
II. Ueber Höhenbestimmungen durch das Barometer; von F. W. Bessel¹⁾.

Die Anwendung des Barometers zur Messung des Höhenunterschiedes zweier Punkte, beruhet auf der Voraussetzung des Gleichgewichtes der Atmosphäre; sie würde nichts zu wünschen übrig lassen, wenn diese Voraussetzung mit vollem Rechte gemacht werden könnte. Dann könnte als wahr angenommen werden, daß die Höhe des Quecksilbers im Barometer dem Gewichte der über demselben befindlichen Luftsäule proportional wäre, während dieses nicht angenommen werden kann, wenn diese Luftsäule, oder ein Theil derselben, eine dem Horizonte nicht parallele Bewegung hat. Auch würden Schichten der Atmosphäre von gleicher Dichtigkeit horizontal seyn, und man würde die Messung des Höhenunterschiedes zweier Punkte mit voller Sicherheit erhalten, diese Punkte möchten beide in einer Lothlinie, oder in kleinerer oder größerer Entfernung von einander liegen. Bei dem Zustande der Atmosphäre, so wie er wirklich ist, ist nicht mit Sicherheit darauf zu rechnen, daß das Barometer das genaue Maas des Gewichtes der über demselben befindlichen Luftsäule angebe; noch viel weniger aber kann auf die Horizontalität der Luftschichten von gleicher Dichtigkeit gerechnet werden. Die Störungen dieser Horizontalität sind oft so groß und anhaltend, daß der aus den Beobachtungen eines ganzen Monats abgeleitete mittlere Unterschied der Barometerhöhen zweier, 30 oder 40 Meilen von einander entfernten Punkte, mehr als eine

1) Wir erlauben uns diesen schätzbaren Aufsatz aus den *Astronomischen Nachrichten* (No. 279) zu entlehnen, in der Hoffnung, ihn dadurch unter die zahlreichen Freunde der Hypsometrie mehr zu verbreiten.

Pariser Linie von der Wahrheit abweichen kann, wie unter anderen aus den sorgfältigen Beobachtungen dieser Art hervorgeht, welche die Astronomischen Nachrichten früher von Altona und von Apenrade mitzutheilen pflegten. Obgleich also das Barometer in keinem Falle eine völlig sichere Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte geben kann, so wächst doch die Unsicherheit mit der Entfernung der mit einander zu vergleichenden Punkte so sehr, daß der Fall, in welchem sie in einer Lothlinie liegen, als der bei weitem vortheilhaftere angesehen werden muß.

Will man durch das Barometer den Höhenunterschied zweier Punkte mit mehr als roher Annäherung an die Wahrheit bestimmen, so muß man sich entweder auf Punkte beschränken, welche in geringen Entfernungen von einander liegen, oder man muß die Beobachtungen lange fortsetzen, um das Mittel der verschiedenen, dabei vorkommenden Zustände der Atmosphäre, mit einigem Grunde, als den Zustand des Gleichgewichtes ansehen zu können. Hierdurch wird die Bestimmung der Höhen sehr vieler Punkte eines Landes von einigermaßen beträchtlicher Ausdehnung sehr schwierig: wenn man auch nicht jeden derselben durch lange fortgesetzte Vergleichen mit dem Punkte von bekannter Höhe, der den übrigen zur Grundlage dienen soll, bestimmen will, so ist doch wenigstens erforderlich, daß eine beträchtliche Zahl, etwa gleichmäfsig im Lande vertheilter Punkte auf diese Art bestimmt und dann zur Vergleichung mit den übrigen benutzt werde. Dieses erfordert entweder die gleichzeitige Beschäftigung vieler Beobachter, oder eine lange Zeit, wenn wenige es leisten sollen.

Vor einigen Jahren wurde der Vorschlag gemacht, die Höhen der ausgezeichnetsten Punkte in dem diesseits der Weichsel liegenden Theile von Preussen zu bestimmen; man wollte die Höhen der Hügelreihen, der horizontalen Ebenen, der Landseen, das Gefälle der Flüsse

und die Tiefen der Thäler kennen lernen. Da vorherzusehen war, daß die gewöhnliche Anwendungsart des Barometers, welche in der Vergleichung weniger Beobachtungen an den zu bestimmenden Punkten, mit fortlaufenden an einem festen Punkte besteht, keinen nutzbaren Erfolg herbeigeführt haben würde, so bemühte ich mich, eine andere Anwendungsart aufzufinden, welche schon durch einige Besuche jedes zu bestimmenden Punktes ein sicheres Resultat liefern sollte. Obgleich der Vorschlag später zurückgenommen wurde, ich also nicht in den Stand gekommen bin, den Erfolg der Methode, welche ich angewandt zu sehen wünschte, kennen zu lernen, so zweifle ich doch nicht an ihrem Gelingen in ähnlichen Fällen, und theile sie daher hier mit. Sie geht darauf aus, die Störungen des Gleichgewichtes der Atmosphäre unschädlicher zu machen, auch den beständigen Unterschieden der zu den Beobachtungen angewandten Barometer keinen Einfluß auf die Resultate einzuräumen.

Das erstere glaube ich durch eine zweckmäßige Combination der Beobachtungen erlangen zu können, welche anhaltend an Barometern gemacht werden, welche an *mehreren* Punkten des Umfanges des Landes, in dessen Inneren die Höhen bestimmt werden sollen, aufgestellt sind; das andere wird durch fortgesetzte Vergleichungen des tragbaren Barometers mit jenen, ihren Ort nicht verändernden, hervorgebracht. Diese letzteren geben nämlich, indem sie den Druck der Atmosphäre an *mehreren* Punkten bestimmen, das Mittel, ihn für Punkte im Inneren, durch eine Interpolation kennen zu lernen, durch deren Anwendung der Einfluß einer Störung des Gleichgewichtes, wie ich glaube, fast ganz vernichtet werden kann. Die folgende Entwicklung dieser Ansicht der Sache, wird sie weiter erläutern.

I.

Der zu einer gegebenen Zeit stattfindende Druck der Atmosphäre auf einen Punkt einer horizontalen Oberfläche ist von dem Orte des Punktes auf dieser Oberfläche abhängig; dieselbe Abhängigkeit findet auch bei der Wärme einer horizontalen Luftschicht statt, so wie auch bei jeder, auf den Stand der meteorologischen Instrumente, oder auf daraus zu ziehende Resultate wirkenden Störung des Gleichgewichtes der Atmosphäre. Indem man diese Abhängigkeit verfolgt, kann man den Einfluß der Störungen des Gleichgewichts auf die gesuchte Höhe eines Punktes über der Meeresfläche dadurch aus der Rechnung schaffen, daß man die daselbst beobachteten Stände des Barometers und Thermometers nicht mit Einer an Einem anderen Punkte gemachten ähnlichen Beobachtung, sondern mit Beobachtungen an mehreren, den ersteren umgebenden Punkten vergleicht. Denn aus diesen Beobachtungen kann man durch Interpolation folgern, was die meteorologischen Instrumente an einem bestimmten Punkte der Lothlinie des Punktes von unbekannter Höhe angegeben haben würden, wenn man sie daselbst beobachtet hätte; die Vergleichung dieser reducirten Beobachtung mit der an dem zu bestimmenden Punkte wirklich gemachten ergibt dann seine Höhe über der Meeresfläche. Man erlangt hierdurch die Zurückführung des nachtheiligen Falles auf den vortheilhafteren, nämlich auf den Fall des senkrechten Uebereinanderliegens zweier zu vergleichender Punkte. Ich werde jetzt die anzuwendende Art der Interpolation aufsuchen.

Einen Punkt auf einer horizontalen Fläche, deren Erhöhung über der Meeresfläche ich durch z bezeichnen werde, werde ich durch die horizontalen, auf der Meeresfläche liegenden Coordinaten x und y (etwa Entfernungen von dem Meridiane und dem Perpendikel auf den Meridian eines gegebenen Punktes) angeben. Eine von

dem Orte des Punktes auf der horizontalen Fläche abhängige Gröfse u kann dann unter die Form:

$$u = A + Bx + Cy + Dxx + Exy + Fyy + \text{etc.} \dots (1)$$

gebracht werden. Der Werth von u ist bestimmt, wenn die Coëfficienten $A, B, C \dots$ bekannt sind; es versteht sich jedoch, daß dieser Ausdruck, falls er nicht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, nur für Werthe von x und y angewandt werden kann, welche nicht aufer den Gränzen seiner Convergenz liegen. In sofern die Theorie der Gröfse u nicht als bekannt angesehen werden kann, kann über die Ausdehnung dieser Gränzen nichts bestimmt werden; allein es leuchtet ein, daß der Ausdruck, falls u wirklich eine stetige Function von x und y ist, immer innerhalb gewisser Gränzen convergirt, und daß man ihn selbst auf seine Glieder der ersten Ordnung beschränken kann, wenn man nur x und y so klein annimmt, daß die höheren Ordnungen keinen merklichen Einfluß mehr erhalten. Ich werde annehmen, daß diese Bedingung wirklich erfüllt werde, und also:

$$u = A + Bx + Cy \dots \dots \dots (2)$$

setzen. Bis zu welcher Gränze diese Abkürzung statthaft ist, hängt von der Natur der Function u ab; wenn diese unbekannt ist, so können nur gemachte Beobachtungen der Werthe von u , für verschiedene Werthe von x und y , zeigen, ob diese die Gränze der Anwendbarkeit der Abkürzung überschreiten oder nicht.

Wenn man den Ausdruck von u auf seine drei ersten Glieder beschränkt, so reichen drei (an nicht in gerader Linie liegenden Punkten gemachte) Beobachtungen des Werthes von u zu seiner Bestimmung hin; mehrere Beobachtungen können benutzt werden der Bestimmung von A, B, C gröfsere Sicherheit zu geben. Will man auch die Glieder der zweiten Ordnung berücksichtigen, so sind sechs Beobachtungen erforderlich, welche aber, wenn ihre Fehler die Bestimmung der Coëfficienten nicht

beträchtlich entstellen sollen, entweder sehr genau seyn, oder zu größeren Werthen von x und y gehören müssen; für solche Werthe von x und y würde aber der Zweifel über die Gröfse des Einflusses der Glieder der dritten und folgenden Ordnungen eine neue Unsicherheit erzeugen. Ich bin daher der Meinung, dafs man den Ausdruck auf die Glieder der ersten Ordnung beschränken, und wo man mit diesen nicht ausreicht, auf seine Anwendung ganz Verzicht leisten müsse. Durch diese Beschränkung wird auch die Schwierigkeit, die zur Bestimmung von u nöthige Anzahl von Beobachtungen herbeizuschaffen, so viel wie möglich verkleinert.

Indem nun u die Entfernung des durch x und y bestimmten Punktes einer Ebene von einer anderen Ebene wird, läuft die Voraussetzung des Ausdrucks (2) darauf hinaus, die Gröfse u , aus deren beobachteten Werthen auf andere geschlossen werden soll, als durch eine gegen den Horizont geneigte Ebene begränzt anzunehmen. Wenn man, wie bisher, nur die Beobachtung Einer Barometerhöhe zur Vergleichung mit einer anderen anwendet, so sieht man u als unveränderlich $= A$, oder Luftschichten von gleicher Dichtigkeit als horizontal an; wenn man dagegen meine Ansicht verfolgt, also wenigstens drei Beobachtungen zur Vergleichung anwendet, so leistet man dadurch auf die Annahme der Horizontalität dieser Schichten Verzicht. Durch diese Bemerkung wird anschaulich, von welcher Art der Gewinn ist, den ich herbeizuführen beabsichtige.

Ich werde mich nicht auf drei Vergleichungspunkte beschränken, sondern eine willkürlich gröfsere Zahl derselben ($=n$) annehmen, und die ihnen zugehörigen Werthe von x und y durch $a', b'; a'', b''; \dots a^{(n)}, b^{(n)}$; so wie die beobachteten Werthe von u durch $m', m'', \dots m^{(n)}$ bezeichnen. Man hat also A, B, C so zu bestimmen, dafs die Summe der Quadrate der Gröfsen:

m'

$$\begin{aligned}
 m' &= A - Ba' - Cb' \\
 m'' &= A - Ba'' - Cb'' \\
 &\vdots \\
 m^{(n)} &= A - Ba^{(n)} - Cb^{(n)}
 \end{aligned}$$

ein Minimum wird. Aus dieser Bedingung folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (m) &= n A + (a) B + (b) C \\
 (am) &= (a) A + (aa) B + (ab) C \\
 (bm) &= (b) A + (ab) B + (bb) C
 \end{aligned}$$

welche man aber vereinfachen kann, wenn man $(a)=0$ und $(b)=0$ setzt, oder den Mittelpunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt sämtlicher Beobachtungspunkte verlegt. Sie verwandeln sich dann in:

$$\begin{aligned}
 (m) &= n A \\
 (am) &= (aa) B + (ab) C \\
 (bm) &= (ab) B + (bb) C
 \end{aligned}$$

und ergeben:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{n}(m) \\
 B &= \frac{(ab)(bm) - (bb)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2} \\
 C &= \frac{(aa)(bm) - (ab)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2}
 \end{aligned}$$

also auch:

$$u = \frac{1}{n}(m) + x \frac{(ab)(bm) - (bb)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2} + y \frac{(aa)(bm) - (ab)(am)}{(aa)(bb) - (ab)^2} \dots (3)$$

Wenn die Punkte, an welchen die zur Bestimmung von u anzuwendenden Beobachtungen gemacht werden, immer dieselben bleiben, so kann man diese Formel noch bequemer für die Rechnung einrichten. Sie kann:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{n} + (m) \frac{m'}{N} \left\{ [(aa)b' - (ab)a']y - [(bb)a' - (ab)b']x \right. \\
 &\quad + \frac{m''}{N} \left\{ [(aa)b'' - (ab)a'']y - [(bb)a'' - (ab)b'']x \right\} \\
 &\quad + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

geschrieben werden, wo N den Nenner der Ausdrücke von B und C bedeutet. Führt man nun statt x und y die Entfernung r des Mittelpunkts der Coordinaten von dem Punkte, für welchen man den Werth von u kennen lernen will, und das Azimuth des letzteren $= A$, in die Rechnung ein, so dafs

$$x = r \sin A, \quad y = r \cos A$$

ist, und setzt man ferner:

$$(aa)b' - (ab)a' = \frac{N}{r'} \sin A'$$

$$(bb)a' - (ab)b' = \frac{N}{r'} \cos A'$$

$$(aa)b'' - (ab)a'' = \frac{N}{r''} \sin A''$$

$$(bb)a'' - (ab)b'' = \frac{N}{r''} \cos A''$$

u. s. w.,

so verwandelt (3) sich in:

$$u = \frac{1}{n}(m) + m' \frac{r}{r'} \sin(A' - A) + m'' \frac{r}{r''} \sin(A'' - A) + \text{etc.} \dots$$

wofür ich abgekürzt:

$$u = \frac{1}{n}(m) + p'm' + p''m'' + \dots + p^{(n)}m^{(n)} \dots (4)$$

schreiben werde. Die Werthe von $A', A'' \dots A^{(n)}$ und $r', r'' \dots r^{(n)}$ sind bei allen Anwendungen dieser Formel dieselben, und können also ein für allemal berechnet werden. Da die getroffene Wahl des Mittelpunkts der Coordinaten zur Folge hat, dafs

$$\frac{1}{r'} \sin(A' - A) + \frac{1}{r''} \sin(A'' - A) + \text{etc.} \dots$$

für jeden Werth von A verschwindet, so können auch $m', m'' \dots m^{(n)}$ um eine willkürliche Gröfse verändert werden, ohne dafs

$$p'm' + p''m'' + \dots + p^{(n)}m^{(n)}$$

dadurch verändert wird; man kann also, wenn $m', m'' \dots m^{(n)}$ grofse, zur Rechnung nicht bequeme Zahlen sind, statt

ihrer die kleineren Reste anwenden, welche sie nach der Subtraction einer willkürlichen Zahl übrig lassen.

Dafs die Punkte, an welchen die zur Bestimmung von u führenden Beobachtungen gemacht werden; mit Rücksicht auf die Sicherheit dieser Bestimmung zu wählen sind, darf ich kaum erwähnen: so viel die Umstände erlauben, mufs man dahin sehen, dafs sie gleichförmig um den Raum vertheilt sind, in welchem die Höhen bestimmt werden sollen. Sollte man ihn für zu grofs halten, so würde man ihn in Theile zerlegen können.

2.

Ich werde nun annehmen, dafs an verschiedenen Punkten des Umfanges eines Landes, in dessen Innerem man viele Höhen durch das Barometer bestimmen will, gleichzeitige Barometer- und Thermometer-Beobachtungen gemacht werden. Für alle diese Punkte nehme ich x und y , so wie auch ihre Höhe z über der Meeresfläche als bekannt an. Für einen derselben bezeichne ich die Coordinaten x und y durch α' und β' , die Höhe z durch c' , die auf eine bestimmte Temperatur des Quecksilbers bezogene Höhe des Barometers durch β' , die Temperatur der Luft, in Graden der Centesimalscale ausgedrückt, durch t' , für den zweiten Punkt erhalten dieselben Buchstaben zwei Striche, für den dritten drei u. s. w. Für den Punkt, dessen Höhe zu bestimmen ist, werde ich die Zeichen x, y, z, β, t anwenden.

Die erste Anwendung, welche ich von der Formel (4) machen werde, soll in der Bestimmung der Temperatur T bestehen, welche in der Lothlinie des Punktes, dessen Höhe gesucht wird, in einer Höhe Z über der Meeresfläche stattfindet. Bezeichnet man die Aenderung der Temperatur für jede Toise der Aenderung der Höhe durch k , so hat man die Temperatur in der Höhe Z , in den Lothlinien der verschiedenen Vergleichungspunkte:

$$\begin{aligned} t' + k(c' - Z) \\ t'' + k(c'' - Z) \\ t''' + k(c''' - Z) \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Temperaturen sollten, damit die Atmosphäre im Gleichgewichte seyn könnte, entweder gleich, oder wenigstens doch nur von der Polhöhe jedes der Punkte abhängig seyn; in der Wirklichkeit ist aber hierauf nicht zu rechnen, und man kann aus denselben nur auf T schließen, indem man die im vorigen Paragraph erläuterte Interpolation darauf anwendet. Setzt man demnach diese Ausdrücke der Temperaturen statt m' , $m'' \dots m^{(n)}$ in die Formel (4), so erhält man:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{n}(t) + p't' + p''t'' + \dots + p^{(n)}t^{(n)} \\ + k \left\{ \frac{1}{n}(c) + p'c' + p''c'' + \dots + p^{(n)}c^{(n)} - Z \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird unabhängig von k , wenn man die bis jetzt willkürlich gelassene Höhe über der Meeresfläche:

$$Z = \frac{1}{n}(c) + p'c' + p''c'' + \dots + p^{(n)}c^{(n)} \dots (5)$$

annimmt; man erhält dadurch:

$$T = \frac{1}{n}(t) + p't' + p''t'' + \dots + p^{(n)}t^{(n)} \dots (6)$$

welche Formeln also das angeben, was man für die Temperatur eines Punktes in der Lothlinie des zu bestimmten Punktes, aus den an den Vergleichungspunkten gemachten Beobachtungen folgern kann.

Man kann nun die an den Vergleichungspunkten beobachteten Barometerhöhen auf die Höhe Z über der Meeresfläche reduciren, indem man die daselbst stattfindende Temperatur $= T$ annimmt. Wenn man der Theorie und den Angaben im IV. Theile der *Mécanique Céleste* folgen will, und die auf Z reducirten, an den einzelnen Vergleichungspunkten beobachteten Barometerhö-

hen durch $B', B'' \dots B^{(n)}$ bezeichnet, so hat man für den ersten dieser Punkte:

$$\log \left\{ \frac{B'}{\beta'} \left(\frac{a+c'}{a+Z} \right)^2 \right\} = \frac{(g)}{Kl} \cdot \frac{c'-Z}{1 + \frac{c'+Z}{2a}} \cdot \frac{500}{500+t'+T}$$

in welcher Formel $a=3266331$ Toisen, und wenn man unter dem Logarithmen den Brigg'schen versteht und die Polhöhe durch φ' bezeichnet

$$\frac{(g)}{Kl} = \frac{1 + 0,002845 \cos 2\varphi'}{9407,73}$$

ist, durch die Annahme dieser Zahlen werden c' und Z in Toisen ausgedrückt angenommen. Indem man

$$\log \left\{ \frac{a+c'}{a+Z} \right\}^2 = (c'-Z) \frac{0,86858896}{3266331}$$

setzt, folgt aus dieser Formel:

$$\log B' = \log \beta' + (c'-Z) \left\{ \frac{1 + 0,002845 \cos 2\varphi'}{9407,73 \cdot \left(1 + \frac{c'+Z}{2a} \right)} \cdot \frac{500}{500+t'+T} - \frac{1}{3760503} \right\} \dots (7)$$

Für die übrigen Vergleichungspunkte sind die ihnen zukommenden Bezeichnungen statt der sich hier auf den ersten derselben beziehenden zu schreiben. Indem rechts von dem Gleichheitszeichen nur bekannte Größen vorkommen, kann man die Werthe von

$$\log B', \log B'' \dots \log B^{(n)}$$

berechnen. Sie würden sämmtlich übereinstimmen, wenn der Druck der Atmosphäre auf die in der Höhe Z über der Meeresfläche befindliche horizontale Fläche, an allen Vergleichungspunkten gleich groß wäre. Die wirklich sich zeigenden Unterschiede, welche aus vorhandenen Störungen des Gleichgewichtes der Atmosphäre entstehen, werden durch die Anwendung der Formel (4) auf diese Werthe möglichst unschädlich gemacht. Man erhält dadurch die Barometerhöhe B in der Lothlinie des zu bestimmenden Punktes und in der Höhe Z über der Meeresfläche, nämlich:

$$\log B = \frac{1}{n} (\log B) + p' \log B' + p'' \log B'' + \dots + p^{(n)} \log B^{(n)} \dots (8)$$

Indem aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (c) + p' c' + p'' c'' + \dots + p^{(n)} c^{(n)} &= Z \\ p' + p'' + \dots + p^{(n)} &= 0 \end{aligned}$$

ist, so verschwindet das letzte kleine Glied der Formel (7) aus dem Ausdrucke von $\log B$; man kann dieses Glied also bei der Berechnung von $\log B'$, $\log B'' \dots \log B^{(n)}$ weglassen.

Es ist nun noch nöthig, aus der Vergleichung der gefundenen Werthe von B , T , Z mit den an dem zu bestimmenden Punkte beobachteten β und t , die Höhe dieses Punktes z abzuleiten. Dieses geschieht durch die Umkehrung der Formel (7), in welcher in dem jetzigen Falle B , β , z , t statt B' , β' , c' , t' geschrieben werden. Man erhält dadurch:

$$z - Z = \frac{9407,73 \log \frac{B}{\beta} \cdot \left\{ 1 + \frac{z+Z}{2a} \right\} V}{1 + 0,002845 \cos 2\varphi} \dots \dots (9)$$

wo V für

$$500 - \frac{9407,73}{7360503} (500 + t + T) \frac{1 + \frac{z+Z}{2a}}{1 + 0,002845 \cos 2\varphi}$$

geschrieben ist, allein ohne merklichen Fehler, mit dem allein von $t+T$ abhängigen Factor:

$$498,74943 - \frac{500 + t + T}{3997,3}$$

vertauscht werden kann. Dafs man nicht nur diesen Factor in eine Tafel bringen, sondern auch die übrigen erforderlichen Rechnungen durch zweckmäfsig eingerichtete Tafeln erleichtern, oder auch schon vorhandene anwenden wird, darf hier nicht weiter ausgeführt werden.

3.

Durch das Vorhergehende ist die beabsichtigte Elimination der Störungen des Gleichgewichts der Atmosphäre, in so weit ich sie für ausführbar halte, erlangt worden. Die Höhen c' , c'' , c''' . . . der Vergleichungspunkte über der Meeresfläche sind aber als bekannt angenommen worden, und es bleibt mir noch übrig, anzugeben, auf welche Art ich sie gefunden zu sehen wünsche. Wenn die Höhen der zu bestimmenden Punkte nicht von der Höhe eines der Vergleichungspunkte, sondern von der Meeresfläche an gezählt werden sollen, so muß offenbar wenigstens eine der Höhen c' , c'' . . . $c^{(n)}$ anderweitig bekannt geworden seyn.

Ich denke mir Barometer und Thermometer an allen zu Vergleichungspunkten ausersehenen Punkten aufgestellt und daselbst befindliche Beobachter angewiesen, die Angaben derselben zu bestimmten Zeiten, etwa drei Mal täglich, anzuschreiben. Aufser diesen Beobachtern muß noch einer vorhanden seyn, welcher, mit einem tragbaren Barometer und einem Thermometer versehen, sowohl die zu bestimmenden Punkte als auch die Vergleichungspunkte besucht. Er findet sich zuerst an dem Vergleichungspunkte I ein, vergleicht seine Instrumente einen Tag lang mit den daselbst aufgestellten, und geht dann nach dem Vergleichungspunkte II, den er aber nicht auf geradem Wege, sondern auf einem Umwege erreicht, welcher über alle diejenigen der zu bestimmenden Punkte führt, welche nicht gar zu weit aus der Richtung I bis II liegen; an jedem derselben verweilt er einen Tag, um seine Instrumente zu den Zeiten zu beobachten, zu welchen auf den Vergleichungspunkten beobachtet wird. Am Punkte II verweilt er einen Tag, um die Instrumente zu vergleichen; dann geht er, auf dieselbe Art wie er von I nach II gelangt ist, d. h. durch Umwege, von II nach III; nach der dortigen Vergleichung, von III nach IV u. s. w., bis er alle zu bestimmende Punkte berührt hat

und wieder in I ankömmt. Die hier aufs Neue vorzunehmende Vergleichung der Instrumente mufs von dem unveränderten Zustande derselben während der Reise überzeugen. Eine Wiederholung dieser Reise mufs das durch die erste Gefundene bestätigen, auch durch den Erfolg zeigen, ob die Vergleichungspunkte vielleicht zu weit von einander liegen, um, trotz der Interpolation, nicht noch merkliche Unsicherheiten übrig zu lassen. Wenn man dieses wegen zu grofser Ausdehnung des Landes fürchtete, so würde es der Vorsicht angemessen seyn, einen der Vergleichungspunkte in das Innere des Landes zu verlegen, so dafs die Interpolation auf weniger entfernte Beobachtungspunkte gegründet werden könnte.

Indem man durch den wiederholten Besuch aller Vergleichungspunkte und durch die Vergleichung der an denselben befindlichen Instrumente mit den Instrumenten des Reisenden ein sicheres Mittel erhält, die beständigen Unterschiede aller angewandten Instrumente zu erkennen, so kann man diese Unterschiede völlig aus der Rechnung schaffen, also die beobachteten Zahlen auf die zurückführen, welche man mit einem und demselben Apparate an allen Punkten erhalten haben würde. In Beziehung auf das Thermometer sind jedoch bekanntlich sichere Mittel vorhanden es, durch Anwendung einer Verbesserungstafel, absolut richtig zu machen, so dafs es sich eigentlich nur um die Vergleichung der Barometer handelt.

Die auf diese Art berichtigten Beobachtungen werden die Unterschiede der Höhen c' , $c'' \dots c^{(n)}$ geben, wenn sie lange genug fortgesetzt sind, um die Annahme der Verschwindung des Einflusses der Störungen aus ihrem mittleren Resultate zu rechtfertigen. Wie lange die Fortsetzung gemacht werden mufs, um zu dieser Annahme zu berechtigen, kann im Allgemeinen nicht angegeben werden; ihre Dauer hängt von den Entfernungen und auch von der Beschaffenheit des Landes ab, denn es ist

leicht zu übersehen, daß die Annäherung an einen mittleren Zustand in einem nicht sehr unebenen Lande früher eintreten wird, als in einem mit hohen Bergen bedeckten, welche selbst fortwährende Störungen des Gleichgewichtes erzeugen. Ich glaube aber, daß in Fällen, in welchen die Anwendung der hier mitgetheilten Methode wirklich versucht werden möchte, eine Fortsetzung der Beobachtungen an den Vergleichungspunkten, durch zwei volle Jahre hindurch, zwei einjährige Mittel liefern würde, deren Uebereinstimmung die Furcht vor merklichen, übriggebliebenen Fehlern zum Schweigen bringen würde. Ich würde übrigens für zweckmäfsig halten, Beobachtungen, welche durch ganz örtliche Störungen, d. h. Gewitter und heftige Stürme, entstellt sind, von dem Mittel auszuschließen.

So wie über die Dauer der zur Bestimmung der Höhen der Vergleichungspunkte dienenden Beobachtungen vor einem gemachten Versuche nichts festgesetzt werden kann, so ist auch vorher der wahrscheinliche Fehler nicht anzugeben, welchen ein einmaliger Besuch eines zu bestimmenden Punktes übrig lassen wird. Ob er unbedeutend oder merklich wird, hängt allein davon ab, ob die Entfernungen nicht zu groß oder zu groß sind, um der Interpolation Sicherheit zu geben. Für Entfernungen bis zu einer gewissen Gränze hat sie volle Sicherheit; diese Gränze kann aber nur durch gemachte Versuche bestimmt werden. Man würde sehr leicht eine Uebersicht über die zu erwartende Sicherheit erlangen, wenn man zwischen zweien, vielleicht 30 Meilen von einander entfernten Oertern, an welchen fortlaufende Barometerbeobachtungen gemacht werden, noch ein Barometer in der Richtung und etwa in der Mitte zwischen beiden aufstellte, und dieses einige Monate lang gleichfalls beobachtete; zeigte dieses Barometer Aenderungen, welche dem Mittel der durch die beiden äußeren angegebenen sehr nahe gleich sind, so kann man daraus schließen, daß die Entfernung

von 30 Meilen nicht zu groß ist, um die Interpolation zu erlauben; im entgegengesetzten Falle muß man sich auf kleinere Entfernungen beschränken.

4.

Ich glaube die vorgeschlagene Methode noch anschaulicher machen zu können, wenn ich ein vollständiges Beispiel davon gebe. Es ist zwar nur ein fingirtes, was aber den eben angegebenen Zweck seiner Mittheilung nicht beeinträchtigt.

Ich nehme an, daß man für die oben schon erwähnte barometrische Nivellirung von Preußen fünf Punkte zu Vergleichungspunkten gewählt habe, nämlich Königsberg, Gumbinnen, Johannsburg, Thorn und Danzig, und daß ihre Entfernungen von dem Meridiane von Königsberg und dem Perpendikel (in Meilen ausgedrückt) folgende Werthe haben:

	x	y
Königsberg	0,0	0,0
Gumbinnen	+ 14,4	— 1,9
Johannsburg	+ 11,3	— 15,2
Thorn	— 16,5	— 25,4
Danzig	— 16,0	— 5,5.

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist:

$$- 1,36; \quad - 9,60;$$

man hat also die auf den im 1sten Art. angenommenen Mittelpunkt bezogenen Coordinaten der fünf Vergleichungspunkte:

$$\begin{array}{ll} a^I = + 1,36 & b^I = + 9,60 \\ a^{II} = + 15,76 & b^{II} = + 7,70 \\ a^{III} = + 12,66 & b^{III} = - 5,60 \\ a^{IV} = - 15,14 & b^{IV} = - 15,80 \\ a^V = - 14,64 & b^V = + 4,10. \end{array}$$

Hieraus findet man:

$$(aa) = 854,054; \quad (ab) = - 235,727; \quad (bb) = 149,260$$

und ferner:

$$\begin{aligned}
 & \log N = 5,51605 \\
 A^I &= 71^\circ 23',4 & \log \frac{1}{r^I} &= 8,43769 \\
 A^{II} &= 49 \quad 10,5 & \log \frac{1}{r^{II}} &= 8,61750 \\
 A^{III} &= 337 \quad 37,9 & \log \frac{1}{r^{III}} &= 8,15846 \\
 A^{IV} &= 238 \quad 21,0 & \log \frac{1}{r^{IV}} &= 8,78594 \\
 A^V &= 179 \quad 29,0 & \log \frac{1}{r^V} &= 8,23316.
 \end{aligned}$$

Diese Zahlen dürfen nur ein für allemal berechnet werden, und dienen zur Berechnung der sich auf jeden der zu bestimmenden Punkte beziehenden Formel. Wäre z. B. an einem Punkte beobachtet, dessen Entfernungen vom Königsberger Meridian und Perpendikel $-3,0$ und $-8,2$ wären, also auf den angenommenen Mittelpunkt der Coordinaten bezogen:

$$x = -1,64 \quad y = +1,40,$$

so würde für diesen Punkt

$$A = 310^\circ 29',2, \quad \log r = 0,33371$$

seyn, und man würde für ihn erhalten:

$$\begin{array}{l|l}
 \log p^I = 8,70490 & \log p^{IV} = 9,09819n \\
 \log p^{II} = 8,94619 & \log p^V = 8,44463n \\
 \log p^{III} = 8,15137 &
 \end{array}$$

Nimmt man die Höhen der Vergleichungspunkte über der Meeresfläche, die daselbst beobachteten und auf eine bestimmte Wärme des Quecksilbers bezogenen Barometerhöhen und die Temperaturen der Luft, folgendermaßen an:

$$\begin{array}{lll}
 c^I = 11^T,0 & \beta^I = 337,81 & t^I = 16^\circ,3 \\
 c^{II} = 42 \quad ,0 & \beta^{II} = 335,40 & t^{II} = 15 \quad ,9 \\
 c^{III} = 125 \quad ,0 & \beta^{III} = 328,63 & t^{III} = 16 \quad ,4 \\
 c^{IV} = 45 \quad ,0 & \beta^{IV} = 335,61 & t^{IV} = 18 \quad ,6 \\
 c^V = 10 \quad ,0 & \beta^V = 338,00 & t^V = 14 \quad ,0,
 \end{array}$$

so erhält man daraus:

$$Z = 46^T,7195; \quad T = 15^\circ,9818.$$

Diese Werthe von Z und T in die Formel (7) gesetzt, ergeben, wenn man das letzte Glied derselben wegläßt:

$$\begin{array}{llll} \log B^I = 2,52511 & \varphi^I = 54^\circ 43' \text{ angenommen} & & \\ \log B^{II} = 2,52509 & \varphi^{II} = 54 \quad 35 & - & - \\ \log B^{III} = 2,52452 & \varphi^{III} = 53 \quad 37 & - & - \\ \log B^{IV} = 2,52566 & \varphi^{IV} = 53 \quad 1 & - & - \\ \log B^V = 2,52524 & \varphi^V = 54 \quad 21 & - & - \end{array}$$

Die Formel (8) giebt endlich $\log B = 2,52504$. Man hat also die Beobachtungen an den fünf Vergleichungspunkten auf Eine für einen Punkt geltende, welcher in der Lothlinie des zu bestimmenden Punktes $46^\circ 7' 195$ über der Meeresfläche liegt, reducirt, und für den ersteren gefunden:

$$\log B = 2,52504 \quad T = 15^\circ,9818.$$

Die Vergleichung dieser Beobachtung mit der an dem zu bestimmenden Punkte gemachten ergibt die gesuchte Höhe desselben auf die gewöhnliche Art nach der Formel (9).

III. *Resultate der in den Jahren 1828 bis 1833 auf dem meteorologischen Observatorium der Universität zu Kasan angestellten Barometer- und Thermometer-Beobachtungen, gesammelt und berechnet von E. Knorr, Professor der Physik* ¹⁾.

Mittlerer Barometerstand in Millimetern bei 0°.

Jahr.	9 Uhr Morgens.	12 Uhr Mittags.	3 Uhr Nachmitt.	9 Uhr Abends.	Mittel.
1828	755,05	754,73	754,58	754,72	754,77
1829	757,11	757,01	756,72	756,72	756,89
1830	756,58	756,58	756,40	756,39	756,49
1831	755,70	755,59	755,42	755,66	755,59
1832	754,60	754,64	754,71	754,39	754,59
1833	755,28	755,14	755,00	755,06	755,12
Mittel	755,72	755,61	755,47	755,49	755,57

1) Mitgetheilt in russischer Sprache von Alexander von Hum-