

# Sopra la corrispondenza del secondo grado fra due sistemi semplicemente infiniti

(del sig. D.<sup>r</sup> EMILIO WEYR, di Praga.)

---

1. Questa corrispondenza, lo studio della quale è importantissimo per una grande classe di problemi geometrici, fu infatti già considerata ed adoperata specialmente in riguardo alle curve piane del terz'ordine, alle curve gobbe del quart'ordine e prima specie, o diciamo in generale in riguardo alle curve del primo genere. Ecco il concetto della corrispondenza suddetta.

Abbiansi due sistemi  $X$ ,  $Y$ , ciascuno formato di una infinità semplice di elementi, individuati univocamente dai valori di un solo parametro, in tal modo che anche viceversa ad un elemento corrisponda uno ed un solo valore del parametro. Tali sistemi possono essere per esempio punteggiate del genere zero (cioè giacenti sopra curve del genere zero) o fasci di curve, o fasci di superficie ecc. Avremo dunque nei due sistemi  $X$ ,  $Y$  due parametri  $x$ ,  $y$  per la determinazione dei loro elementi; ma si intende che il parametro  $x$  del sistema  $X$  può avere un'altra significazione da quella del parametro  $y$  nel sistema  $Y$ . Fra i due sistemi avrà luogo una corrispondenza del secondo grado, quando a ciascun elemento dell'un sistema corrisponda algebricamente una coppia di elementi dell'altro sistema; cioè quando i parametri di due elementi corrispondenti siano legati fra loro da una equazione algebrica del secondo grado rispetto a ciascuno dei due parametri. Una tale equazione avrà, come si vede immediatamente, la forma:

$$y^2 f_0 + y f_1 + f_2 = 0 \quad (1)$$

dove

$$f_i = A_i x^2 + B_i x + C_i;$$

$A, B, C$  essendo costanti arbitrarie. Il numero di tali costanti sarà dunque nove; una però si può tralasciare. Di qui segue che una corrispondenza generale del secondo grado è individuata quando si conoscano otto paia di elementi corrispondenti (\*).

È noto che in ciascuno dei due sistemi si trovano quattro elementi di diramazione (*Verzweigungselemente*) cioè elementi tali che i due a loro corrispondenti dell'altro sistema coincidono. Denominiamo con  $x_1 x_2 x_3 x_4$ ,  $y_1 y_2 y_3 y_4$  gli elementi di diramazione ai quali corrisponderanno rispettivamente gli elementi doppi  $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ ,  $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$  dell'altro sistema. Per esempio corrisponde all'elemento  $x_3$  l'elemento doppio  $y_3^{12}$  ecc.

Fra gli elementi di diramazione fu dal celebre SALMON enunciato in forma geometrica il teorema seguente:

I due gruppi  $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ ,  $(y_1 y_2 y_3 y_4)$  degli elementi di diramazione formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

Noi ci proponiamo in questa breve nota da dimostrare i due teoremi seguenti, forse non ancora conosciuti:

Anche i due gruppi  $(x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12})$ ,  $(y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12})$  degli elementi doppi formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

E di più:

Ad ogni gruppo di elementi presi fra gli elementi  $x_1 x_2 x_3 x_4$ ,  $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$  del sistema  $X$  corrisponde proiettivamente (in quattro maniere diverse), un gruppo di elementi presi fra gli elementi  $y_1 y_2 y_3 y_4$ ,  $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$  del sistema  $Y$ .

Dimosteremo dunque il teorema generale:

Gli elementi di diramazione e gli elementi doppi nei due sistemi legati da una corrispondenza generale del secondo grado formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

2. Così i tre primi teoremi come l'ultimo saranno dimostrati, se potremo affermare il teorema seguente:

Il sistema  $X$  si può (in quattro maniere diverse) in tal modo proiettare sul sistema  $Y$  che gli elementi di diramazione e gli elementi doppi d'un sistema coincidano cogli elementi analoghi dell'altro.

---

(\*) Una corrispondenza generale secondo  $[m, n]$  è determinata se sono dati  $(mn + m + n)$  paia di elementi corrispondenti.

In fatti una tale proiezione o, con altre parole, una tale trasformazione lineare si può effettuare in quattro maniere diverse come ora ci proponiamo di far vedere.

Se vogliamo proiettare il sistema  $X$  linearmente sopra  $Y$ , basta porre:

$$x = \frac{\alpha y' + \beta}{\gamma y' + \delta} \quad (2)$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono costanti qualsivogliano. Dal sistema  $X$  dedurremo un sistema  $Y'$  ed è facile riconoscere che i due sistemi  $X$  ed  $Y'$  saranno proiettivi. Poichè i due sistemi  $Y$  ed  $Y'$  sono sovrapposti, riterremo che per ogni elemento; sia considerato appartenente all'uno o all'altro, sia  $y = y'$ . Adesso abbiamo due sistemi  $Y, Y'$  con elementi comuni, e la proiettività fra  $Y'$  ed  $X$  fa sì che c'è una corrispondenza del secondo grado fra  $Y$  ed  $Y'$  quando consideriamo un elemento  $y'$  di  $Y'$  che corrisponde proiettivamente all'elemento  $x$  del sistema  $X$ , come corrispondente ai due elementi che corrispondono nel sistema  $Y$  all'elemento  $x$ .

La equazione esprime questa corrispondenza fra  $Y$  ed  $Y'$  si può facilmente dedurre dall'equazione (1) mediante la equazione (2) che esprime la proiettività fra  $Y'$  ed  $X$ . Mettendo (2) in  $f_i$  otteniamo:

$$f_i = \frac{A_i(\alpha y' + \beta)^2 + B_i(\alpha y' + \beta)(\gamma y' + \delta) + C_i(\gamma y' + \delta)^2}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

ossia:

$$f_i = \frac{y'^2(A_i\alpha^2 + B_i\alpha\gamma + C_i\gamma^2) + y'[2A_i\alpha\beta + B_i(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_i\gamma\delta] + (A_i\beta^2 + B_i\beta\delta + C_i\delta^2)}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

o, ponendo

$$\phi_i = y'(A_i\alpha^2 + B_i\alpha\gamma + C_i\gamma^2) + y'[2A_i\alpha\beta + B_i(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_i\gamma\delta] + (A_i\beta^2 + B_i\beta\delta + C_i\delta^2)$$

avremo:

$$\hat{f}_i = \frac{\phi_i}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

onde tralasciando il fattore comune  $\frac{1}{(\gamma y' + \delta)^2}$ , la equazione (1) assumerà la forma:

$$y^2\phi_0 + y\phi_1 + \phi_2 = 0 \quad (3)$$

che significa evidentemente ancora una corrispondenza generale del secondo grado, ma fra i sistemi  $Y$  ed  $Y'$ , perchè nelle funzioni  $\phi$  si trova adesso il parametro  $y'$ .

Fra le costanti  $\alpha\beta\gamma\delta$  possiamo considerarne tre come arbitrarie, dunque le possiamo scegliere in tal modo che siano soddisfatte tre condizioni. Faremo la scelta così che la equazione (3) divenga simmetrica in  $y$  ed  $y'$ . In questa equazione abbiamo termini della forma  $x^2y^2$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$ ,  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xy$ ,  $x$ ,  $y$ , 1, e la equazione sarebbe evidentemente simmetrica se i coefficienti di  $x^2y$  ed  $xy^2$ , poi di  $x^2$  ed  $y^2$  e finalmente quei di  $x$  ed  $y$  fossero eguali. Ma questo dà precisamente tre condizioni alle quali possiamo dunque soddisfare mediante la scelta delle costanti  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Le condizioni della simmetria sono, come si vede subito:

$$\left. \begin{aligned} 2A_0\alpha\beta + B_0(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_0\gamma\delta &= A_1\alpha^2 + B_1\alpha\gamma + C_1\gamma^2 \\ 2A_2\alpha\beta + B_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_2\gamma\delta &= A_1\beta^2 + B_1\beta\delta + C_1\delta^2 \\ A_2\alpha^2 + B_2\alpha\gamma + C_2\gamma^2 &= A_0\beta^2 + B_0\beta\delta + C_0\delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

alle quali soddisfacendo, la equazione (3) prenderà la forma:

$$ay^2y'^2 + byy'(y + y') + c(y^2 + y'^2) + dy y' + e(y + y') + f = 0. \quad (5)$$

Ma, che significa la simmetria dell'equazione (5) esprime la corrispondenza fra i due sistemi  $Y$  ed  $Y'$ ? Evidentemente essa esprime la proprietà speciale che, se consideriamo un elemento come appartenente all'uno od all'altro sistema, ad esso corrispondono in entrambi i casi gli stessi due elementi. Difatti, la equazione (5) fornisce (a causa della sua simmetria) due valori  $y'_1, y'_2$  corrispondenti ad  $y$  che sono identici con quei due valori  $y_1, y_2$  che corrispondano ad  $y'$ , se è  $y' = y$ . In questo caso i due sistemi  $Y$  ed  $Y'$  non si possono più distinguere e formano ciò che si potrebbe chiamare un sistema simmetrico del secondo grado (\*).

Dalla simmetria caviamo immediatamente che gli elementi  $y_1, y_2, y_3, y_4$  di diramazione del sistema  $Y$  saranno anche quelli del sistema  $Y'$  e gli elementi doppi  $y_1^{12}y_2^{12}y_3^{12}y_4^{12}$  di  $Y$  saranno anche gli elementi doppi di  $Y'$ . Difatti, siccome all'elemento  $y_1$  per es. corrispondono due elementi uniti in  $(y_1^{12})$ , riguardandolo come elemento  $y'_1$  del sistema  $Y'$  gli devono corrispondere (a causa della simmetria) gli stessi due elementi uniti in  $y_1^{12} (\equiv y_1'^{12})$ ; ne concludiamo dunque che  $y_1 (\equiv y_1')$  è simultaneamente un elemento di

(\*) La equazione (5) contenendo cinque costanti arbitrarie, mostra che un sistema simmetrico del secondo grado è individuato mediante cinque paia di elementi corrispondenti. Per es. un così fatto sistema generale di punti è determinato dalle tangenti di una conica sopra di una altra conica.

diramazione dei due sistemi  $Y$  ed  $Y'$  e, che  $y_1^{12} (\equiv y_1'^{12})$  è simultaneamente un elemento doppio dei medesimi.

Vediamo dunque che il sistema  $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$  è congruente col sistema  $y_1' y_2' y_3' y_4' y_1'^{12} \dots$  (perchè questi due sistemi giacciono uno sopra dell'altro) e, essendo  $Y'$  proiettivo con  $X$ , per conseguenza saranno i due sistemi  $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} y_2^{12} \dots$  ed  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_1^{12} x_2^{12} \dots$  proiettivi fra loro.

Le equazioni (4) rappresentano tre superficie del secondo grado le quali avranno otto punti d'intersezione comuni, giacchè nessuna delle medesime passa per la curva d'intersezione delle altre due. Noi otterremo dunque otto sistemi di valori per le costanti  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Ma, questi otto sistemi devono essere per così dire, conjugati due a due, come si vede dalla seguente osservazione.

Facendo la proiezione mediante l'equazione (2) e in tal modo che il sistema  $Y'$  divenga simmetrico col sistema  $Y$ , non intendiamo che questo. Ad un elemento  $y'$  di  $Y'$  corrisponde per la (2) un elemento  $y$  di  $Y$ , ed a quest'elemento corrispondono due elementi  $x_1, x_2$  di  $X$  in conseguenza dell'equazione (1); ma, se consideriamo  $y'$  come un elemento di  $X$ , ad esso corrisponderanno in conseguenza dalla (1) due elementi  $y_1 y_2$  di  $Y$ , e la nostra intenzione è stata di scegliere  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  così che gli elementi  $y_1 y_2$  siano legati cogli elementi  $x_1 x_2$  mediante l'equazione (2). Ma questo si può (la possibilità è già dimostrata) effettuare in due maniere che sono, come si potrebbe dire, conjugate. Infatti si può domandare che si proietti  $x_1$  in  $y_1$  onde  $x_2$  verrà poi proiettato in  $y_2$ , o che si proietti  $y_1$  in  $x_2$  e poi  $y_2$  in  $x_1$ . Ma nell'effetto finale queste due proiezioni non sono differenti fra loro; dunque degli otto sistemi che caviamo dalle (4) per  $\alpha\beta\gamma\delta$ , restano effettivamente soli quattro che danno luogo a proiezioni differenti fra loro.

Possiamo dunque considerare come dimostrato il teorema enunciato.

3. Nell'articolo presente ci permetteremo di dare una dimostrazione puramente geometrica del teorema proposto.

Quali sistemi  $X, Y$  legati dalla corrispondenza del secondo grado, vogliamo considerare i due sistemi di generatrici di un'iperboloide  $I$ . Due generatrici  $x, y$  corrispondenti s'incontrano in un punto  $p$  perchè appartengono ciascuna ad un sistema diverso. Il luogo dei punti  $p$  sarà dunque una curva  $C$  giacente sopra di  $I$ . Ciascuna generatrice di  $I$  incontra  $C$  in due punti, nei quali è incontrata dalle due generatrici dell'altro sistema che corrispondono ad essa. Di qui possiamo già osservare che  $C$  dev'essere una curva gobba di quart'ordine e prima specie. Infatti, un piano qualsivoglia ha quattro punti comuni con  $C$ , che sono evidentemente i quattro punti

unità delle due serie che determinano i due sistemi di generatrici corrispondenti sulla conica comune al piano ed all'iperboloide. Essendo la curva  $C$  da ciascuna generatrice dell'iperboloide incontrata in due punti, non può essere che una curva di prima specie. Inoltre  $C$  è una curva generale di quart'ordine e prima specie; perchè una tale curva è determinata conoscendo otto punti d'essa situati ad arbitrio sopra di  $I$ ; e per stabilire la corrispondenza fra i due sistemi di generatrici dobbiamo scegliere (come abbiamo osservato poco fa) otto paia di elementi corrispondenti, cosa che è precisamente equivalente alla scelta di otto punti della curva. Possiamo dunque dire:

Se i due sistemi di generatrici di un'iperboloide si trovano in una corrispondenza (generale) del secondo grado, le generatrici di un sistema incontrano le corrispondenti generatrici dell'altro nei punti di una curva generale del quart'ordine e prima specie. E viceversa, ogni curva così fatta, situata sull'iperboloide, dà luogo ad una corrispondenza (generale) del secondo grado fra le generatrici dei due sistemi (\*).

Per la curva  $C$  passano, come si sa, quattro coni di secondo grado; sia dunque  $o_1$  il vertice di un tale cono e proiettiamo  $C$  da  $o_1$  come centro di proiezione sopra il piano polare di  $o_1$  rispetto all'iperboloide. La proiezione dell'iperboloide  $I$  sarà la conica  $P$  nella quale il piano di proiezione sega l'iperboloide. Ciascuna tangente  $\theta$  di  $P$  è l'immagine di due generatrici  $\theta_1, \theta_2$  dell'iperboloide che si segano nel punto di contatto della retta  $\theta$  colla conica  $P$ . La proiezione della nostra curva  $C$  sarà la conica  $C_1$  intersezione del cono ( $o_1 C$ ) col piano di proiezione. I due punti  $m, n$  nei quali  $\theta$  sega la conica  $C_1$  sono dunque l'immagine dei quattro punti  $m_1 n_1, m_2 n_2$  nei quali le due generatrici  $\theta_1, \theta_2$  incontrano la curva  $C$ . Di qui segue che le quattro tangenti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  comuni alle due coniche  $P$  ed  $C_1$  rappresentano una volta quattro generatrici di un sistema, e l'altra volta quattro generatrici dell'altro sistema che toccano la curva  $C$ . Queste generatrici sono dunque gli elementi di diramazione dei due sistemi da noi considerati. Ma i quattro

---

(\*) Vi è anche una corrispondenza del secondo grado che si potrebbe chiamare «riducibile», e che si presenta nel caso di una curva  $C$  con un punto doppio. In questo caso vi è nel sistema  $X$  un elemento  $x$ , e nel sistema  $Y$  un elemento  $y$  ciascuno dei quali corrisponde due volte all'altro. Una tale corrispondenza tralasciamo nella nostra considerazione, perchè non vi sono più quattro ma solamente due elementi di diramazione in ciascun sistema.

punti  $a, b, c, d$  nei quali  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  toccano la conica  $P$  sono i punti di intersezione delle otto generatrici di diramazione, prese due a due, ed essendo noto che il rapporto anarmonico di quattro generatrici dell'un sistema è eguale al rapporto anarmonico di quattro generatrici dell'altro sistema, quando esse segano le prime in quattro punti del medesimo piano, rimane dimostrato il teorema:

Il rapporto anarmonico delle quattro generatrici di un sistema toccanti la curva  $C$  è eguale al rapporto anarmonico delle quattro generatrici dell'altro sistema toccanti la stessa curva  $C$ .

I quattro modi nei quali queste due quaterne di generatrici si possono mettere nella relazione di proiettività corrispondono ai quattro vertici  $o_1, o_2, o_3, o_4$  dei coni passanti per  $C$ . Le due quaterne si segano quattro volte in quattro punti sopra le facce del tetraedro  $(o_1 o_2 o_3 o_4)$  che è conjugato a sè stesso per ogni superficie di secondo grado passante per  $C$ . Ma il teorema dimostrato per la curva  $C$ , cioè pei due sistemi di generatrici, vale anche (a causa della generalità della corrispondenza fra i due sistemi) per due sistemi qualunque, i quali siano in una corrispondenza generale del secondo grado. Le immagini delle generatrici doppie, cioè delle otto generatrici (quattro di ciascun sistema) passanti per i punti di contatto della curva  $C$  colle generatrici toccanti saranno evidentemente le quattro tangenti che si possono condurre alla conica  $P$  pei quattro punti di contatto delle tangenti  $\alpha\beta\gamma\delta$  colla conica  $C_1$ . Ciascuna di queste quattro tangenti è l'immagine simultaneamente di una generatrice doppia dell'uno o dell'altro sistema, che si segano nel punto di contatto della loro proiezione colla conica  $P$ . Abbiamo dunque il teorema generale che corrisponde a quello dell'articolo precedente:

Sull'iperboloide  $I$  giaccia una curva  $C$  del quart'ordine e prima specie. Vi sono quattro generatrici  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$  dell'uno, e quattro  $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$  dell'altro sistema, toccanti la curva  $C$ . Per i punti di contatto delle  $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$  passano quattro generatrici  $\alpha_1^{12}\beta_1^{12}\gamma_1^{12}\delta_1^{12}$  del primo sistema, e per i punti di contatto delle  $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$  passano quattro generatrici  $\alpha_2^{12}\beta_2^{12}\gamma_2^{12}\delta_2^{12}$  dell'altro sistema. Le otto generatrici:  $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_1^{12}\beta_1^{12}\gamma_1^{12}\delta_1^{12}$  segano le otto generatrici  $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\alpha_2^{12}\beta_2^{12}\gamma_2^{12}\delta_2^{12}$  secondo quattro maniere diverse in otto punti giacenti in un medesimo piano. I piani così ottenuti sono le facce del tetraedro conjugato a sè stesso, rispetto a tutte le superficie del secondo grado passanti per  $C$ .

I punti di contatto della curva  $C$  colle generatrici  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_2, \dots$  hanno le loro proiezioni nei punti di contatto delle quattro tangenti  $\alpha\beta\gamma\delta$  colla conica  $C_1$  immagine di  $C$ . Dunque vediamo che gli otto punti di contatto della curva  $C$  colle generatrici  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$  giacciono in quattro maniere diverse due a due in quattro rette passanti per uno stesso punto. I quattro punti così ottenuti sono i vertici del tetraedro sopradetto, ossia i vertici dei quattro coni di secondo grado passanti per  $C$ .

4. Da un punto qualunque dell'iperboloide proiettiamo ora, sopra un piano, tutta la figura tracciata sull'iperboloide medesimo; avremo così il seguente teorema, noto in parte:

Sia  $C$  una curva piana del quart'ordine con due punti doppi  $\delta_1, \delta_2$ ; per  $\delta_1$  si possono condurre quattro rette  $A_1 B_1 C_1 D_1$  che la toccano altrove in quattro punti  $a_1 b_1 c_1 d_1$ , e per  $\delta_2$  passano analogamente quattro tangenti  $A_2 B_2 C_2 D_2$  e siano  $a_2 b_2 c_2 d_2$  i punti di contatto. Gli otto raggi  $A_1, B_1, C_1, D_1, \delta_1(a_2, b_2, c_2, d_2)$  segano gli altri otto raggi  $A_2, B_2, C_2, D_2, \delta_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$  in quattro maniere diverse in otto punti di una stessa conica passante per  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Due qualunque delle quattro coniche così ottenute hanno, oltre a  $\delta_1 \delta_2$ , una secante comune, e le sei secanti analoghe passano tre a tre per quattro punti  $o_1 o_2 o_3 o_4$ , formando un quadrangolo completo. Gli otto punti  $a_1 b_1 c_1 d_1 a_2 b_2 c_2 d_2$  giacciono in quattro maniere diverse due a due in quattro raggi passanti per uno dei punti  $o$  (\*). Le quattro coniche suddette finalmente segano la curva  $C$  (oltre  $\delta_1$  e  $\delta_2$ ) in sedici punti, in ciascuno dei quali questa curva ha un contatto quadripunto con una conica passante per  $\delta_1$  ed  $\delta_2$ .

Se prendessimo il centro di proiezione sulla curva  $C$ , otterremmo un teorema analogo per le cubiche piane. Vogliamo solamente notare che per queste curve i punti  $o$  sono situati sopra la cubica, e hanno come punto tangenziale comune il terzo punto d'intersezione della cubica colla retta  $\delta_1 \delta_2$ . I punti  $\delta_1, \delta_2$  sono in questo caso due punti presi ad arbitrio nella cubica (\*\*).

5. Se prendiamo un sistema  $\Sigma$  di generatrici dell'iperboloide  $I$  ed un

---

(\*) Cioè: congiungendo uno dei punti  $a_1 b_1 c_1 d_1$  con uno dei punti  $o$ , la retta congiungente passa anche per uno dei punti  $a_2 b_2 c_2 d_2$ .

(\*\*) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n.º 149.



sistema  $\Sigma'$  d'un altro iperboloide  $I'$ , e se consideriamo due generatrici che si segano come corrispondenti, i due sistemi entrano evidentemente in una corrispondenza generale del secondo grado. Le quattro generatrici di  $\Sigma$  che toccano  $I'$  e quelle di  $\Sigma'$  che toccano  $I$  rappresentano gli elementi di diramazione; dunque:

Il rapporto anarmonico delle quattro generatrici appartenenti allo stesso sistema di un iperboloide, che toccano un altro iperboloide, è eguale al rapporto anarmonico delle quattro generatrici appartenenti ad uno stesso sistema del secondo iperboloide, che toccano il primo.

6. Assumiamo due rette bisecanti una curva gobba del quart'ordine e prima specie, e consideriamole come assi di due fasci i cui piani corrispondenti si seghino sulla curva. La corrispondenza è del secondo grado, e così otteniamo il teorema (\*):

Il rapporto anarmonico dei quattro piani tangenti, che si possono condurre ad una curva gobba del quart'ordine e prima specie per qualunque retta bisecante è costante.

Il valore di questo rapporto è eguale al rapporto anarmonico dei quattro piani passanti per una tangente della curva e pei quattro vertici del tetraedro conjugato a sè stesso, rispetto ad ogni superficie del secondo grado passante per la curva. Difatti, questi piani, essendo piani tangenti ai quattro coni di secondo grado passanti per la curva, sono i quattro piani che per la tangente nominata si possono condurre a toccare di nuovo la curva gobba altrove.

Milano, marzo 1871.

---

(\*) CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3° ordre*, n.º 161 e 162.

---