^2v'^2 + K'),$$

si ha $$W^2 - (r^2uv - h)^2 = (ab' - a'b)^2 \{ W'^2 - (r^2u'v' - H)^2 \},$$

epperò:

$$E' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2v'^2 + K'}{[W'^2 - (r^2u'v' - H)^2]^2},$$

$$F' = \frac{-1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2u'v' - H}{[W'^2 - (r^2u'^2 + H)^2]^2}$$

$$G' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2u'^2 - K}{[W'^2 - (r^2u'v' - H)^2]^2}.$$

Ora egli è evidente che queste espressioni hanno la stessa forma delle (24) e ne differiscono soltanto in ciò che alle costanti r^2, h, k, k' si trovano sostituite le

$$\mu r^2, \quad \mu \mathrm{H}, \quad \mu \mathrm{K}, \quad \mu \mathrm{K}', \qquad \text{dove} \qquad \mu = (ab' - a'b)^{\frac{2}{3}}.$$

Dunque la proprietà in discorso è realmente verificata.

XIII.

Disponiamo delle costanti a, b, a', b' talmente da rendere

$$\mathrm{H} = 0, \qquad \mathrm{K} = \mathrm{K}',$$

ciò che è sempre possibile, ed in molti modi, quando non si escludano valori immaginarii di quei coefficienti.

Osservando che in tal caso si ha

$$\mathrm{W}'^2 - (r^2u'v' - \mathrm{H})^2 = \mathrm{K}(r^2u'^2 + r^2v'^2 + \mathrm{K}),$$

si trova

$$\mathrm{E}' = \frac{r^2v'^2 + \mathrm{K}}{\mu^3\mathrm{K}^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + \mathrm{K})},$$

$$\mathrm{F}' = \frac{-r^2u'v'}{\mu^3\mathrm{K}^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + \mathrm{K})},$$

$$\mathrm{G}' = \frac{r^2u'^2 + \mathrm{K}}{\mu^3\mathrm{K}^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + \mathrm{K})}.$$

Poniamo finalmente, per maggiore semplicità

$$\frac{\mathrm{K}}{r^2} = a^2, \qquad \frac{1}{\mu^3k^2r^2} = \mathrm{R}^2,$$

e scriviamo u, v in luogo di u', v': avremo

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{E} &= \frac{\mathrm{R}^2(v^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ \mathrm{F} &= \frac{-\mathrm{R}^2uv}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ \mathrm{G} &= \frac{\mathrm{R}^2(u^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

XIV.

Abbiamo per tal modo determinata la forma dell' elemento lineare della superficie, vale a dire individuata una classe di superficie, tutte applicabili l' una sull'altra e tutte soddisfacenti al problema proposto

Per formarsi un' idea della natura comune di tutte queste superficie bisogna dunque fare appello alle proprietà *assolute,* prima delle quali è la misura della curvatura, data dalla formola:

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\} \quad (*)$$

ovvero, nel caso nostro, vista la (3),

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

Ponendo per un momento

$$\Delta^2=u^2+v^2+a^2$$

si trova

$$\frac{\partial E}{\partial v}=-\frac{2R^2(\Delta^2-2u^2)v}{\Delta^6}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}=-\frac{2R^2(\Delta^2-2v^2)u}{\Delta^6}$$

donde

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}=-\frac{2a}{v^2+a^2}\frac{\partial\Delta}{\partial u};$$

quindi

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{R^2}\frac{\Delta^3}{v^2+a^2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial u^2}=\frac{1}{R^2}.$$

Dunque le nostre superficie sono quelle di curvatura costante. In particolare, se R è quantità reale, le formole (25) competono a tutte le superficie applicabili sulla sfera di raggio R.

(*) Veggasi per. es. l'art. XXIV delle citate mie *Ricerche.*

XV.

È noto che le espressioni finite in u, v delle coordinate ordinarie X, Y, Z relative alle superficie di curvatura costante non sono ancora state determinate in generale. Quelle relative alla superficie sferica tipo sono le seguenti:

$$X = \alpha + \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Y = \beta + \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Z = \gamma + \frac{Ra}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

donde eliminando u, v, si trae:

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = R^2,$$

α, β, γ essendo costanti arbitrarie. Infatti le precedenti espressioni danno:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 =$$

$$= \frac{R^2 \{ (v^2 + a^2)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + (u^2 + a^2)\,dv^2 \}}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$$

donde si deducono per E, F, G i valori precedenti.

Le u, v hanno un significato geometrico semplicissimo.

Infatti trasportiamo il centro della sfera nel punto di coordinate $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -a$, talchè si avrà

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}}, \\ Y &= \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}}, \\ Z &= \frac{Ra}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}} - a. \end{aligned} \right.$$

Il raggio passante pel punto (X, Y, Z) è rappresentato dalle equazioni:

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta + a}{Z + a},$$

epperò le coordinate del suo punto d'incontro col piano XY sono

$$\xi = \frac{aX}{Z + a}, \qquad \eta = \frac{aY}{Z + a},$$

ossia per le (26),

$$\xi = u, \quad \eta = v.$$

Dunque le variabili u, v non sono altro che le coordinate rettangole della projezione centrale di quella sfera sulla quale tutte le nostre superficie sono applicabili, e questa projezione, insieme colle sue trasformazioni omografiche, costituisce l'unica soluzione del problema, almeno finchè si considerano le equazioni (17) dalle quali siamo partiti.

Vedremo ora che anche le equazioni (17') e (17'') conducono alle medesime conclusioni. Ma per abbreviare il discorso ci contenteremo di dimostrare che anch'esse corrispondono a superficie di curvatura costante, senza punto risalire alle espressioni di E, F, G per u, v, che ognuno potrà facilmente ottenere procedendo in modo analogo a quello che si è usato or ora, e che si possono agevolmente ridurre alla medesima forma (26.)

XVI.

Incominciamo dalle (17'). Esse danno

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2,$$

$$\Psi = B_0 + B_1\beta + B_2\beta^2,$$

epperò la (15) diventa:

$$2\,(A_2 + B_2)\,(A_1\alpha + A_2\alpha^2 - B_1\beta - B_2\beta^2) = 2\,(A_0 + B_0)\,(A_2 - B_2) - A_1^2 + B_1^2.$$

Porremo quindi

$$A_2 + B_2 = 0, \qquad 2\,(A_0 + B_0)\,(A_2 - B_2) = A_1^2 - B_1^2.$$

Quest'ultima relazione, in forza della precedente, può scriversi

$$4\,A_0A_2 - A_1^2 = 4\,B_0B_2 - B_1^2.$$

Se fosse $A_2 = B_2 = 0$, si avrebbe quindi

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha, \qquad \Psi = B_0 \pm A_1\beta$$

o più semplicemente

(27) $$\Phi = 2\,A\alpha, \qquad \Psi = \pm\,2\,A\beta,$$

poichè in forza delle (10) (11) si può alle α, β aggiungere una costante.

Se invece A_2 e B_2 non sono nulli, si soddisfarà alle condizioni trovate ponendo

$$\Phi = A\left\{(\alpha - a)^2 - c^2\right\}, \qquad \Psi = -A\left\{(\beta - b)^2 - c^2\right\},$$

o più semplicemente

$$(27') \qquad \Phi = A(\alpha^2 - c^2), \qquad \Psi = -A(\beta^2 - c^2).$$

1°) Nel caso delle formole (27) si ha dalle (13)

$$\varphi = \frac{1}{2A\alpha}, \qquad \psi = \pm\frac{1}{2A\beta}$$

$$\varphi d\alpha \mp \psi d\beta = \frac{1}{2A}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\beta}{\beta}\right).$$

Scrivendo dunque indifferentemente t per τ (ved. le eq. (21)) si ha

$$t = \frac{1}{2A}\log\frac{\alpha}{\beta}$$

donde $$u_1 \operatorname{sen} hAt = v_1 \cos hAt.$$

Quando si prende il segno superiore si ha

$$\alpha = u_1(1 + tghAt), \ \beta = u_1(1 - tghAt),$$

$$\varphi\psi = \left(\frac{\cos hAt}{2Au_1}\right)^2,$$

epperò

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\cos hAt}{A}\right)^2 (d\log u_1)^2.$$

Prendendo invece il segno inferiore ed esprimendo α, β per v_1 si trova

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} hAt}{A}\right)^2 (d\log v_1)^2.$$

Ora, quando l'elemento lineare di una superficie ha la forma

$$du^2 + Gdv^2,$$

la misura della curvatura è espressa da

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Dunque le due forme precedenti convengono entrambe ad una superficie di curvatura costante $= -A^2$. Nella prima A dev' essere reale, ma nella seconda può essere immaginario della forma iA'. In questo secondo caso la superficie è applicabile sulla sfera di raggio $\frac{1}{A'}$.

2°) Adottando le formole (27′) si ha

$$\varphi = \frac{1}{A(\alpha^2 - c^2)}, \qquad \psi = \frac{-1}{A(\beta^2 - c^2)}$$

quindi

$$t = \frac{1}{2Ac} \log \frac{\alpha\beta + c^2 - c(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + c^2 + c(\alpha + \beta)},$$

ossia

$$\frac{u_1^2 - v_1^2 + c^2 - 2cu_1}{u_1^2 - v_1^2 + c^2 + 2cu_1} = e^{2Act}$$

donde

$$v_1 = \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2},$$

$$\alpha = u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2},$$

$$\beta = u_1 - \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2}.$$

Sostituendo questi valori in φ e ψ si trova

$$4\varphi\psi = -\frac{\operatorname{sen} h^2 Act}{A^2 c^2 u_1^2},$$

e quindi scrivendo A in luogo di Ac,

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} hAt}{A}\right)^2 (d \log u_1)^2.$$

Questa forma dell' elemento lineare corrisponde di nuovo ad una superficie di curvatura costante $= -A^2$.

XVII.

Consideriamo finalmente la soluzione data dalla (17″). Essa rientra in quella che abbiamo dedotta dalla (17). Infatti chiamiamo $2h$ il valore costante di Ψ: sostituendolo nella (15) troveremo

$$(\Phi + 2h)\, \Phi''(\alpha) - \Phi'(\alpha)^2 = 0,$$

donde

$$\Phi = Ae^{r\alpha} - 2h,$$

essendo A, r costanti arbitrarie. Ora questi valori di Φ, Ψ si possono dedurre dai valori (18) ponendo $k = k' = 0$. Non è dunque necessario sviluppare ulteriormente questo caso.

XVIII.

Dalle cose esposte emerge pienamente dimostrato il seguente teorema:

Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall' ordinaria omografia (*). *Quando non è nulla, questa legge è riducibile alla projezione centrale nella sfera ed alle sue trasformazioni omografiche.*

Siccome fra tutte le superficie di curvatura costante, la sola che possa ricevere applicazioni nella teoria delle carte geografiche e nella geodesia è probabilmente la superficie sferica, così dal punto di vista di queste applicazioni viene in tal modo ad essere confermato quello che si asserì in principio, cioè che la sola soluzione del problema è fornita in sostanza dalla projezione centrale.

A rimuovere tuttavia ogni equivoco circa l' estensione ed il significato del precedente teorema sono necessarie due osservazioni.

Primieramente si deve rammentare che gli elementi primitivi della corrispondenza considerata sono i *punti,* così della superficie come del piano. Se si volessero unicamente far corrispondere le rette del piano alle linee geodetiche della superficie la quistione diventerebbe assolutamente diversa e non imporrebbe condizione alcuna alla natura della superficie. Infatti rappresentando con

$$f(u, v, a, b) = 0$$

l' equazione integrale delle linee geodetiche sulla superficie considerata, e con

$$y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$$

quella di una retta del piano, basterebbe stabilire due relazioni fra le A, B, a, b, con che ad ogni geodetica corrisponderebbe una retta e viceversa. Ma è chiaro che in questo modo ad un punto della superficie, considerato come intersezione delle geodetiche uscenti da esso, corrisponderebbe sul piano l' inviluppo delle rette corrispon-

(*) Cioè distendendo la superficie sopra un piano, si ottiene una figura omografica colla rappresentazione.

denti. E soltanto nel caso in cui si prescrivesse che quest' inviluppo dovesse ridursi a un punto, si ricadrebbe sulla quistione trattata precedentemente, e quindi sulle limitazioni ad essa inerenti.

La seconda avvertenza è relativa alla generalizzazione di cui è suscettibile l'enunciato del nostro problema, vale a dire: *riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.* La soluzione di questo problema più generale non è punto deducibile da quella del caso già considerato, come lo è per es. quando la proprietà caratteristica della corrispondenza è la similitudine delle parti infinitesime o la conservazione dei rapporti d' area. La sola estensione che si può dare legittimamente al nostro teorema è questa: *Affinchè i punti di una superficie possano essere riportati sopra una superficie di curvatura costante, in modo che le linee geodetiche di quella sieno rappresentate da linee geodetiche di questa, è necessario e sufficiente che anche la prima superficie abbia la curvatura costante.*

Pisa 31 Maggio 1866.