

SOPRA IL LIMITE SUPERIORE DEL MODULO DI UNA FUNZIONE INTERA DI ORDINE FINITO.

Nota di **G. Bagnera**, in Messina.

Adunanza del 24 aprile 1904

Sia

$$(1) \quad F(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \dots + \frac{z^p}{pa_i^p}}$$

un prodotto assolutamente convergente di fattori canonici, e si sappia che la serie a termini generalmente decrescenti:

$$(2) \quad \left|\frac{1}{a_1}\right|^\sigma + \left|\frac{1}{a_2}\right|^\sigma + \left|\frac{1}{a_3}\right|^\sigma + \dots$$

è convergente per $\sigma = p + 1$ e divergente per $\sigma = p$, di modo che p è il *genere* della funzione intera $F(z)$. Denoto con σ un numero non superiore a $p + 1$ per cui la (2) sia convergente, e perciò tale che

$$(3) \quad p < \sigma \leq p + 1,$$

e mi propongo di dimostrare, con lo stesso metodo proposto dal signor H. POINCARÉ nel caso di σ intero, la diseuguaglianza:

$$(4) \quad |F(z)| < e^{\alpha|z|^\sigma},$$

la quale sussiste, per ogni α positivo assegnato a piacimento, subito che $|z|$ supera un numero convenientemente scelto.

Tutti i fattori di (1) sono della forma:

$$\varphi(u) = (1 - u) e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}}$$

ed è noto che lo sviluppo della funzione intera $\varphi(u)$ è della forma :

$$\varphi(u) = 1 - c_1 u^{p+1} - c_2 u^{p+2} - \dots,$$

dove c_1, c_2, \dots sono numeri *positivi* la cui somma è eguale all'unità.

In primo luogo mostro che si può determinare una costante $k > 1$ in modo che, per qualsivoglia valore di u , si abbia :

$$(5) \quad |\varphi(u)| < e^{k|u|^\sigma}.$$

Essendo $\sigma > p$, è chiaro che si ha

$$|\varphi(u)| < e^{|u|^\sigma}$$

quando $|u|$ supera un determinato numero R , e perciò, prendendo $k > 1$, a *fortiori* sussiste (5) per i detti valori di $|u|$; dimostro che sussiste ancora quando $|u|$ non supera un numero positivo $r < 1$, e d'altronde arbitrario.

Infatti si ha :

$$|\varphi(u)| < 1 + |u|^{p+1}(c_1 + c_2|u| + \dots),$$

poi, osservando che $c_1 + c_2 + \dots$ è l'unità e che $|u| < 1$, si ha :

$$|\varphi(u)| < 1 + |u|^{p+1} \leq 1 + |u|^\sigma < e^{|u|^\sigma},$$

purchè si tenga conto di (3). Dunque, avendo scelto $k > 1$, ha luogo la (5) a *fortiori*.

Finalmente, per valori di u il cui modulo resta compreso tra r ed R , si chiami M il massimo modulo di $\varphi(u)$, e si determini k in modo che sia :

$$M < e^{kr^\sigma},$$

ed allora la (5) ha luogo anche per questi valori di u , ed in conclusione per qualsivoglia valore di u .

Questo primo punto stabilito, dimostro, seguendo il sig. H. POINCARÉ, che, comunque sia dato il numero positivo α , si possono sempre trovare infiniti numeri *positivi* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ in modo che si abbia :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

ed

$$(6) \quad \alpha_n = k \left| \frac{1}{a_n} \right|^\sigma$$

per tutti gli n superiori a un numero ν che dipende da α . E difatti, giacchè la (2) è convergente, posso determinare ν in modo che risulti :

$$\frac{\alpha}{k} > \left| \frac{1}{a_{\nu+1}} \right|^\sigma + \left| \frac{1}{a_{\nu+2}} \right|^\sigma + \dots,$$

e perciò, se pongo (6) per i detti valori di n , quel che resta sopprimendo nella serie delle α_n i primi ν termini è minore di α ; allora io posso disporre di questi primi ν termini in modo che la somma della menzionata serie sia α .

Ciò posto, essendo :

$$e^{-\alpha|\zeta|^\sigma} |F(\zeta)| = \prod_1^\infty e^{-\alpha_n|\zeta|^\sigma} \left| \left(1 - \frac{\zeta}{a_n} \right) e^{\frac{\zeta}{a_n} + \frac{\zeta^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{\zeta^p}{pa_n^p}} \right|,$$

si ha, in virtù di (5) e (6), per $n > \nu$:

$$e^{-\alpha_n|\zeta|^\sigma} \left| \left(1 - \frac{\zeta}{a_n} \right) e^{\frac{\zeta}{a_n} + \frac{\zeta^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{\zeta^p}{pa_n^p}} \right| < e^{-\alpha_n|\zeta|^\sigma} e^{|\frac{\zeta}{a_n}|^\sigma} = 1,$$

e quindi, limitandosi ai primi ν fattori, si ha con maggior ragione :

$$e^{-\alpha|\zeta|^\sigma} |F(\zeta)| < \prod_1^\nu e^{-\alpha_n|\zeta|^\sigma} \left(1 + \left| \frac{\zeta}{a_n} \right| \right) e^{|\frac{\zeta}{a_n}| + \frac{1}{2} |\frac{\zeta}{a_n}|^2 + \dots + \frac{1}{p} |\frac{\zeta}{a_n}|^p}.$$

Il secondo membro dell'ultima disuguaglianza è della forma :

$$Qe^{P-\beta|\zeta|^\sigma},$$

dove Q e P sono due polinomi, il primo di grado ν ed il secondo di grado p rispetto a $|\zeta|$, e β è un numero positivo eguale alla somma $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$. Giacchè è $\sigma > p$ il detto secondo membro tende a zero quando $|\zeta|$ aumenta indefinitamente, e perciò diviene e resta minore dell'unità quando $|\zeta|$ supera un numero convenientemente scelto. Dunque, per tali valori di $|\zeta|$, si ha :

$$e^{-\alpha|\zeta|^\sigma} |F(\zeta)| < 1,$$

cioè (4).

I ragionamenti che precedono non soffrono eccezione nel caso di $p = 0$, ed inoltre, come risulta da (3), non ho avuto bisogno di supporre $\sigma < p + 1$, di modo che la dimostrazione ora data, comprende le tre dimostrazioni riportate nelle pagine 48-61 del libro del sig. E. BOREL : « *Leçons sur les fonctions entières* ».

Messina, 15 marzo 1904.

GIUSEPPE BAGNERA.