

Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie.

Von

HEINRICH WEBER in Göttingen.

§ 1.

Die Schläfli'schen Modulargleichungen.

In meinem Buche „*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*“ (Braunschweig 1890) habe ich für die Darstellung der Transformationstheorie drei Functionen des Periodenverhältnisses $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ benutzt, die mit den Jacobi'schen Moduln k , k' durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$(1) \quad f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}}, \quad f_1(\omega) = \sqrt[6]{2} \sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}}, \quad f_2(\omega) = \sqrt[6]{2} \sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}.$$

Zwischen diesen Functionen bestehen die identischen Relationen

$$(2) \quad \begin{aligned} f_1^8 + f_2^8 &= f^8, \\ f f_1 f_2 &= \sqrt[6]{2}, \end{aligned}$$

und die Transformation erster und zweiter Ordnung ist in den Formeln enthalten:

$$(3) \quad \begin{aligned} f(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), & f\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f(\omega), \\ f_1(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega), & f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_2(\omega), \\ f_2(\omega + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega), & f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_1(\omega), \end{aligned}$$
$$(4) \quad \begin{aligned} f_1(2\omega) f_2(\omega) &= \sqrt[6]{2}, \\ f(\omega) f\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right) &= \sqrt[6]{2}. \end{aligned}$$

Aus (3) lassen sich die allgemeinen Formeln für die lineare Transformation gewinnen, von denen ich eine, die in § 35 meines erwähnten Buches abgeleitet ist, hier anführe.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, die der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und ausserdem der Congruenz

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{2}$$

genügen, so ist

$$(5) \quad f\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \alpha\omega}\right) = \varepsilon f(\omega),$$

wenn ε eine 24^{te} Einheitswurzel ist und näher bestimmt wird durch

$$(6) \quad \varepsilon = \left(\frac{2}{\alpha - \beta}\right) e^{-\frac{2\pi i}{3}(\alpha(\gamma - \beta) - (\alpha^2 - 1)\beta\delta)} e^{-\frac{8\pi i}{8}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma - \delta)}.$$

Die Functionen f, f_1, f_2 sind also nach der Bezeichnung von Klein Modulfunctionen 48^{ter} Stufe.

Ist nun n eine Primzahl, grösser als 3, so besteht zwischen den Grössen

$$u = f(\omega), \quad v = f(n\omega)$$

eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf u und v symmetrisch, für jede der beiden Grössen vom $n + 1$ ^{ten} Grade ist und rationale Coëfficienten hat. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(7) \quad v_h = f\left(\frac{h + \omega}{n}\right), \quad h \equiv 0 \pmod{48},$$

wenn h ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n durchläuft und durch 48 theilbar angenommen wird. Diese Gleichung habe ich die *Schläfli'sche Modulargleichung* genannt.

Ich beschäftige mich in dieser Mittheilung mit dem Falle dass

$$(8) \quad n \equiv -1 \pmod{24},$$

und besonders mit den beiden Primzahlen $n = 23, 47$, bemerke aber, dass dieselbe Methode auch für andere Primzahlen mit Nutzen angewandt werden dürfte. In diesen Fällen kann man, wie ich in § 77 meines Buches gezeigt habe, der Modulargleichung folgende Form geben: Man setze

$$(9) \quad A = \left(\frac{u}{v}\right)^{12} + \left(\frac{v}{u}\right)^{12}, \quad B = uv + \frac{2}{uv};$$

dann hat die Modulargleichung die Gestalt

$$(10) \quad A^{\frac{n+1}{24}} - B^{\frac{n-1}{2}} + \Phi(A, B) = 0,$$

wo $\Phi(A, B)$ eine ganze rationale Function von A und B ist, von den Graden

$$\frac{n+1}{24} - 1, \quad \frac{n-1}{2} - 1$$

in Bezug auf diese beiden Variablen.

Für $n = 23$ ist also Φ von A unabhängig und vom 10^{ten} Grade in Bezug auf B , für $n = 47$ ist Φ linear in A und vom 22^{ten} Grade in B .

§ 2.

Hilfsmittel zur Berechnung der Coëfficienten der Modulargleichung.

Früher pflegte man die Coëfficienten der Modulargleichung dadurch zu berechnen, dass man in die mit unbestimmten Coëfficienten geschriebene Modulargleichung für die Functionen u , und v Reihenentwicklungen einsetzte, und dann die nöthige Anzahl linearer Gleichungen für die Coëfficienten dadurch erhielt, dass man die Coëfficienten der einzelnen Potenzen gleich Null setzte.

Einen anderen Weg habe ich für die Transformation 23^{ten} Grades in meinem Buche eingeschlagen (§ 99), und dieser Weg ist es, den ich hier noch etwas weiter verfolgen will. Er beruht darauf, dass man aus der Theorie der complexen Multiplication für besondere Werthe von A die zugehörigen Werthe von B , oder wenigstens die Gleichungen, durch die diese Werthe bestimmt werden, berechnen kann, und so direct zur Kenntniss der Function $\Phi(A, B)$ gelangt. Für die Fälle $n = 23$, $n = 47$ führt dieser Weg leicht zum Ziel, und zwar für $n = 23$ in zwei verschiedenen Formen, deren Vergleichung ein interessantes Resultat ergiebt.

Wenn wir

$$(11) \quad u^{12} = \pm v^{12}$$

setzen, so wird

$$(12) \quad A = \pm 2,$$

und wenn wir für jeden dieser beiden Werthe die zugehörigen Werthe von B , deren es $n - 1 : 2$ giebt, kennen, so können wir nach (10) für den Fall $n = 23$ die Function ϕ , die von A unabhängig ist, in zwei verschiedenen Formen berechnen, und für $n = 47$, wo Φ in Bezug auf A linear ist, erhalten wir zwei Gleichungen, um die beiden Coëfficienten dieser linearen Function vollständig zu berechnen.

Wir haben also die Bedingung aufzusuchen, dass für einen der Werthe (7) die Relation (11) befriedigt ist. Nach (5), (6) ist hierfür die hinreichende (und wie sich anderweitig beweisen lässt auch nothwendige) Bedingung

$$(13) \quad \frac{h + \omega}{n} = \frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}$$

$$(14) \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{2}.$$

Es ist also ω die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coëfficienten, die wir in der Form

$$(15) \quad a \omega^2 + \sigma b \omega + c = 0$$

annehmen wollen, worin a, b, c ganze Zahlen, $\sigma = 1$ oder $= 2$ und $a, \sigma b, c$ ohne gemeinsamen Theiler sind, und wenn $\sigma = 1$ ist, auch b ungerade vorausgesetzt werden kann.

Aus (13) aber folgt

$$\beta\omega^2 + (\alpha + \beta h - n\delta)\omega + h\alpha - n\gamma = 0,$$

und die Vergleichung mit (15) ergibt, wenn x ein noch unbestimmter ganzzahliger Factor ist.

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha x, & \alpha + \beta h - n\delta &= \sigma b x, \\ h\alpha - n\gamma &= c x, & \alpha - \beta h + n\delta &= 2y, \end{aligned}$$

worin y eben durch die letzte Gleichung defnirt ist, und wegen (14) eine ganze Zahl sein muss. Ebenso ergibt sich aus der zweiten Gleichung, dass, wenn x ungerade ist, $\sigma = 2$ sein muss. Wir erhalten nun hieraus

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma b x}{2} + y, & h\alpha - n\gamma &= c x \\ \beta &= \alpha x, & h\beta - n\delta &= \frac{\sigma b x}{2} - y, \end{aligned} \quad h \equiv 0 \pmod{48},$$

und wenn wir die Determinante bilden und

$$4ac - \sigma^2 b^2 = \sigma^2 m$$

setzen:

$$(17) \quad n = \frac{\sigma^2 m}{4} x^2 + y^2.$$

Wenn m so bestimmt ist und ausserdem

$$(a + c)x \equiv 0 \pmod{2},$$

so lassen sich die Gleichungen (16) und (14) befriedigen und aus (5), (6) ergibt sich

$$(18) \quad f\left(\frac{h + \omega}{n}\right) = \varepsilon f(\omega),$$

also

$$(19) \quad \begin{aligned} A &= (-1)^{y + \frac{(a+c)x}{2}} \cdot 2, \\ B &= w^2 + \frac{2}{w^2}, \end{aligned}$$

wenn

$$(20) \quad w^2 = \varepsilon f(\omega)^2,$$

und hierin ist

$$(21) \quad \omega = \frac{-\sigma b + \sigma\sqrt{-m}}{2a},$$

so dass B aus den Gleichungen für die complexe Multiplication bestimmt werden kann.

Ist x ungerade, so ist $\sigma = 2$ und $a + c$ gerade, also, da $a, \sigma b, c$ keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, a und c ungerade, also nach (17) (da $n \equiv -1$)

$$m \equiv -1 - y^2, \quad ac \equiv b^2 - 1 - y^2 \pmod{4},$$

also

$$b \equiv y \pmod{2}$$

und folglich

$$b^2 \equiv y^2 \pmod{4},$$

also

$$ac \equiv -1 \pmod{4}$$

oder

$$a + c \equiv 0 \pmod{4},$$

und daher nach (19)

$$A = 2(-1)^y.$$

Ist aber x gerade, so muss $\sigma = 1$ sein, und x kann nicht durch 4 theilbar sein, da sonst nach (17)

$$n \equiv y^2 \pmod{4},$$

was der vorausgesetzten Congruenz

$$n \equiv -1 \pmod{4}$$

widerspricht; also ist b ungerade und mithin m ungerade, y gerade, also

$$ac \equiv \frac{m+1}{4} \equiv \frac{y}{2} \pmod{2}.$$

Wenn wir also voraussetzen, dass a und c nicht beide gerade sind, so folgt hieraus nach (19)

$$A = 2(-1)^{\frac{y}{2}+1}.$$

Für unsere Aufgabe haben nur die beiden Werthe $x = 1$ und $x = 2$ Interesse. Beschränken wir uns darauf und nehmen ausserdem an, dass a und c niemals beide gerade sind, und a nicht durch n theilbar ist, so können wir, wenn r eine ganze Zahl bedeutet,

$$y = rx, \quad x\sigma = 2$$

setzen und unsere Formeln gehen in folgende über:

$$\begin{aligned} \alpha &= b + rx, & h\alpha - n\gamma &= cx, & h &\equiv 0 \pmod{48}, \\ \beta &= ax, & h\beta - n\delta &= b - rx, \\ (22) \quad x^2 ac - b^2 &= m, & m &= n - x^2 r^2, \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{-m}}{ax},$$

$$\begin{aligned} (23) \quad A &= 2(-1)^{r+x+1}, \\ B &= w^2 + \frac{2}{w^2}, \quad w^2 = \varepsilon f(\omega)^2. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von h erhält man aus (22) die Congruenz

$$(24) \quad hax \equiv b - rx \pmod{n}.$$

Verwandelt man r in $-r$, so bleibt m ungeändert, während sich h ändert, wenn nicht $r = 0$ ist.

§ 3.

Die reellen Werthe von B .

Die Werthe von B , wie sie in (23) festgestellt sind, genügen als algebraische Zahlen der complexen Multiplication gewissen ganzzahligen Gleichungen, deren Grad der Zahl der Classen erster oder zweiter Art der Determinante $-m$ gleich ist. Die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichungen entsprechen den verschiedenen nicht äquivalenten Formen der Determinante $-m$. Um diese Gleichungen aufzustellen, müssen wir die Werthe von B etwas genauer betrachten, wobei es übrigens genügt, wenn wir für jede Discriminante *eine* specielle Form betrachten, wenn wir nur über die Realität und das Vorzeichen von B urtheilen können.

In dem Falle $x = 1$ können wir uns auf die Betrachtung der Form

$$a = 1, \quad b = -r, \quad c = n$$

beschränken, wodurch wir aus (23) und (6) erhalten

$$(25) \quad w^2 = f(\sqrt{-m})^2, \quad f_1(\sqrt{-m})^2,$$

worin das erste bei geradem r und ungeradem m , das zweite bei ungeradem r und geradem m gilt.

Es ist also w^2 und mithin auch B *reell und positiv*.

Für $x = 2$ werden die Werthe von w^2 nicht reell; unter den Werthen von B ist aber ein reeller positiver, den wir aufsuchen müssen.

Schreiben wir zu diesem Zweck nach (4) B in der Form

$$(26) \quad B = \varepsilon f(\omega)^2 + \varepsilon^{-1} f\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)^2.$$

Wenn nun ω der Gleichung

$$(27) \quad a\omega^2 + b\omega + c = 0$$

genügt, so ergibt sich für

$$\omega' = \frac{\omega-1}{\omega+1}$$

die Gleichung

$$(28) \quad (a-b+c)\omega'^2 + 2(a-c)\omega' + (a+b+c).$$

Wenn r und mithin a und c ungerade sind, so ist diese Gleichung *primitiv* und ist, nach der Gauss'schen Bezeichnung, von der ersten Art; es ergibt sich also dann für B kein Werth, der nicht schon in dem Falle $x = 1$ mit behandelt ist. Ist aber r gerade, so hat diese Gleichung den Theiler 2.

Sie wird zu (27) *entgegengesetzt*, also $f(\omega')$ conjugirt imaginär zu $f(\omega)$, wenn

$$a - b + c = 2a,$$

also

$$b = c - a$$

angenommen wird; dies führt für m zu der Bestimmung

$$4ac - (c - a)^2 = m.$$

Ohne uns auf die allgemeine Untersuchung dieser Gleichung hier einzulassen, bemerken wir nur, dass sie für die einzigen hier in Betracht kommenden Fälle durch folgende Annahmen befriedigt ist:

$$m = 7, \quad (a, b, c) = (1, 1, 2),$$

$$m = 23, \quad (a, b, c) = (2, 1, 3),$$

$$m = 31, \quad (a, b, c) = (2, 3, 5),$$

$$m = 47, \quad (a, b, c) = (3, 1, 4),$$

und die Berechnung von B nach den Formeln (22), (23), (6) führt für diese Fälle zu folgenden Werthen:

$$(27) \quad \begin{aligned} m = 7, \quad B &= f_1\left(\frac{9 + \sqrt{-7}}{2}\right)^2 + f_1\left(\frac{-9 + \sqrt{-7}}{2}\right)^2, \\ m = 23, \quad B &= f_1\left(\frac{3 + \sqrt{-23}}{4}\right)^2 + f_1\left(\frac{-3 + \sqrt{-23}}{4}\right)^2, \\ m = 31, \quad B &= f_1\left(\frac{15 + \sqrt{-31}}{4}\right)^2 + f_1\left(\frac{-15 + \sqrt{-31}}{4}\right)^2, \\ m = 47, \quad B &= f_1\left(\frac{5 + \sqrt{-47}}{6}\right)^2 + f_1\left(\frac{-5 + \sqrt{-47}}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Dass diese Werthe positiv sind, ergibt sich aus der Discussion der Function

$$f_1(\xi + ia)^2 + f_1(-\xi + ia)^2$$

für ein beliebiges positives constantes a . Diese Function ist für reelle Werthe von ξ reell, ist positiv für $\xi = 0$, und verschwindet für $\xi = 6$ aber für keinen kleineren Werth.

Diese Grössen B sind Wurzeln von irreducibeln algebraischen Gleichungen der Grade 1, 3, 3, 5, die immer *nur eine* reelle Wurzel haben, die übrigen Wurzeln erhält man, wenn man in den Ausdruck für ω^2 statt ω die Wurzel einer zu einer anderen Classe gehörigen Form setzt.

Für die wirkliche Ausführung der Rechnung ist es bequemer, in den Fällen $m = 23, 31, 47$ für B nicht die Wurzeln (27) sondern die zur Hauptform gehörigen Wurzeln zu benutzen. Diese sind, wenn wir $m = 7$ nochmals hinzufügen:

$$\begin{aligned}
 (28) \quad m = 7, \quad B &= f_1 \left(\frac{9 + \sqrt{-7}}{2} \right)^2 + \frac{2}{f_1 \left(\frac{9 + \sqrt{-7}}{2} \right)^2}, \\
 m = 23, \quad B &= f_1 \left(\frac{9 + \sqrt{-23}}{2} \right)^2 + \frac{2}{f_1 \left(\frac{9 + \sqrt{-23}}{2} \right)^2}, \\
 m = 31, \quad B &= f_1 \left(\frac{21 + \sqrt{-31}}{2} \right)^2 + \frac{2}{f_1 \left(\frac{21 + \sqrt{-31}}{2} \right)^2}, \\
 m = 47, \quad B &= f_1 \left(\frac{21 + \sqrt{-47}}{2} \right)^2 + \frac{2}{f_1 \left(\frac{21 + \sqrt{-47}}{2} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

§ 4.

Die Aufstellung der Gleichungen für B .

In meinem vorhin erwähnten Buche habe ich Gleichungen aufgestellt, deren Wurzeln

$f(\sqrt{-m})$ bei geradem m ,

$f_1(\sqrt{-m})$ bei ungeradem m

sind. In den Fällen $\sigma = 2$, wo es sich um Formen erster Art handelt, ist oben (25) B direct durch diese Grössen ausgedrückt, und die Berechnung der Gleichungen für B aus den Formeln, die im Anhang meines Buches zusammengestellt sind, bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Man findet so die Gleichungen

$$m = 7, \quad B - 3 = 0,$$

$$m = 11, \quad B^3 + 2B^2 - 10B - 22 = 0,$$

$$m = 14, \quad B^2 - 4B + 2 = 0,$$

$$m = 19, \quad B^3 - 6B^2 + 10B - 6 = 0,$$

$$m = 22, \quad B - 4 = 0,$$

$$m = 23, \quad B^3 - 5B^2 + 4B - 1 = 0,$$

$$m = 31, \quad B^3 - 17B - 27 = 0,$$

$$m = 38, \quad B^3 - 22B - 40 = 0,$$

$$m = 43, \quad B^3 - 26B - 54 = 0,$$

$$m = 46, \quad B^2 - 4B - 14 = 0,$$

$$m = 47. \quad B^5 - 4B^4 - 22B^3 + 35B^2 + 82B - 121 = 0.$$

Etwas umständlicher ist die Rechnung für $\sigma = 1$, wo die Formen von der zweiten Art sind; darüber sei hier noch folgendes bemerkt.

Wir setzen, indem wir die Ausdrücke (28) anwenden (und x jetzt in einem anderen Sinne brauchen wie oben)

$$\sqrt{2}x = f(\sqrt{-m}).$$

Dann haben wir in den vier Fällen (28) für x die Gleichungen

$$(30) \quad \begin{aligned} m = 7, & \quad x - 1 = 0, \\ m = 23, & \quad x^3 - x - 1 = 0, \\ m = 31, & \quad x^3 - x^2 - 1 = 0, \\ m = 47, & \quad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(31) \quad \begin{aligned} v &= f\left(\frac{3b + \sqrt{-m}}{2}\right), \quad b = 3 \text{ für } m = 7, 23, \\ v_1 &= f_1\left(\frac{3b + \sqrt{-m}}{2}\right), \quad b = 7 \text{ für } m = 31, 47. \end{aligned}$$

Nach (3) und (4) ist aber,

$$f_2\left(\frac{3b + \sqrt{-m}}{2}\right) f(\sqrt{-m}) = e^{\frac{b\pi i}{8}} \sqrt{2},$$

also

$$f_2\left(\frac{3b + \sqrt{-m}}{2}\right) = \frac{e^{\frac{b\pi i}{8}}}{x},$$

und demnach folgt aus (2)

$$\begin{aligned} v^8 - v_1^8 &= -\frac{1}{x^8}, \\ v^8 v_1^8 &= -16x^8, \end{aligned}$$

also, wenn t eine unbestimmte Grösse ist

$$(t - v_1^8)(t + v^8) = t^2 - \frac{t}{x^8} + 16x^8.$$

Wenn wir also aus der Gleichung

$$(32) \quad 16x^{16} + t^2x^8 - t = 0$$

und aus einer der Gleichungen (30) x eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, die in t vom Grade 2, 6, 6, 10 ist, und die eine Wurzel v_1^8 hat.

Es zeigt sich aber, dass diese Gleichung nur von der Verbindung

$$t + \frac{16}{t}$$

abhängig gemacht und also in eine Gleichung für B^4 verwandelt werden kann. Aus dieser Gleichung lässt sich ein Factor abspalten, der eine Gleichung für B^2 liefert, und daraus wieder einer für B . Die Auswahl des richtigen Factors wird eben dadurch bestimmt, dass eine seiner Wurzeln reell und positiv sein muss.

Die Elimination wird am leichtesten dadurch vollzogen, dass man aus (30) zunächst eine Gleichung für x^8 ableitet, und dann (32) als quadratische Gleichung für x^8 auffasst.

So sind folgende vier Gleichungen berechnet.

$$m = 7, \quad B - 1 = 0,$$

$$m = 23, \quad B^3 - 5B^2 + 8B - 5 = 0,$$

$$m = 31, \quad B^3 + 4B^2 - B - 13 = 0,$$

$$m = 47, \quad B^5 + 8B^4 + 14B^3 - 41B^2 - 162B - 145 = 0.$$

§ 5.

Die Modulargleichung für den 23^{ten} und 47^{ten} Transformationsgrad.

Wenn wir die Resultate, die wir gewonnen haben, zusammenstellen, so erhalten wir folgende Uebersicht

$$n = 23. \quad \left. \begin{array}{l} A = +2, \quad m = 23 \\ \quad \quad \quad m = 19 \\ \quad \quad \quad m = 7 \end{array} \right\} \sigma = 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} A = -2, \quad m = 22 \\ \quad \quad \quad m = 14 \end{array} \right\} \sigma = 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 13 \\ m = 7 \end{array} \right\} \sigma = 1,$$

$$n = 47. \quad \left. \begin{array}{l} A = +2, \quad m = 47 \\ \quad \quad \quad m = 43 \\ \quad \quad \quad m = 31 \\ \quad \quad \quad m = 11 \end{array} \right\} \sigma = 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} A = -2, \quad m = 46 \\ \quad \quad \quad m = 38 \\ \quad \quad \quad m = 22 \end{array} \right\} \sigma = 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 47 \\ m = 31 \end{array} \right\} \sigma = 1.$$

Die Modulargleichung ist für $n = 23$ in Bezug auf A linear, in Bezug auf B vom 11^{ten} Grad, für $n = 47$ in Bezug auf A quadratisch, in Bezug auf B vom 23^{ten} Grad.

Für $n = 23$ setzen wir die Modulargleichung in eine der beiden Formen

$$(33) \quad \begin{array}{l} A - 2 = \Phi_1(B), \\ A + 2 = \Phi_2(B). \end{array} \quad n = 23.$$

Für $n = 47$ setzen wir sie in die Form

$$(34) \quad A^2 - 4 = \frac{A+2}{4} \Phi_3(B) - \frac{A-2}{4} \Phi_4(B).$$

Dann sind Φ_1, Φ_2 ganze rationale Functionen vom 11^{ten} Grad, Φ_3, Φ_4 vom 23^{ten} Grad, in denen die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat. Diese Functionen sind aber, da wir die Werthe von B für $A = \pm 2$ kennen, (oder wenigstens die rationalen Gleichungen, deren Wurzeln sie sind) völlig bekannt. Es ist nur noch zu beachten, dass jeder Factor, der einem Werthe $m < n$ entspricht, doppelt vorkommt, und nur die Factoren, die dem Werthe $m = n$ entsprechen, einfach.

Hiernach ist

$$\Phi_1(B) = (B-3)^2(B^3-6B^2+10B-6)^2(B^3-5B^2+4B-1),$$

$$\Phi_2(B) = (B-1)^2(B^2-4B+2)^2(B-4)^2(B^3-5B^2+8B-1),$$

$$\Phi_3(B) = (B^3+2B^2-10B-22)^2(B^3-17B-27)^2 \times \\ (B^3-26B-54)^2(B^5-4B^4-22B^3+35B^2+82B-121),$$

$$\Phi_4(B) = (B-4)^2(B^3-22B-40)^2(B^2-4B-14)^2 \\ (B^3+4B-B-13)^2(B^5+8B^4+14B^3-41B^2-162B-145).$$

§ 6.

Anwendung auf die Pell'sche Gleichung.

Es hat sich im Vorhergehenden die Modulargleichung für die Transformation 23^{ten} Grades in zwei verschiedenen Formen ergeben, von denen die erste bereits in meinem Buche mitgetheilt ist. Aber die Vergleichung der beiden Formen ergibt ein merkwürdiges Resultat.

Es folgt nämlich aus den beiden Gleichungen (33) die *Identität*

$$\Phi_2(B) - \Phi_1(B) = 4,$$

die wir in der Form schreiben wollen

$$(35) \quad X^2 M - Y^2 N = 1$$

wenn

$$2X = (B-1)(B^2-4B+2)(B-4),$$

$$2Y = (B-3)(B^3-6B^2+10B-6),$$

$$M = B^3 - 5B^2 + 8B - 5,$$

$$N = B^3 - 5B^2 + 4B - 1.$$

Setzt man für B irgend eine beliebige ganze Zahl, so gehen

$$X, Y, M, N$$

in ganze Zahlen

$$\xi, \eta, \mu, \nu$$

über, die der Gleichung

$$(36) \quad \xi^2 \mu - \eta^2 \nu = 1$$

genügen. Diese Gleichungen sind aber specielle Fälle der Pell'schen Gleichung.

Die Pell'sche Gleichung ist, wenn D irgend eine positive nicht quadratische ganze Zahl ist

$$(37) \quad x^2 - Dy^2 = 1,$$

und soll in ganzen Zahlen gelöst werden. Wenn D eine zusammengesetzte Zahl $= \mu\nu$ ist, so kann man in manchen Fällen, aber bei weitem nicht in allen, die Gleichung (36) in ganzen Zahlen $\xi; \eta$ lösen und man erhält daraus eine Lösung von (37), wenn man

$$x + \sqrt{D}y = (\xi\sqrt{\mu} + \eta\sqrt{\nu})^2$$

setzt.

Solche lösbare Gleichungen (34) und zugleich ihre Lösung ergibt die Gleichung (35) in beliebiger Menge, wenn man für B eine beliebige ganze Zahl setzt.

Für $B = 0$ erhält man z. B.

$$9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1.$$

Für $B = 2$ ergibt sich

$$1^2 \cdot 5 - 2^2 = 1,$$

und für $B = 7$

$$\xi = 207, \quad \eta = 226,$$

$$\mu = 149, \quad \nu = 25 \cdot 5;$$

es sondert sich also im letzten Fall von ν noch ein Quadrat ab, was mit η^2 vereinigt werden kann, und man erhält

$$207^2 \cdot 149 - 1130^2 \cdot 5 = 1.$$

Erhebt man

$$207\sqrt{149} + 1130\sqrt{5}$$

ins Quadrat, so erhält man die Lösung der Pell'schen Gleichung

$$x^2 - 745y^2 = 1,$$

nämlich

$$x = 12769001, \quad y = 467820,$$

und dies ist in der That nach der Legendre'schen Tafel die kleinste Lösung. In den Beispielen die ich berechnet habe, ergab sich immer die kleinste Lösung, indessen ist es doch sehr zweifelhaft, ob dies allgemein gilt. Man kommt natürlich bald auf sehr grosse Zahlen, die über den Bereich der vorhandenen Tafeln hinausgehen.*)

Eine Identität derselben Art, noch etwas einfacher, lässt sich auch aus der Transformation 11^{ten} Grades ableiten:

$$(B-1)^2 (B^3 + 2B^2 + 2B + 2) - (B+1)^2 (B^3 - 2B^2 + 2B - 2) = 4.$$

Göttingen im Februar 1893.

*) Legendre, Zahlentheorie Bd. I. Degen, Canon Pellianus, Kopenhagen 1817. Degen giebt zwei den unsrigen ähnliche Identitäten an, die sich ebenso zur Lösung der Pell'schen Gleichung anwenden lassen:

$$\begin{aligned} x(x-3)^2 - (x-4)(x-1)^2 &= 4, \\ (x^3 + 6x^2 + 9x + 2)^2 - x(x+4)(x+3)^2(x+1)^2 &= 4. \end{aligned}$$