

SUL PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE DI LIE NELLA TEORIA DEI GRUPPI DI TRASFORMAZIONI.

Nota di **Carlo Severini** (Catania).

Adunanza del 12 maggio 1907.

Affinchè un insieme ∞^r di trasformazioni

$$(1) \quad x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

costituisca un gruppo è sufficiente, come insegna il primo teorema fondamentale di LIE ²⁾ che le x' , quali funzioni dei parametri a , soddisfino ad equazioni della forma:

$$(2) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

e che fra le (1) sia contenuta la trasformazione identica, corrispondente a valori dei parametri, pei quali il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ è diverso da zero.

La proposizione inversa non è vera in tutta la sua estensione, perchè, ammesso che le (1) costituiscano un gruppo, se si può dire che esse soddisfano ad equazioni come le (2), in cui il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ non è identicamente nullo, e le $\xi_{\rho h}(x')$ non soddisfano a nessun sistema di equazioni della forma:

$$(3) \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_{\rho} \xi_{\rho h}(x') = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

coi coefficienti g_{ρ} indipendenti dalle x' e non tutti nulli ³⁾, non può peraltro asserirsi che all'insieme (1) appartenga la trasformazione identica.

Se però, essendo il campo di variabilità delle x e delle a il campo totale di tutti i possibili valori di siffatte variabili ⁴⁾, il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, nelle equazioni (2), a cui supponiamo soddisfino le (1), risulta sempre diverso da zero, la trasforma-

¹⁾ Scriviamo per brevità, secondo l'uso, $f_i(x, a)$ invece di $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r)$, ed analoghe notazioni useremo in casi analoghi.

²⁾ Cfr. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, III^{ten} Abschnit, Abth. VI (Leipzig, Teubner, 1893).

³⁾ Questa proprietà delle $\xi_{\rho h}(x')$ è nella prima parte del teorema di LIE implicita nella condizione che i parametri siano essenziali.

⁴⁾ Per tale ipotesi le funzioni che avremo da considerare, le quali d'ordinario si suppongono analitiche regolari, s'intenderà che siano trascendenti intere.

zione identica deve necessariamente essere contenuta fra queste, affinchè possano costituire un gruppo.

Di ciò mi occupo anzitutto nella presente Nota. Indico poi, per il caso ora detto, delle condizioni che equivalgono all'ipotesi che esista la trasformazione identica, e che possono pertanto condurre a dimostrare che formano un gruppo le trasformazioni di un dato insieme, del quale si sa soltanto che soddisfano ad equazioni del tipo delle (2), insieme cui si può pervenire colla diretta integrazione delle stesse (2), ove si fissi, mediante una trasformazione che non sia l'identica, il modo di dipendere delle x' dalle x , per un determinato sistema di valori dei parametri.

1. Ricordiamo che dall'essere i parametri essenziali si deduce che le funzioni $\xi_{\rho h}(x')$ non possono soddisfare ad equazioni come le (3), e che il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ è in generale diverso da zero: noi ammetteremo, come dianzi abbiamo accennato, che sia sempre diverso da zero.

Se si pone:

$$(4) \quad X'_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_h} \quad (\rho = 1, 2, \dots, r),$$

le r trasformazioni infinitesimali $X'_\rho f$ saranno linearmente indipendenti, e si avrà inoltre:

$$(5) \quad (X'_k X'_\rho) f = \sum_{s=1}^{s=r} C_{k\rho s} X'_s f \quad (k, \rho = 1, 2, \dots, r; \rho \neq k),$$

ove i coefficienti $C_{k\rho s}$ sono quantità costanti.

2. Risolvendo le (2) rispetto alle $\xi_{\rho h}(x')$ si abbia:

$$\xi_{\rho h}(x') = \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_{\rho k}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, n \\ \rho = 1, 2, \dots, r \end{array} \right),$$

donde, se con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ s'indicano r quantità indeterminate, segue:

$$(6) \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x') = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Essendo t un'altra quantità indeterminata, riguardiamo i parametri a come funzioni di t e delle λ , ponendo che sia, per ogni sistema di valori scelti per le λ :

$$(7) \quad \frac{da_k}{dt} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

o, ciò che è lo stesso:

$$a_k = a_k^{(0)} + \frac{t}{1!} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \alpha_{\rho k}(a^{(0)}) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

ove con $a^{(0)}$ indichiamo i valori assunti per le a come corrispondenti del valore $t=0$.

Ponendo:

$$t \lambda_\rho = \mu_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, r),$$

si può anche scrivere:

$$(8) \quad a_k = a_k^{(0)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \mu_\rho \alpha_{\rho k}(a^{(0)}) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Per le ipotesi fatte sulle $\psi_{\rho k}(a)$, dalle quali segue che le $\alpha_{\rho k}(a)$ sono funzioni trascendenti intere delle variabili a , e che il loro determinante, che è l'inverso di quello

delle $\psi_{\rho k}(a)$, è sempre finito e diverso da zero, si vede bene, che l'intorno del punto $a_k^0 (k = 1, 2, \dots, r)$, in cui restano definiti gl'integrali delle equazioni (7) si estende a tutto lo spazio ad r dimensioni. D'altra parte le (8) definiscono le quantità μ come funzioni delle a stesse, essendo il determinante funzionale $\frac{\partial(a_1, a_2, \dots, a_r)}{\partial(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)}$ non identicamente nullo, come si prova, osservando che diverso da zero è per valori nulli delle μ , perchè si ha:

$$\left(\frac{\partial a_k}{\partial \mu_\rho}\right)_{\mu=0} = \alpha_{\rho k}(a^0) \quad (k, \rho = 1, 2, \dots, r);$$

per modo che la corrispondenza che le (8) stabiliscono fra i parametri a ed i nuovi parametri μ è biunivoca; ed al variare comunque di questi si otterranno le trasformazioni del sistema (1) nella loro totalità.

Ciò posto dalle (6) e dalle (7) deduciamo:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x') = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \frac{d a_k}{d t} = \frac{d x'_h}{d t}.$$

Le equazioni:

$$(9) \quad \frac{d x'_h}{d t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x') \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

per ogni sistema di valori assegnati alle λ , definiscono un gruppo ad un parametro, che è il gruppo canonico, avente come trasformazione infinitesimale generatrice la:

$$(10) \quad Xf = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

ove si è posto:

$$(11) \quad \xi_h(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x) \quad (h = 1, 2, \dots, n);$$

e si vede bene che tale trasformazione infinitesimale non è altro che una combinazione lineare, con coefficienti uguali ai valori fissati per le λ , delle r trasformazioni infinitesimali indipendenti (4), scritte nelle variabili x_i , cioè:

$$Xf = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho X_\rho f.$$

Si ha infatti per le (11):

$$Xf = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f}{\partial x_h} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \xi_{\rho h}(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

che, a causa delle (4), dimostra l'asserto.

Supponiamo che, integrando il sistema (9), si abbia:

$$(12) \quad \Omega_i(x', \mu) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Poichè abbiamo detto che a valori nulli dei parametri μ , cioè a $t = 0$, corrispondono per i primitivi parametri i valori $a^{(0)}$, sarà in particolare:

$$(13) \quad \Omega_i[f(x, a^0), 0] = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e confrontando le (12) colle (13) si avrà in ultimo:

$$(14) \quad \Omega_i(x', \mu) = \Omega_i[f(x, a^0), 0] \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le

$$(15) \quad \Omega_i(x', \mu) = \Omega_i(x, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sono le equazioni del gruppo canonico ad un parametro, generato dalla trasformazione infinitesimale (10).

Segue pertanto dalle (14) che si ottiene l'insieme delle trasformazioni (1) moltiplicando la trasformazione:

$$(16) \quad x_i^{(0)} = f_i(x, a^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

per le trasformazioni di ∞^{r-1} gruppi ad un parametro, che si hanno quando si considerino per le λ tutti i possibili sistemi di valori.

D'altra parte, per il secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi ⁵⁾ l'insieme di questi ∞^{r-1} gruppi canonici ad un parametro costituisce, a causa delle (6), un gruppo.

Si può dunque concludere che l'insieme delle trasformazioni (1) si ottiene moltiplicando la (16), che è una trasformazione qualunque di esso insieme, per le trasformazioni del gruppo G_r , generato dalle r trasformazioni infinitesimali (4).

3. Ammettiamo ora che l'insieme delle trasformazioni (1) costituisca un gruppo, e consideriamo due trasformazioni qualsivogliano di esso.

Indicando queste con S_a , $S_{a'}$ e con $S_{a^{(0)}}$ la (16) sarà:

$$S_a = S_{a^{(0)}} E_\lambda, \quad S_{a'} = S_{a^{(0)}} E_\mu,$$

ove E_λ , E_μ rappresentano due determinate trasformazioni di G_r ; e quindi:

$$(17) \quad S_a S_{a'} = S_{a^{(0)}} E_\lambda S_{a^{(0)}} E_\mu.$$

Ma, essendo la $S_a S_{a'}$ una delle trasformazioni (1), esisterà in G_r una trasformazione E_ν , per la quale si ha:

$$S_a S_{a'} = S_{a^{(0)}} E_\nu.$$

Dal confronto di questa colla (17) si ricava che deve essere:

$$E_\lambda S_{a^{(0)}} E_\mu = E_\nu,$$

ossia:

$$S_{a^{(0)}} = E_\lambda^{-1} E_\nu E_\mu^{-1}.$$

Questo ci dice che la $S_{a^{(0)}}$, e quindi ognuna delle (1), appartiene al gruppo G_r . E si verifica anche la proprietà inversa; perchè, indicando con E_π una qualsivoglia trasformazione di G_r , si potrà sempre soddisfare all'equazione:

$$S_{a^{(0)}} E_\sigma = E_\pi,$$

prendendo:

$$E_\sigma = S_{a^{(0)}}^{-1} E_\pi,$$

che pure appartiene a G_r , il quale, essendo a coppie di trasformazioni inverse, conterrà, insieme con $S_{a^{(0)}}$, anche $S_{a^{(0)}}^{-1}$.

Il gruppo rappresentato dalle (1) coincide pertanto col gruppo G_r , e, come tale, contiene la trasformazione identica.

Da tutto quanto è stato sin qui detto possiamo dunque, concludendo, raccogliere il seguente teorema:

⁵⁾ Cfr. LIE, I. c.

Se si ha un insieme ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

soddisfacenti ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_b}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho b}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left(\begin{matrix} b = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right),$$

il campo di variabilità delle x e delle a essendo il campo totale di tutti i possibili valori di siffatte variabili ed il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ risultando sempre diverso da zero, condizione necessaria e sufficiente affinchè tale insieme costituisca un gruppo è che ad esso appartenga la trasformazione identica.

4. Supponiamo ora, nelle condizioni dette sul campo di variabilità delle x e delle a e sul determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, di sapere soltanto che le (1) soddisfano alle equazioni (2), e ricerchiamo le condizioni, a cui in principio abbiamo accennato, equivalenti all'ipotesi che esista nell'insieme (1) la trasformazione identica, condizioni necessarie e sufficienti perchè tale insieme costituisca un gruppo.

Ammettiamo anzitutto che la trasformazione:

$$(18) \quad x''_i = f_i[f(x, a), b] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

prodotto di due trasformazioni qualunque:

$$(19) \quad x'_i = f_i(x, a)$$

$$(20) \quad x''_i = f_i(x', b) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

delle (1), abbia soltanto r parametri essenziali, il che è evidentemente necessario, se si vuole che queste costituiscano un gruppo.

Se con c_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, r$) indichiamo i parametri della (18), avremo:

$$(21) \quad x''_i = \varphi_i(x, c) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e le c saranno funzioni delle a e delle b , cioè:

$$c_\rho = \theta_\rho(a, b) \quad (\rho = 1, 2, \dots, r).$$

Queste relazioni risultano, come è noto, risolubili sia rispetto alle a , sia rispetto alle b . Ciò del resto segue dal fatto che, se teniamo ad esempio fisse le a , e facciamo variare le b , la (21) percorre, come la (20), un insieme ∞^r di trasformazioni, e perciò le r funzioni c sono indipendenti rispetto alle b , ossia il determinante funzionale $\frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial(b_1, b_2, \dots, b_r)}$ è diverso da zero. Analogamente si prova che è diverso da zero $\frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial(a_1, a_2, \dots, a_r)}$.

Se ne ricava che, se con S_a, S_b indichiamo le trasformazioni rappresentate dalle (19), (20), si potrà soddisfare alla relazione:

$$(22) \quad S_a S_b = S_{a^{(0)}}^2$$

o, ciò che è lo stesso, alle equazioni:

$$\theta_\rho(a, b) = \theta_\rho(a^{(0)}, a^{(0)}) \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

sia assegnando le a e calcolando le b , sia assegnando le b e calcolando le a .

Dalla (22) abbiamo :

$$(23) \quad S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = S_{a^{(0)}} S_b^{-1}.$$

Dopo ciò se, come sopra, indichiamo con E_λ una trasformazione generica del gruppo G_r , per il risultato a cui siamo pervenuti nel § precedente, si potrà scrivere:

$$S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = E_\lambda,$$

il che ci dice che la trasformazione $S_{a^{(0)}}^{-1} S_a$ percorre al variare di a tutte le trasformazioni di G_r . Il medesimo si verifica allora, a causa della (23), per la trasformazione $S_{a^{(0)}} S_b^{-1}$, al variare di b , e dell'inversa di questa $S_b S_{a^{(0)}}^{-1}$, per modo che si ha :

$$S_b S_{a^{(0)}}^{-1} = E_\mu,$$

E_μ indicando ancora una trasformazione qualunque di G_r , donde :

$$S_b = E_\mu S_{a^{(0)}}.$$

I due insiemi di trasformazioni :

$$S_{a^{(0)}} E_\lambda, \quad E_\mu S_{a^{(0)}}$$

coincidono dunque coll'insieme dato (1), e però possiamo simbolicamente scrivere :

$$S_{a^{(0)}} G_r = G_r S_{a^{(0)}}$$

che è quanto dire:

$$(24) \quad S_{a^{(0)}}^{-1} G_r S_{a^{(0)}} = G_r,$$

cioè la $S_{a^{(0)}}$, che è una trasformazione qualunque delle (1), trasforma, sotto l'ipotesi posta al principio di questo §, in sè stesso il gruppo G_r .

5. Ciò posto supponiamo ancora che all'insieme (1) appartenga il prodotto $S_{a^{(1)}} S_{a^{(2)}}$ di due sue determinate trasformazioni $S_{a^{(1)}}$, $S_{a^{(2)}}$, condizione anche questa necessaria, perchè si possa avere un gruppo.

Non escludiamo che possano $S_{a^{(1)}}$, $S_{a^{(2)}}$ coincidere, e, nel caso che siano distinte, nessuna ipotesi ci occorre fare sul prodotto $S_{a^{(2)}} \cdot S_{a^{(1)}}$.

Poniamo :

$$S_{a^{(1)}} \cdot S_{a^{(2)}} = S_{a^{(3)}}.$$

Per quanto è stato detto nel § 2 l'insieme delle trasformazioni (1) si potrà ottenere moltiplicando una qualunque delle $S_{a^{(1)}}$, $S_{a^{(2)}}$, $S_{a^{(3)}}$ per le trasformazioni di G_r .

Essendo allora S_a , $S_{a'}$ due trasformazioni qualsivogliano di detto insieme, sarà :

$$(25) \quad S_a = S_{a^{(1)}} E_\lambda^{(1)}, \quad S_{a'} = S_{a^{(2)}} E_\mu^{(2)},$$

ove $E_\lambda^{(1)}$, $E_\mu^{(2)}$ rappresentano due determinate trasformazioni di G_r , i cui parametri μ sono dati, per la prima dal sistema di equazioni:

$$a_k = a_k^{(1)} + \frac{1}{1!} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \mu_\rho \alpha_{\rho k} (a^{(1)}) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

e per l'altra dal sistema di equazioni:

$$a'_k = a_k^{(2)} + \frac{1}{1!} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \mu_\rho \alpha_{\rho k} (a^{(2)}) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Si consideri della $E_\lambda^{(1)}$ la trasformata per mezzo della $S_{a^{(2)}}$, che pure appartiene a G_r

(§ prec.), e s'indichi con $\bar{E}_\lambda^{(1)}$, si ponga cioè:

$$(26) \quad \bar{E}_\lambda^{(1)} = S_{a^{(2)}}^{-1} E_\lambda^{(1)} S_{a^{(2)}}.$$

La $S_{a^{(3)}} \bar{E}_\lambda^{(1)} E_\mu$ apparterrà (§ 2) all'insieme (1): i suoi parametri si otterranno dalle formole:

$$a_k = a_k^{(3)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \mu_\rho \alpha_{\rho k}(a^{(3)}) \dots \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

sostituendo nel secondo membro al posto delle μ i valori corrispondenti alla trasformazione $\bar{E}_\lambda^{(1)} E_\mu$.

La medesima trasformazione $S_{a^{(3)}} \bar{E}_\lambda^{(1)} E_\mu$ rappresenta inoltre il prodotto delle date trasformazioni $S_a, S_{a'}$, perchè si ha dalle (25):

$$S_a \cdot S_{a'} = S_{a^{(1)}} E_\lambda^{(1)} S_{a^{(2)}} E_\mu^{(2)},$$

donde per la (26):

$$S_a \cdot S_{a'} = S_{a^{(1)}} S_{a^{(2)}} \bar{E}_\lambda^{(1)} E_\mu^{(2)}$$

e finalmente:

$$S_a \cdot S_{a'} = S_{a^{(3)}} \bar{E}_\lambda^{(1)} E_\mu^{(2)}.$$

È ovvio che in modo analogo si perviene a dimostrare che all'insieme (1) appartiene anche il prodotto $S_{a'} \cdot S_a$ delle due assegnate trasformazioni: basta perciò esprimere $S_{a'}$ ed S_a nel modo dianzi tenuto rispettivamente per S_a ed $S_{a'}$.

Le considerazioni svolte in questo e nel precedente § permettono di enunciare il seguente teorema:

Se si ha un insieme ∞^r di trasformazioni:

$$(27) \quad x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

soddisfacenti ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x') \psi_{\rho k}(a) \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{array} \right),$$

il campo di variabilità delle x e delle a essendo il campo totale di tutti i possibili valori di siffatte variabili, ed il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ risultando sempre diverso da zero, condizione necessaria e sufficiente affinchè tale insieme costituisca un gruppo è che la trasformazione prodotto di due qualsivogliano di esse abbia soltanto r parametri essenziali, e per un particolare sistema di valori di questi coincida con una delle (27).

6. La condizione espressa dalla (24), necessaria, come si è visto, perchè i parametri essenziali, da cui dipende la trasformazione prodotto di due qualsivogliano delle (1), siano soltanto r , è anche sufficiente, perchè da essa si ricava che coll'insieme delle trasformazioni (1) coincide ognuno degli insiemi:

$$S_{a^{(0)}} E_\lambda, \quad E_\mu S_{a^{(0)}},$$

e che essendo pertanto il prodotto di due qualsivogliano delle (1) espresso da

$$S_{a^{(0)}} E_\lambda E_\mu S_{a^{(0)}},$$

esso contiene i soli r parametri essenziali di $E_\lambda E_\mu$.

Si può quindi anche dire:

Nelle ipotesi del teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'insieme dato di trasformazioni costituisca un gruppo è che ad esso appartenga il prodotto $S_{a(1)} S_{a(2)}$ di due sue determinate trasformazioni $S_{a(1)}$, $S_{a(2)}$ ed una trasformazione S_a^- (che potrebbe anche coincidere con una delle precedenti) per la quale resti trasformato in sè il gruppo G_r , generato dalle r trasformazioni infinitesimali:

$$(28) \quad X_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} \quad (\rho = 1, 2, \dots, r).$$

7. La condizione, cui deve soddisfare la S_a^- , è soddisfatta, se il sistema di queste trasformazioni infinitesimali è, rispetto ad essa, invariante, se cioè posto:

$$\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si ha:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \varepsilon_\rho \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \bar{\varepsilon}_\rho \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(\bar{x}) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_h},$$

ove le $\bar{\varepsilon}_\rho$ sono funzioni delle sole ε_ρ , perchè allora la S_a^- trasforma, come è noto, l'uno nell'altro gli ∞^{r-1} gruppi ad un parametro, che costituiscono G_r . D'altra parte, se le (1) costituiscono un gruppo, coincidendo questo con G_r , rispetto ad ognuna delle (1) è invariante il sistema delle (28).

Ciò permette di concludere che l'insieme dato delle trasformazioni (1) costituisce un gruppo, allora e solo allora quando ad esso appartiene il prodotto $S_{a(1)} \cdot S_{a(2)}$ di due sue determinate trasformazioni $S_{a(1)}$, $S_{a(2)}$, ed una trasformazione S_a^- (che potrebbe anche coincidere con una delle precedenti) rispetto alla quale è invariante il sistema delle r trasformazioni infinitesimali (28).

Catania, marzo 1907.

C. SEVERINI.