Berichtigung zu dem Aufsatze: „Ueber die Fourier'sche Reihe."

(Mathematische Annalen, Bd. XIX, pag. 236.)

Von

Axel Harnack in Dresden.

1. Auf Seite 251 der citirten Arbeit habe ich den Satz: „Bei einer in einem beliebigen Intervalle im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihe ist Lim $a_k = 0$ und Lim $b_k = 0$ für $k = \infty$", kurz zu beweisen gesucht; jedoch ist, worauf ich in Folge einer brieflichen Bemerkung des Herrn Cantor aufmerksam wurde, der Beweis unzureichend, wenn nicht die Voraussetzung hinzugefügt wird, dass a_k und b_k überhaupt eine bestimmte Grenze besitzen. Da dies an jener Stelle unzulässig ist, und da schon mehrfach die Versuche, den von Cantor (Annalen Bd. IV) gegebenen Beweis zu umgehen, gescheitert sind, so möge es gestattet sein, die Principien dieses Beweises in neuer Form zu reproduciren, um die Einfachheit desselben hervortreten zu lassen. Der Satz selbst lautet: „*Wenn für alle Werthe von x in einem beliebig kleinen Intervalle* $\mathrm{Lim}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$ *wird für* $n = \infty$, *so ist* $\mathrm{Lim}\, a_n = 0$ *und* $\mathrm{Lim}\, b_n = 0$." Man weist zuerst nach (S. 251 meines Aufsatzes), dass diese Bedingung nothwendig die andere involvirt: Es muss für alle Werthe von x in einem Intervall a bis b $\mathrm{Lim}\, a_n \sin nx$ (und ebenso $\mathrm{Lim}\, b_n \sin nx$) gleich 0 werden. Dies besagt, dass zu jedem x eine Stelle n angegeben werden kann, von der ab die Beträge $[a_n \sin nx] \cdots [a_{n+k} \sin (n+k)x] \cdots$ sämmtlich kleiner sind als eine beliebig kleine Zahl δ; (jedoch ist nicht gesagt, dass dasselbe n bei allen Werthen von x ausreicht). Diese Forderung ist nicht erfüllbar, ausser wenn von einer Stelle n ab sämmtliche Beträge: $[a_n] \cdots [a_{n+k}] \cdots$ kleiner sind als δ. Denn nimmt man an, dass dieses nicht der Fall ist, so liesse sich eine Reihe von unendlich vielen Gliedern: $a_{n_1}, a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdots$ bilden, deren Beträge sämmtlich gleich oder grösser sind als δ. Dann kann aber auch ein Werth x im beliebig vorgeschriebenen Intervalle a bis b (und folglich in jedem noch so kleinen Theile desselben) gefunden werden, bei welchem die Reihe:

$$a_{n_1} \sin n_1 x,\; a_{n_2} \sin n_2 x \cdots a_{n_k} \sin n_k x \cdots$$

nicht die Null zur Grenze hat. Es wird nämlich aus der Reihe der unbegrenzt wachsenden positiven ganzen Zahlen: $n_1, n_2 \cdots n_k \cdots$ stets eine andere unendliche Reihe: $n_1' n_2' \cdots n_k' \cdots$ entnommen werden können, zu welcher ein Werth x sich finden lässt, für welchen die Producte $n_1'x, n_2'x \cdots n_k'x \cdots$ von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ stets nur um weniger als eine beliebig kleine Zahl ε differiren, so dass also der Betrag des Sinus beliebig nahe an der Einheit, und folglich der Betrag des Gliedes $a_{n'k} \sin n'_k x$ beliebig nahe an einer von 0 verschiedenen Grösse δ liegt. Man setze:

$$n_1 x > y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{und} \quad n_1 x < y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

also

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1} < x < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

wobei y_1 eine noch zu bestimmende ganze ungerade Zahl ist. Der Werth von x fällt in das vorgeschriebene Intervall von a bis b, wenn

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

also wenn

$$(n_1 a + \varepsilon) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \varepsilon) \frac{2}{\pi}$$

ist.

Dieses Intervall enthält sicher eine ungerade Zahl, wenn

$$(n_1 (b - a) - 2\varepsilon) \frac{2}{\pi} \geqq 2, \quad \text{also} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\varepsilon}{b - a}$$

gewählt wird. Diese Forderung dient dazu, um einen unteren Werth für die zu bildende Reihe: n_1' zu fixiren, und in dem Umstande, dass lediglich eine untere Grenze fixirt zu werden braucht, liegt der Kern des ganzen Beweises. Denn wird nun y_1 irgendwie gemäss der obigen Ungleichung gewählt, so ist x auf ein Intervall beschränkt, das kurz mit

$$\alpha = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1'}, \quad \beta = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1'}$$

bezeichnet werden soll, und die Länge $\frac{2\varepsilon}{n_1'}$ besitzt. In diesem Intervalle soll nun x so bestimmt werden, dass für eine Zahl $n_2' > n_1'$

$$\frac{y_2 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_2'} < x < \frac{y_2 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_2'}$$

wird.

Alsdann muss aber y_2 der Ungleichung genügen:

$$(n_2'\alpha + \varepsilon)\,\frac{2}{\pi} < y_2 < (n_2'\beta - \varepsilon)\,\frac{2}{\pi},$$

es ist grösser als y_1; und dieses Intervall enthält sicher mindestens eine ungerade Zahl, wenn

$$n_2' \geqq \left(\frac{\pi + 2\varepsilon}{\beta - \alpha} = \frac{\pi + 2\varepsilon}{2\varepsilon}\, n_1'\right).$$

Damit wird wiederum nur eine untere Grenze fixirt, nach der n_2' aus der ursprünglichen Reihe der $n_1, n_2 \cdots$ zu entnehmen ist, und nach dem y_2 der vorgeschriebenen Ungleichung gemäss gewählt ist, bleibt die Grösse x immer noch auf ein endliches Intervall beschränkt, dessen Länge nunmehr $\frac{2\varepsilon}{n_2'}$ beträgt. In diesem Intervalle lässt sich ein neues angeben, für dessen Werthe eine Grösse $n_3'x$ der gestellten Forderung genügt, und sonach wird durch fortgesetzten Grenzprocess eine Stelle x definirt, bei welcher die Beträge von $\sin n_1'x$, $\sin n_2'x, \cdots \sin n_k'x \cdots$ beliebig wenig von der Einheit verschieden sind, so dass auch die Reihe:

$$a_{n_1'} \sin n_1'x,\quad a_{n_2'} \sin n_2'x \cdots a_{n'_k} \sin n_k'x \cdots$$

der Voraussetzung zuwider nicht nach 0 convergirt. Es existirt daher keine Zahlenreihe $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdots$, deren Beträge sämmtlich gleich oder grösser sind als eine beliebige Zahl δ, d. h. $\operatorname{Lim} a_n = 0$.

2. Einfluss auf die in meiner Arbeit gegebenen Sätze hat aber ein Fehlschluss, der sich bereits in meiner früheren Mittheilung (Annalen Bd. XVII) befindet, und in die zweite Abhandlung übergegangen ist. Auf Seite 255 dieser letzteren ist bewiesen: Bildet man mit einer nebst ihrem Quadrat integrirbaren Function $f(x)$ die Coefficienten einer Fourier'schen Reihe, und bezeichnet $R_{n,m}$ die Summe:

$$R_{n,m} = \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

so ist, wenn δ eine willkürlich kleine Grösse bedeutet,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} R_{n,m}^2\, dx < \delta$$

lediglich durch Wahl von n unabhängig von m, woraus hervorgeht, dass auch zwischen beliebigen in das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ fallenden Grenzen x_0 und x_1

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{abs} R_{n,m}\, dx, \quad \text{sowie} \quad \operatorname{abs} \int_{x_0}^{x_1} R_{n,m}\, dx$$

kleiner als jedwede Zahl gemacht werden kann, lediglich durch Wahl von n unabhängig von m. Aus diesem Satze darf nun aber trotz der Unabhängigkeit von m nicht gefolgert werden, dass

$$\text{abs}\int_{x_0}^{x_1} R_{n,\infty}\,dx < \delta,$$

denn die Integrirbarkeit der Function $R_{n,m}$ bei noch so grossen Werthen von m gestattet keinen Schluss auf die Integrirbarkeit der Function $R_{n,\infty}$. Damit werden die in den Artikeln III. und IV. enthaltenen Aussagen, dass die Reihe „im Allgemeinen" convergirt und so die Function $f(x)$ „im Allgemeinen" darstellt, hinfällig, und es muss bei den im Artikel VI. bewiesenen bekannten Sätzen sein Bewenden haben: Jede trigonometrische Reihe, *welche eine integrirbare Function definirt*, ist eine Fourier'sche Reihe; und *wenn die Fourier'sche Reihe* an einer Stelle, an welcher $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ einen bestimmten Werth hat, *überhaupt convergirt*, so convergirt sie auch immer nach diesem Werthe. Die Convergenz der Reihe bildet also stets die Voraussetzung. Dieselbe Voraussetzung ist auch bei der im Artikel VIII. aufgestellten Regel zur Differentiation einzuführen: Die trigonometrische Reihe kann nach der angegebenen Regel differentiirt werden, *vorausgesetzt dass auch die Ableitung durch eine trigonometrische Reihe im Allgemeinen darstellbar ist.*

Der oben erwähnte Integralsatz weist aber auf folgendes Verhalten einer Fourier'schen Reihe hin, deren Coefficienten aus den Integralen einer stetigen (oder allgemeiner: einer nebst ihrem Quadrate integrirbaren) Function $f(x)$ gebildet sind, auch wenn die Reihe durchweg oder theilweise divergirt: Bezeichnet h ein beliebig kleines Intervall zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so kann man stets eine untere Grenze m für n bestimmen, so dass das Integral der Glieder

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx = S_n(x)$$

zwischen den Grenzen x und $x+h$, also $\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx$, für jeden Werth von x vom Integral $\int_x^{x+h} f(x)\,dx$ um weniger differirt als eine beliebig kleine Grösse $\delta \cdot h$; convergirt δ nach 0, so convergirt n nach ∞. Daraus folgt, dass der mittlere Werth der stetigen Function $S_n(x)$ für $n \geq m$ vom mittleren Werth der Function $f(x)$ im beliebig kleinen Intervall von x bis $x+h$ bei jedem Werthe von x beliebig wenig abweicht. Wird in dem Falle, dass $f(x)$ eine stetige Function ist, das Intervall h so klein gewählt, dass

$$\int\limits_{x}^{x+h} f(x)\,dx = hf(x) \pm (< \delta h)$$

so liefern die mittleren Werthe der Function $S_n(x)$ in jedem Intervalle von der Grösse h die Function $f(x)$ mit einer Abweichung, die kleiner ist als 2δ. Ein solches Verhalten einer Reihe kann als eine Darstellung der Function „im Mittel" bezeichnet werden, und es bleiben die Sätze, wie ich sie formulirt habe, auch die im Artikel V. gegebenen, bestehen, wenn statt der Darstellung „im Allgemeinen" die allerdings erhebliche Modification der Darstellung „im Mittel" eingeführt wird. Eine Reihe, welche durch ihre Mittelwerthe eine Function darstellt, kann für jeden einzelnen Werth von x divergiren, während der mittlere Werth einer aus den Gliedern der Reihe gebildeten Summe für jedes beliebig kleine *aber endliche* Intervall h von dem Werthe $f(x)$ beliebig wenig abweicht; und um so weniger, je mehr Glieder summirt werden. In diesem Sinne ist jede stetige Function durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar.