

Die Entdeckung der einseitigen Flächen.

Von

PAUL STÄCKEL in Kiel.

Im Jahre 1865 hat Moebius auf die für die Analysis situs des Raumes fundamentale Thatsache aufmerksam gemacht, dass es Flächen giebt, die nur *eine* Seite haben*). „Wenn man sie von einer beliebigen Stelle aus mit einer Farbe zu überstreichen anfängt und damit fortfährt, ohne mit dem Pinsel über die Grenzlinie hinaus auf die andere Seite überzugehen, so werden nichtsdestoweniger zuletzt an jeder Stelle die zwei daselbst gegenüberliegenden Seiten der Fläche gefärbt sein.“ Von diesen Flächen, sagt Moebius, kann man sich eine sehr anschauliche Vorstellung verschaffen, indem man einen Papierstreifen von der Form eines Rechtecks $ABB'A'$ (Fig. 1) das Ende AB festlassend und das andere Ende $A'B'$ um die Längsaxe des Streifens haltend derart biegt, dass A' mit B und B' mit A zur Coincidenz gelangt (Fig. 2).

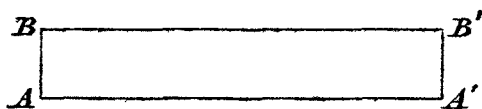


Fig. 1.

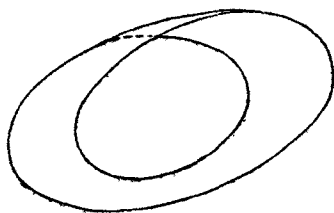


Fig. 2.

Vor kurzem hatte ich Gelegenheit den Nachlass von Listing einzusehen, dem die Analysis situs des Raumes die wichtige 1862 veröffentlichte Abhandlung über den *Census räumlicher Complexe* verdankt**), und fand in dem aus den Jahren 1858 bis 1859 stammen-

*) *Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders.* Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math. phys. Classe Bd. 17, S. 31—68, 1865, wieder abgedruckt in den gesammelten Werken, Bd. II, S. 473—521.

**) Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen Bd. 10. Göttingen 1862.

den Vorarbeiten zu dieser Abhandlung genau die Figur 2. Von besonderem Interesse ist dabei eine Notiz, datirt „1858. Juli 24.“

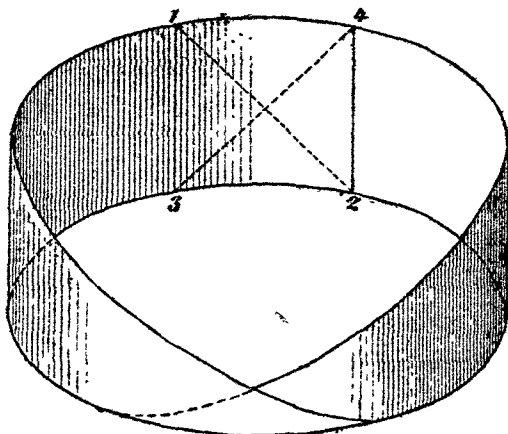


Fig. 3.

„Fläche mit Einer cyclischen Grenze. Auf ihr sind Linien zwischen vier Punkten (1), (2), (3), (4) in consecutiver Ordnung auf der Grenzlinie liegend, so zu ziehen, dass die Linie von (1) nach (2) und die Linie von (3) nach (4) sich einmal kreuzen, und ferner, dass die Linien (1) (3) und (2) (4) sich nirgends kreuzen, was bekanntlich bei einer auf der Oberfläche eines Körpers genommenen cyclisch begrenzten Fläche nicht möglich ist.

Die Fläche ist durch die Linien 1 3 und 2 4 in zwei Vierecke getheilt, deren Umfänge consecutive heissen

$$1.) \quad 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1 = 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1$$

$$2.) \quad 1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1 = 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1.$$

Im ersten liegen die Seiten 1 4 und 2 3 in der ursprünglichen Grenze der Fläche, im zweiten die Seiten 1 2 und 3 4, im ersten wie im zweiten sind die Seiten 1 3 und 2 4 Querschnitte der Fläche, welche (nach Riemann?) zweifach zusammenhängend ist.

Im ersten sind die Diagonalen 1 2, 3 4

„ zweiten „ „ „ 2 3, 1 4.

Bei dieser Fläche gehen die beiden Seiten jedes ihrer begrenzten Stücke mittelst der restirenden Flächentheile continuirlich in einander über.“

Aber auch in der Abhandlung über den Census ist die Figur 2 enthalten: Sie ist daselbst die Figur Nr. 3. In der zugehörigen Stelle des Textes, S. 13—14, definiert Listing als *Diaphragma* eine einfach zusammenhängende Fläche, die von einer einfachen, unverknoteten und unverschlungenen Ringlinie begrenzt ist. Bei einer solchen Fläche, heisst es daselbst, ist diese Ringlinie „die alleinige Scheidelinie zwischen

den zwei vollständig von einander getrennten (gleich grossen) Arealgebieten ihrer zwei Seiten“ und dazu wird angemerkt:

„Es mag nicht überflüssig erscheinen, schon bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dass eine von einer cyklischen un-
verknöteten Curve vollständig begrenzte Fläche ganz andere Eigenschaften haben kann, als die eben angeführten, Figur 3 und 4 stellen solche Beispiele dar.“

Wie Herr C. Reinhardt bemerkt*), kann man Moebius' Entdeckung der einseitigen Polyeder „mit ziemlicher Bestimmtheit auf das letzte Viertel des Jahres 1858 verlegen“ und „in dieselbe Zeit ist auch die Auffindung des sogenannten Moebius'schen Blattes zu setzen.“ Demnach sind Listing und Moebius, beide mit der Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern beschäftigt, fast gleichzeitig unabhängig von einander zu der Entdeckung der einseitigen Flächen gelangt, während Listing die Priorität der Veröffentlichung zuerkannt werden muss.

Kiel, im April 1899.

*) Moebius, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 519.



Berichtigung.

Seite 127 Zeile 7 v. o. lies bilinearen statt trilinearen.