

## 1.

## Beitrag zur Theorie der Function

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-v} v^{x-1} dv.$$

(Von Herrn Dr. E. E. Kummer, Professor in Breslau.)

Stellt man sich irgend eine Function  $f(x)$  in eine nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $2\pi x$  geordnete Reihe entwickelt vor, so dass

$$f(x) = A + 2A_1 \cos 2\pi x + 2A_2 \cos 4\pi x + 2A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_1 \sin 2\pi x + 2B_2 \sin 4\pi x + 2B_3 \sin 6\pi x + \dots$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$  ist, verwandelt sodann  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$ ,  $x + \frac{2}{n}$  ....  $x + \frac{n-1}{n}$ , und addirt diese Gleichungen, so fallen alle Glieder der Reihen-Entwicklung mit Ausnahme derer heraus, welche Sinus oder Cosinus von Bogen enthalten, die Vielfache von  $2n\pi x$  sind, und man erhält

$$f(x) + f(x + \frac{1}{n}) + f(x + \frac{2}{n}) + \dots + f(x + \frac{n-1}{n}) \\ = n(A + 2A_n \cos 2n\pi x + 2A_{2n} \cos 4n\pi x + 2A_{3n} \cos 6n\pi x + \dots) \\ + n(2B_n \sin 2n\pi x + 2B_{2n} \sin 4n\pi x + 2B_{3n} \sin 6n\pi x + \dots),$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{n}$ . Setzt man nun weiter

$$F(x) = A + 2A_n \cos 2\pi x + 2A_{2n} \cos 4\pi x + 2A_{3n} \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_n \sin 2\pi x + 2B_{2n} \sin 4\pi x + 2B_{3n} \sin 6\pi x + \dots,$$

so ergibt sich

$$f(x) + f(x + \frac{1}{n}) + f(x + \frac{2}{n}) + \dots + f(x + \frac{n-1}{n}) = nF(nx).$$

Setzt man ferner  $f(x) = l\varphi(x)$  und  $nF(x) = l\Phi(x)$ , so ist

$$\varphi(x) \varphi(x + \frac{1}{n}) \varphi(x + \frac{2}{n}) \dots \varphi(x + \frac{n-1}{n}) = \Phi(nx).$$

Man hat also so zwei allgemeine Formen von Gleichungen erhalten, die in der Analysis häufig vorkommen; namentlich in der Theorie der transcendenten Functionen. Die Entwicklung einer Function  $f(x)$  in eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von  $2\pi x$  geordnete Reihe führt jedesmal zu einer solchen

Formel, welche aber nur dann von besonderem Interesse ist, wenn die Function  $F(x)$  einen anderweiten einfachen Zusammenhang mit  $f(x)$  hat.

Auf die obige Art lässt sich auch ein leichter Beweis der bekannten Formel für die Function Gamma finden, welche eine sehr einfache, wie ich glaube bisher noch nicht bekannte Reihen-Entwicklung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $2\pi x$  enthält.

Setzt man nemlich

$$l\Gamma(x) = A_0 + 2A_1 \cos 2\pi x + 2A_2 \cos 4\pi x + 2A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_1 \sin 2\pi x + 2B_2 \sin 4\pi x + 2B_3 \sin 6\pi x + \dots,$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ , so ergibt sich bekanntlich

$$A_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \cos 2k\pi x \cdot dx, \quad B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin 2k\pi x \cdot dx.$$

Die Coefficienten  $A_k$  lassen sich leicht bestimmen, ohne dass man der Ausdrücke durch bestimmte Integrale bedarf; nämlich vermittelt der Grundeigenschaft der Function Gamma:

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l(2\pi) - l(2\sin \pi x).$$

Setzt man in dieser Formel für  $l\Gamma(x)$  und  $l\Gamma(1-x)$  ihre Reihen-Entwickelungen, und auch für  $l(2\sin \pi x)$  die bekannte Reihe

$$-l(2\sin \pi x) = \cos 2\pi x + \frac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots,$$

so erhält man

$$2A_0 + 4A_1 \cos 2\pi x + 4A_2 \cos 4\pi x + 4A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ = l(2\pi) + \cos 2\pi x + \frac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots,$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ ; und da nun nach bekannten Sätzen beide Entwickelungen identisch sein müssen, so findet sich

$$A_0 = \frac{1}{2}l(2\pi) \quad \text{und} \quad A_k = \frac{1}{4k}.$$

Um weiter die Coefficienten  $B_k$  zu bestimmen, setzen wir in dem Ausdrücke

$$B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin 2k\pi x \cdot dx$$

statt  $l\Gamma(x)$  den bekannten, oder wenigstens aus bekannten leicht zu entwickelnden Ausdruck durch ein bestimmtes Integral:

$$l\Gamma(x) = \int_0^1 \left( \frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1 \right) \frac{dz}{l(z)} \quad (x > 0).$$

Dieser giebt

$$B_k = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1 \right) \frac{\sin 2k\pi x dz dx}{l(z)}.$$

Wird nun die Integration in Beziehung auf  $x$  ausgeführt, so erhält man

$$\int_0^1 \sin. 2k\pi x. dx = 0, \quad \int_0^1 x \sin. 2k\pi x. dx = \frac{-1}{2k\pi},$$

$$\int_0^1 z^{x-1} \sin. 2k\pi x. dx = \frac{(1-z) 2k\pi}{z(l(z)^2 + 4k^2\pi^2)},$$

also

$$B_k = \int_0^1 \left( \frac{-2k\pi}{z(l(z)^2 + 4k^2\pi^2)} + \frac{1}{2k\pi} \right) \frac{dz}{l(z)},$$

oder, wenn  $z = e^{-2k\pi t}$  gesetzt wird:

$$B_k = \frac{1}{2k\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - e^{-2k\pi t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Hieraus folgt:

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e^{-2\pi t} - e^{-2k\pi t}) \frac{dt}{t},$$

und da bekanntlich

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-kt}) \frac{dt}{t} = l(k),$$

so ist

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi} l(k).$$

Es bleibt jetzt nur noch  $B_1$  zu suchen; zu welchem Zwecke das Integral

$$\int_0^\infty (e^{-t} - \frac{1}{1+t}) \frac{dt}{t} = C = 0,577\ 215\ 664\ 9$$

dient, welches die bekannte Constante des Integral-Logarithmen giebt. Dieses, mit dem Ausdrucke des  $B_1$  verbunden, giebt

$$B_1 - \frac{1}{2\pi} C = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} + e^{-t} - e^{-2\pi t} \right) \frac{dt}{t},$$

also

$$B_1 - \frac{1}{2\pi} C = \frac{1}{2\pi} l(2\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Dieses letzte Integral hat aber den Werth Null, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man  $t$  in  $\frac{1}{t}$  verwandelt, wodurch es ungeändert bleibt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Also ist endlich

$$B_1 = \frac{1}{2\pi} C + \frac{1}{2\pi} l(2\pi).$$

Da jetzt alle Coefficienten der Reihen-Entwicklung für  $l\Gamma(x)$  gefunden sind, so können wir dieselbe folgendermaassen darstellen:

$$l\Gamma(x) = \frac{1}{2}l(2\pi) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi x) + \frac{1}{4}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{6}(\cos 6\pi x) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi}(C + l(3\pi))(\sin 2\pi x + \frac{1}{2}(\sin 4\pi x) + \frac{1}{3}(\sin 6\pi x) + \dots)$$

$$+ \frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x + \frac{1}{2}l(2)\sin 4\pi x + \frac{1}{3}l(3)\sin 6\pi x + \dots)$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ . Anstatt der beiden ersten Reihen kann man auch die bekannten Summenausdrücke derselben setzen und erhält

$$l\Gamma(x) - \frac{1}{2}l(2\pi) + \frac{1}{2}l(2\sin\pi x) - (C + l(2\pi))(1-2x) \\ = \frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x + \frac{1}{2}l(2)\sin 4\pi x + \frac{1}{3}l(3)\sin 6\pi x + \dots),$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ .

Aus dieser Reihen-Entwicklung findet sich nun die erwähnte Hauptformel für die Function Gamma durch Verwandlung des  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$ ,  $x + \frac{2}{n}$ , ...,  $x + \frac{n-1}{n}$ , und durch Addition dieser Gleichungen. Diese Operation giebt

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) \\ = \frac{1}{2}nl(2\pi) + \frac{1}{2}n(\frac{\cos 2n\pi x}{n} + \frac{\cos 4n\pi x}{2n} + \frac{\cos 6n\pi x}{6n} + \dots) \\ + \frac{n}{\pi}(C + l(2\pi))(\frac{\sin 2n\pi x}{n} + \frac{\sin 4n\pi x}{2n} + \frac{\sin 6n\pi x}{6n} + \dots) \\ + \frac{n}{\pi}(\frac{l(n)}{n}\sin 2n\pi x + \frac{l(2n)}{2n}\sin 4n\pi x + \frac{l(3n)}{3n}\sin 6n\pi x + \dots),$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{n}$ . Subtrahirt man hiervon  $l\Gamma(nx)$ , so bleibt

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) - l\Gamma(nx) \\ = \frac{1}{2}(n-1)l(2\pi) + \frac{l(n)}{\pi}(\sin 2n\pi x + \frac{1}{2}(\sin 4n\pi x) + \frac{1}{3}(\sin 6n\pi x) + \dots);$$

und wenn für diese Reihe wieder der bekannte Summen-Ausdruck gesetzt wird, so erhält man

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) - l\Gamma(nx) \\ = \frac{1}{2}(n-1)l(2\pi) + \frac{1}{2}(1-2nx)l(n).$$

Geht man endlich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die gesuchte Formel

$$\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{n})\Gamma(x + \frac{2}{n}) \dots \Gamma(x + \frac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot n^{\frac{1}{2}(1-2nx)} \Gamma(nx).$$

Nach der oben ausgeführten Herleitung dieser Formel ist deren Gültigkeit zwar nur in den Grenzen  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{n}$  bewiesen: es ist aber damit zugleich die Allgemeingültigkeit gegeben, da vermöge der Fundamental-Eigenschaft  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  die Formel bei der Verwandlung des  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$  ungeändert bleibt.