Ueber den Pohlke'schen Satz.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Der sogenannte Pohlke'sche Satz oder der Fundamentalsatz der Axonometrie ist zwar mehrfach behandelt worden, indessen scheint man kaum versucht zu haben, ihn in projective Form*) zu kleiden, obwohl von vornherein zu erwarten war, dass er dann alles Ueberraschende verlieren, sein Beweis sich somit von selbst ergeben würde. Dies fand ich in der That bestätigt, als ich bei einer zufälligen Beschäftigung mit dem Pohlke'schen Satze diesen Versuch machte. Es sei mir gestattet dies kurz auseinanderzusetzen.

Der Pohlke'sche Satz lautet in etwas allgemeinerer Fassung folgendermassen:

Vier gegebene Punkte A, B, C, O des Raumes lassen sich stets so durch Parallelprojection auf eine Ebene projiciren, dass die Projectionsfigur einer gegebenen aus vier Punkten A', B', C', O' einer Ebene bestehenden Figur ähnlich wird; von diesen letzten Punkten dürfen allerdings niemals drei in einer Geraden liegen.

Bedenkt man nun, dass die ähnliche Beziehung zweier Ebenen im projectiven Sinne aufzufassen ist als eine collineare, für welche die imaginären Kreispunkte im Unendlichen der einen Ebene denen der anderen entsprechen, so sieht man, dass der Pohlke'sche Satz in projectiver Form folgendermassen lautet:

Vier gegebene Punkte A, B, C, O des Raumes lassen sich von einem gewissen Punkte S einer gegebenen Ebene ω stets so auf eine zu suchende Ebene ε projiciren, dass, wenn die vier Projectionen derselben vier gegebenen Punkten A', B', C', O' einer gegebenen Ebene ε' collinear

*) Die Bemerkung auf S. 339 von Fiedlers darstellender Geometrie, I. Th., 3. Aufl., Leipzig 1883 setzt zwar den einen Theil des Pohlke'schen Satzes, soweit er sich auf Affinität bezieht, in projective Form, nicht aber denjenigen, welcher sich auf Aehnlichkeit bezieht; gerade diesem Theile aber verdankt der Satz seine Verwendbarkeit in der Axonometrie. Auf S. 367 desselben Werkes findet man die auf den Pohlke'schen Satz bezügliche Litteratur angegeben.

gesetzt werden, gleichzeitig den beiden Schnittpunkten von ε' mit einem gegebenen (reellen oder imaginären) Kegelschnitte k^2 von ω die Schnittpunkte von ε mit demselben Kegelschnitte entsprechen; von den vier Punkten A', B', C', O' dürfen allerdings keine drei in einer Geraden liegen.

Der Beweis dieses Satzes ist aber sehr einfach. Zunächst sieht man, dass der Punkt S eindeutig dadurch bestimmt ist, dass das Bündel durch S so collinear auf die Ebene ε' bezogen sein soll, dass den Strahlen SA, SB, SC, SO und der Ebene ω die Punkte A', B', C', O' und die Gerade $(\varepsilon'\omega)$ entsprechen sollen. Es bilden nämlich alle derart collinear auf einander bezogenen Bündel des Raumes, dass die Strahlen durch die Punkte A, B, C, O einander entsprechen, ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel; ist nun festgesetzt, welche Ebene ω einer gegebenen Ebene irgend eines dieser Bündel entsprechen soll, so genügt nur ein Bündel des Gebüsches dieser Bedingung.*) Ich stütze mich absichtlich auf diesen allgemeineren Satz, obwohl der specielle sich in unserem Falle leicht nachweisen lässt, eben um den Beweis ohne jeden Kunstgriff zu bewerkstelligen.

Ist nun der Punkt S gefunden, so suche man diejenigen Strahlen p und q durch S, welche den Schnittpunkten P' und Q' von ε' mit k^2 entsprechen. Schneiden diese k^2 in resp. P_1, P_2 und Q_1, Q_2, so erfüllt irgend eine Ebene ε durch irgend eine der vier Geraden $P_1 Q_1$, $P_1 Q_2$, $P_2 Q_1$, $P_2 Q_2$ die Forderungen unseres Satzes.

Ist der Kegelschnitt k^2, wie beim Pohlke'schen Satze selbst, imaginär, so werden p und q durch eine elliptische Strahleninvolution vertreten, und es giebt dann zwei durch Zirkel und Lineal construirbare reelle gerade Linien in ω, auf welchen diese Strahleninvolution sowohl als das Polarsystem von k^2 dieselbe Punktinvolution bestimmen; irgend eine Ebene durch eine dieser beiden Geraden liefert dann eine reelle Lösung unserer Aufgabe. Es liefert also unser Beweis auch die Mittel, die gesuchten Stücke des Pohlke'schen Satzes mit Zirkel und Lineal zu construiren.

Leipzig, im November 1884.

*) Siehe meine Abh.: „Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen", diese Annalen Bd. XVIII, S. 15.