

Lineale Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen.

Von **F. Spath** in Trient.

(In analytischer Behandlung.)

Einleitung.

Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construieren, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind, fasst nach der von Staudt'schen Theorie der imaginären Elemente drei besondere Fälle in sich: die Punkte können sämmtlich reell sein; es können drei reelle Punkte und ein Paar complex conjugierter, es können endlich ein reeller Punkt und zwei Paare complex conjugierter gegeben sein. Im ersten Falle gibt der Pascal'sche Satz eine Lösung der Aufgabe; sind A, B, C, D, E die fünf Punkte, ist g eine beliebige Gerade durch A und ist X der zweite Curvenpunkt auf g , so liegen nach dem genannten Satze die Schnittpunkte H, J, K je zweier Gegenseiten des einfachen Sechseckes $AXBCDE$ auf einer Geraden:

$$\begin{array}{ccc} AX \} H & XB \} J & BC \} K \\ CD \} & DE \} & EA \} \end{array}$$

Es ist somit der Punkt X als Schnittpunkt der Geraden g und BJ mit Hilfe des Lineals allein construirt. In den beiden anderen Fällen wird die Aufgabe von Prof. Dr. E. Weyr in seinen Elementen der projectivischen Geometrie (II. Heft, pag. 157 ff.) durch Zurückführung auf den ersten Fall gelöst, und zwar im zweiten Falle durch eine lineare, im dritten durch eine quadratische Construction. Bei dieser Lösung wird von der Definition der imaginären Elemente weiter kein Gebrauch gemacht. Es ist nun zweckmäßig, den Begriff der complexen Elemente in der Geometrie nicht nur zur einheitlichen Fassung mehrerer sonst verschieden lautender Sätze oder Aufgaben zu verwenden, sondern denselben bei der Lösung der Aufgabe wirklich zu verwerthen. Man kann ja vermöge der bekannten Erweiterung der Begriffe: Verbindungslinie und Schnittpunkt, auf imaginäre

Elemente die Pascal'sche Construction auch auf den zweiten und dritten der obgenannten Fälle anwenden; denn die Giltigkeit des Pascal'schen Satzes in diesem erweiterten Sinne ergibt sich in der analytischen Geometrie durch genau dieselbe Schlussweise, wie die des gewöhnlichen Pascal'schen Satzes.

Die mechanische Anwendung des genannten Satzes auf unsere zwei Aufgaben würde zu verwickelten Constructionen führen; man würde sofort auf die bekanntlich quadratischen Constructionen von Verbindungslinien imaginärer Punkte und Schnittpunkten imaginärer Geraden stoßen. Erwägt man nun, dass, solange der zweite Curvenpunkt einer durch den reellen Punkt A gehenden reellen Geraden gesucht wird, die besagte Construction auf einen und nur einen Punkt X führt, so wird die Vermuthung nahe liegen, dass die quadratischen Hilfsconstructionen vermieden werden können. Bei gehöriger Berücksichtigung der auftretenden Beziehungen ergibt sich in der That eine lineale Construction des Punktes X . Diese Beziehungen sind aber, besonders in der zweiten Aufgabe, nicht so naheliegend; um sie zu übersehen, bedürfen wir des leitenden Fadens der analytischen Geometrie. Es rührt dieser Gedanke von Prof. Dr. Otto Stolz in Innsbruck her. Bereits im Jahre 1886 theilte Stolz in seinen Vorlesungen über neuere analytische Geometrie je eine Lösung der beiden Aufgaben mit (s. u.) unter Andeutung des Weges, auf dem man dazu gelangt, und forderte mich auf, mich an der Herstellung der Beweise zu versuchen. Das Ergebnis dieses Versuches übergebe ich nun, von meinem verehrten Lehrer dazu aufgefordert, der Öffentlichkeit.

Zuvor muss jedoch der von Stolz in seinen Vorlesungen gepflegten analytischen Behandlung der imaginären Elemente gedacht werden, die er im IV. Bande der mathematischen Annalen bekannt gegeben hat. Die geometrische Deutung der imaginären Elemente in der Ebene wird auf analytischem Wege durch den Gedanken vermittelt, dass die Bedeutung der homogenen Coordinaten eines Punktes oder einer Geraden bei der Multiplication mit einer beliebigen, also auch complexen Constanten ungeändert bleibt. Hat man für die homogenen Coordinaten eines Punktes $\varrho x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $\varrho x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, $\varrho x_3 = \alpha_3 + \beta_3 i$, so liegt es nahe, das reelle Punktepaar $A(\alpha_1 | \alpha_2 | \alpha_3)$, $B(\beta_1 | \beta_2 | \beta_3)$, zum complexen Punkte in Beziehung zu setzen. Da nun:

$$\varrho(\sigma + \tau i)x_r = \sigma\alpha_r - \tau\beta_r + i(\sigma\beta_r + \tau\alpha_r), \quad (r = 1, 2, 3),$$

so kann der complexe Punkt mit den Coordinaten $\varrho x_r = \alpha_r + \beta_r i$ dem Complexe von reellen Punktepaaren mit den Coordinaten $\sigma\alpha_r - \tau\beta_r$ und $\tau\alpha_r + \sigma\beta_r$ ($r = 1, 2, 3$) zugeordnet werden, wobei σ, τ alle reellen Werte durchlaufen. Diese Punktepaare sind aber die Paare einer auf der Geraden AB gelegenen elliptischen Involution, deren Doppelpunkte die Coordinaten $\alpha_r \pm i\beta_r$ besitzen.

Die Unterscheidung der beiden derselben Involution zugeordneten complex conjugierten Punkte erfolgt nach der von Staudt'schen Theorie, und zwar wird der im Sinne des Punktes M_k ($q x_r = \alpha_r + k\beta_r$) bei wachsendem k beschriebenen Involution der Punkt $\alpha_r + i\beta_r$, bei abnehmendem k der Punkt $\alpha_r - i\beta_r$ zugeordnet. Dieselben Bemerkungen lassen sich an die Gleichung des Punktes und der Geraden anknüpfen; die folgenden Rechnungen stützen sich auf eben diesen Umstand.

I. Aufgabe.

Der Kegelschnitt ist durch drei reelle Punkte B, C, D und einem Paar complex conjugierter $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ bestimmt; es soll der zweite Curvenpunkt X der reellen, durch B gehenden Geraden g construiert werden.

Im folgenden sollen reelle Punkte stets durch große lateinische, complexe durch große deutsche Buchstaben bezeichnet werden, und zwar complex conjugierte Punkte durch denselben Buchstaben mit und ohne Sternchen.

Wir wenden auf das Sechseck \mathfrak{A}^*CBXD den Pascal'schen Satz an.

$$\left. \begin{matrix} \mathfrak{A}^*C \\ BX \end{matrix} \right\} H \quad \left. \begin{matrix} \mathfrak{A}^*C \\ XD \end{matrix} \right\} \mathfrak{Z} \quad \left. \begin{matrix} CB \\ D\mathfrak{A} \end{matrix} \right\} \mathfrak{R}.$$

Die Punkte $H\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ liegen auf einer Geraden. Die lineale Construction der Geraden DX lässt sich hier auch ohne Hilfe der analytischen Geometrie finden. Zunächst können wir aus dem Bestehen des Pascal'schen Satzes auf folgenden Satz schließen.

Wird der complexe Punkt \mathfrak{R} mit H , einem Punkte des reellen Trägers von \mathfrak{A} , und der Punkt \mathfrak{A}^* mit einem Punkte C des reellen Trägers (BC) von \mathfrak{R} verbunden, so geht der reelle Träger (XD) des Schnittpunktes \mathfrak{Z} der beiden Verbindungslinien durch den reellen Punkt D der Verbindungslinie $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$. (Dieser Satz fällt zusammen mit dem auf die Punkte $H, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*; C, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}$ angewandten Satze von Pappus, nach welchem die Schnittpunkte:

$$\left. \begin{matrix} H\mathfrak{R} \\ C\mathfrak{A}^* \end{matrix} \right\} \mathfrak{Z} \quad \left. \begin{matrix} H\mathfrak{R}^* \\ C\mathfrak{A} \end{matrix} \right\} \mathfrak{Z}^* \quad \left. \begin{matrix} \mathfrak{A}\mathfrak{R} \\ \mathfrak{A}^*\mathfrak{R}^* \end{matrix} \right\} D$$

auf einer Geraden liegen.)

Um diesen Satz unmittelbar einzusehen, haben wir die Strahlen aufzusuchen, welche in den Involutionen $C\mathfrak{A}^*$, bezw. $H\mathfrak{R}$ dem gemeinsamen Strahle CH conjugiert sind. Dem Punkte C sei in der Involution \mathfrak{R} auf BC der Punkt C' conjugiert. Schneidet DC die Gerade \mathfrak{A}^* in E , ist E' in der Involution \mathfrak{A} dem Punkte E , H' dem Punkte H zugeordnet, so ist \mathfrak{A}^*

definiert durch die Punktepaaire HH' , EE' ; stimmt außerdem der Sinn von \mathfrak{A}^* mit dem durch die Punkte $HH'E$ definierten Sinne überein, so ist der Sinn von \mathfrak{A} durch die Aufeinanderfolge $EE'H$ bestimmt. Die Schnittpunkte von BC mit den Strahlen $D(E'E'HH')$ in dieser Aufeinanderfolge definieren den Punkt \mathfrak{R} . Ist H_1 der dritte, H'_1 der vierte der genannten Schnittpunkte:

$$\left. \begin{array}{l} BC \\ DH \end{array} \right\} H_1, \quad \left. \begin{array}{l} BC \\ DH' \end{array} \right\} H'_1,$$

so ist die Gerade $H\mathfrak{R}$ durch die Strahlen $H(CC'H_1H'_1)$ oder $H(CC'DH'_1)$, und zwar in dieser Folge definiert. Da die Doppelverhältnisse $C(HH'EE')$ und $H(CC'DH'_1)$ gleich sind, so liegen auf einer Geraden die Schnittpunkte der Strahlenpaare

$$\left. \begin{array}{l} CH' \\ C'H \end{array} \right\} J, \quad \left. \begin{array}{l} CE \\ HD \end{array} \right\} D, \quad \left. \begin{array}{l} CE' \\ HH'_1 \end{array} \right\}$$

Diese Gerade ist der reelle Träger des Schnittpunktes \mathfrak{R} der complexen Geraden \mathfrak{A}^* , $H\mathfrak{R}$ und geht also durch die Punkte D und J . Die Construction des Punktes X ist also folgende: „Schneidet Bg den Träger der complexen Punkte \mathfrak{A}^* in H , CD denselben in E , sind H' , bezw. E' die in der Involution \mathfrak{A} conjugierten Punkte, so suche man die Schnittpunkte:

$$\left. \begin{array}{l} DE' \\ BC \end{array} \right\} C', \quad \left. \begin{array}{l} HC' \\ H'C \end{array} \right\} J.$$

Die Gerade DJ schneidet g im gesuchten Punkte X .“ Es ist dies die von Stolz angegebene Construction.

Es möge noch kurz erwähnt werden, dass diese Construction eine andere Deutung zulässt. Der Punkt J beschreibt bei der Drehung des Strahles g um B einen Kegelschnitt, welcher die Punkte $CD\mathfrak{A}^*C'$ enthält. Schneidet eine Sehne durch den gemeinsamen Punkt C der beiden Kegelschnitte dieselben in B , bezw. C' , eine Sehne durch den gemeinschaftlichen Punkt D dieselben in X , bezw. J , so liegt der Schnittpunkt (H) der Geraden BX und $C'J$ auf der Verbindungslinie der beiden anderen gemeinschaftlichen Punkte \mathfrak{A} , \mathfrak{A}^* der beiden Kegelschnitte.

Die einfachen Sechsecke $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*BXCD$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*XBCD$ liefern in ähnlicher Weise lineale Constructionen.

Wir gehen nun dazu über, die erste Construction auf analytischem Wege zu gewinnen. Im folgenden sollen kleine lateinische Buchstaben complexe Zahlen, griechische nur reelle Zahlen bedeuten. Der analytischen Darstellung legen wir ein

trimetrisches Coordinatensystem x_1, x_2, x_3 zugrunde, dessen Fundamentalpunkte zur Vereinfachung der Gleichungen zweckentsprechend angenommen werden. Schneidet BC den reellen Träger des Punktes \mathfrak{A} in B_3 , ist B_2 zu B_3 conjugiert, so sei $B B_2 B_3$ das Coordinatendreieck. Die analytische Darstellung der gegebenen Elemente ist dann die folgende:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}: & x_1 = 0 & x_3 + \mu i x_2 = 0 \\ \mathfrak{A}^*: & x_1 = 0 & x_3 - \mu i x_2 = 0 \\ B: & x_2 = 0 & x_3 = 0 \\ C: & x_2 = 0 & x_3 + \alpha x_1 = 0 \\ D: & \varrho x_1 = \eta_1, & \varrho x_2 = \eta_2, & \varrho x_3 = \eta_3, & \eta_1 \geq 0, & \eta_2 \geq 0 \\ Bg: & x_3 + \beta x_2 = 0. \end{aligned}$$

Es ist die analytische Darstellung der Punkte $H, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}$ zu suchen:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* \\ BX \end{array} \right\} H & \left. \begin{array}{l} BC \\ D\mathfrak{A} \end{array} \right\} \mathfrak{R} & \left. \begin{array}{l} C\mathfrak{A}^* \\ DX \end{array} \right\} \mathfrak{Z} \\ & \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 + \beta x_2 = 0 \end{array} \right\} H & \left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ (\eta_3 + \mu i \eta_2) x_1 - \eta_1 (x_3 + \mu i x_2) = 0 \end{array} \right\} \mathfrak{R} \\ H\mathfrak{R}: & \left. \begin{array}{l} (\eta_3 + \mu i \eta_2) x_1 - \eta_1 (x_3 + \beta x_2) \\ \equiv [(\eta_3 + \mu i \eta_2) x_1 - \eta_1 (x_3 + \mu i x_2)] + \eta_1 (\mu i - \beta) x_2 = 0 \end{array} \right\} \mathfrak{Z} \\ C\mathfrak{A}^*: & \alpha x_1 + x_3 - \mu i x_2 = 0 \\ D\mathfrak{Z}X: & \eta_1 \eta_2 (\mu i - \beta) (\alpha x_1 + x_3 - \mu i x_2) - \\ & - (\alpha \eta_1 + \eta_3 - \mu i \eta_2) [(\eta_3 + \mu i \eta_2) x_1 - \eta_1 (x_3 + \beta x_2)] = 0. \end{aligned}$$

$D\mathfrak{Z}$ ist wirklich eine reelle Gerade, denn der Coefficient von μi in der Gleichung ist:

$$\eta_1 \eta_2 [(\alpha x_1 + x_3) + \beta x_2] - \alpha \eta_1 \eta_2 x_1 - \eta_1 \eta_2 (x_3 + \beta x_2) \equiv 0.$$

$D\mathfrak{Z}X$ geht durch den Schnittpunkt der Geraden, deren Gleichungen durch die reellen Theile folgender Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} & (\mu i - \beta) (\alpha x_1 + x_3 - \mu i x_2) = 0 \\ & (\alpha \eta_1 + \eta_3 - \mu i \eta_2) [(\eta_3 + \mu i \eta_2) x_1 - \eta_1 (x_3 + \beta x_2)] = 0. \end{aligned}$$

Der reelle und der imaginäre Theil der ersten Gleichung stellen conjugierte Gerade der Involution $C\mathfrak{A}^*$ dar, u. zwar schneidet die letztere Gerade

$$\alpha x_1 + x_3 + \beta x_2 = 0$$

die Gerade $x_1 = 0$ in H . Der reelle Theil der ersten Gleichung stellt also die Gerade CH' dar.

Der reelle und imaginäre Theil der zweiten Gleichung stellen conjugierte Gerade h, h' der Involution $H\mathfrak{Q}$ dar; diese Involution erhielten wir aus $D\mathfrak{A}$, indem wir den Schnittpunkt von $D\mathfrak{A}$ und BC mit H verbanden; verbinden wir statt dessen mit H den Schnittpunkt von BC und der Geraden, deren Gleichung durch den reellen oder imaginären Theil von

$$(\alpha\eta_1 + \eta_3 - \mu i\eta_2) [(\eta_3 + \mu i\eta_2)x_1 - \eta_1(x_3 + \mu i x_2)] = 0$$

gegeben ist, so erhalten wir die Geraden h, h' . Der imaginäre Theil der zuletzt angeschriebenen Gleichung ist:

$$\begin{aligned} \eta_2(\eta_1 x_3 - \eta_3 x_1) - (\alpha\eta_1 + \eta_3)(\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2) &= 0 \\ (\alpha\eta_1 + \eta_3)x_2 - \eta_2(\alpha x_1 + x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Er stellt die Gerade CDE dar, daher stellt der reelle Theil jener Gleichung die Gerade DE' dar. Ist C' der Schnittpunkt von BC mit DE' , so ist HC' die Gerade h , womit sich für die Gerade DX die oben angegebene Construction ergibt.

Eine andere Construction können wir aus der Gleichung von DX herleiten, wenn wir den Schnittpunkt K dieser Geraden mit $x_1 = 0$ suchen. Durch K geht nämlich auch die Gerade, deren Gleichung mit dem reellen Theil der folgenden übereinstimmt:

$$\begin{aligned} &\eta_1 \eta_2 (\mu i - \beta) (\alpha x_1 + x_3 - \mu i x_2) + (\alpha\eta_1 + \eta_3 - \mu i\eta_2) \eta_1 (x_3 + \beta x_2) \\ &\equiv \eta_1 (\mu i - \beta) [\eta_2 (\alpha x_1 + x_3 - \mu i x_2) - (\alpha\eta_1 + \eta_3 - \mu i\eta_2) x_2] + \\ &\quad + \eta_1 (\alpha\eta_1 + \eta_3 - \mu i\eta_2) (x_3 + \mu i x_2) = 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Darstellung folgt, dass die gesuchte Gerade durch den Schnittpunkt M von CH' mit BH geht, aus der zweiten, dass sie durch den Schnittpunkt N von CD mit BE' geht. Daraus ergibt sich folgende Construction: Haben H, H', E, E' dieselbe Bedeutung wie in der ersten Construction, so suche man die Schnittpunkte:

$$\left. \begin{array}{l} CH' \\ BH \end{array} \right\} M \quad \left. \begin{array}{l} CD \\ BE' \end{array} \right\} N \quad \left. \begin{array}{l} MN \\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* \end{array} \right\} K$$

DK schneidet g in X .

II. Aufgabe.

Von einem Kegelschnitte sind zwei Paare complex conjugierter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*$ und ein reeller Punkt C gegeben.

Es soll der zweite Curvenpunkt auf einer beliebigen durch C gehenden reellen Geraden g construiert werden.

Es sei B_3 der Schnittpunkt der reellen Träger der Punkte \mathfrak{A} , \mathfrak{B} ; B_2 und B_1 seien demselben in den Involutionen \mathfrak{A} , bezw. \mathfrak{B} conjugiert. B_1 , B_2 , B_3 seien die Eckpunkte des Coordinatendreiecks. Dann ist die analytische Darstellung der gegebenen Elemente:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} & x_1 = 0 & x_3 + \mu i x_2 = 0 \\ \mathfrak{A}^* & x_1 = 0 & x_3 - \mu i x_2 = 0 \\ \mathfrak{B} & x_2 = 0 & x_3 + \nu i x_1 = 0 \\ \mathfrak{B}^* & x_2 = 0 & x_3 - \nu i x_1 = 0 \\ C & \varrho x_1 = \eta_1, \quad \varrho x_2 = \eta_2, \quad \varrho x_3 = \eta_3 & \eta_1 \geq 0 \quad \eta_2 \geq 0 \\ Cg & (\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) x_3 - \eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2) = 0 \end{array}$$

Nach dem auf das Sechseck $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*CX$ angewandten P a s c a l'schen Satze liegen auf einer Geraden die Punkte \mathfrak{H} , \mathfrak{I} , \mathfrak{K} :

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* \\ \mathfrak{B}^*C \end{array} \right\} \mathfrak{H} \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}^*\mathfrak{B} \\ CX \end{array} \right\} \mathfrak{I} \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{B}\mathfrak{B}^* \\ X\mathfrak{A} \end{array} \right\} \mathfrak{K}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* \quad x_1 = 0 \\ C\mathfrak{B}^* \quad (\eta_3 - \nu i \eta_1) x_2 - \eta_2 (x_3 - \nu i x_1) = 0 \end{array} \right\} \mathfrak{H}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A}^*\mathfrak{B} \quad x_3 - \mu i x_2 + \nu i x_1 = 0 \\ Cg \quad (\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) x_3 - \eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2) = 0 \end{array} \right\} \mathfrak{I}$$

$$\mathfrak{H}\mathfrak{I} \quad a[(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) x_3 - \eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2)] + b(x_3 - \mu i x_2 + \nu i x_1) \\ \equiv c[(\eta_3 - \nu i \eta_1) x_2 - \eta_2 (x_3 - \nu i x_1)] + d x_1 = 0$$

Die Constanten a , b sind so zu bestimmen, dass die Gleichung durch $x_1 = 0$, $x_2 = \eta_2$, $x_3 = \eta_3 - \nu i \eta_1$ befriedigt wird.

$$a[(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) (\eta_3 - \nu i \eta_1) - \eta_2 \eta_3 \beta] = -b[\eta_3 - \mu i \eta_2 - \nu i \eta_1].$$

Setzt man in die beiden Gleichungsformen für $\mathfrak{H}\mathfrak{I}$ $x_1 = 0$, $x_3 = \mu i x_2$ ein, so erhält man:

$$a[(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) \mu i - \beta \eta_3] = c[\eta_3 - \nu i \eta_1 - \mu i \eta_2].$$

Die Constante d kann man bestimmen, indem man $x_r = \eta_r$ einsetzt; wir brauchen d jedoch nicht.

Wir haben also für $\mathfrak{H}\mathfrak{I}$ die Gleichung:

$$(\eta_3 - \mu i \eta_2 - \nu i \eta_1) [(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) x_3 - \eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2)] - [\alpha \eta_1 \eta_3 - \\ - \nu \eta_1 i (\alpha \eta_1 + \beta \eta_2)] (x_3 - \mu i x_2 + \nu i x_1) \\ \equiv [\beta \eta_3 - \mu i (\alpha \eta_1 + \beta \eta_2)] \cdot [\eta_2 (x_3 - \nu i x_1) - (\eta_3 - \nu i \eta_1) x_2] + d x_1 = 0.$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit $x_2 = 0$ ist der Punkt \mathfrak{R} .

$$\begin{aligned} \mathfrak{AR} \{ [\beta\eta_3 - \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] \cdot [\eta_2(x_3 - \nu i x_1) - (\eta_3 - \nu i \eta_1)x_2] + d x_1 \} + \\ + [\beta\eta_3 - \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] [\mu i \eta_2 + \eta_3 - \nu i \eta_1] x_2 \\ \equiv [\beta\eta_3 - \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] \eta_2 (x_3 + \mu i x_2) + \varepsilon x_1 = 0. \end{aligned}$$

Der Coefficient von $\mu i \eta_2$ in dieser Gleichung ist, wie aus der letzten Form derselben folgt:

$$\beta\eta_3 x_2 - (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) x_3 + \varepsilon x_1.$$

Die Constante ε ist der Coefficient von $\mu i \eta_3 x_1$ in der Gleichung von \mathfrak{B} :

$$\begin{aligned} \mu i \eta_2 \varepsilon &= \alpha\eta_3 (\mu i \eta_2 + \nu i \eta_1) - \nu i \alpha\eta_1 \eta_3 = \alpha\eta_2 \eta_3 \mu i \\ \varepsilon &= \alpha\eta_3 \end{aligned}$$

Der imaginäre Theil der Gleichung von \mathfrak{AR} ist also:

$$\eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) x_3 = 0.$$

Es ist die Gleichung von CgX . Der reelle Punkt der Geraden \mathfrak{AR} liegt also auf Cg : es ist der gesuchte Punkt X . Durch ihn gehen alle Strahlen der Involution \mathfrak{AR} , also auch die Gerade h , deren Gleichung mit dem reellen Theile der Gleichung für \mathfrak{AR} übereinstimmt. Schneidet g die Gerade $x_1 = 0$ in G_1 und ist G'_1 in der Involution \mathfrak{A} zu G_1 conjugiert, so geht h durch G'_1 . Ist G_2 der Schnittpunkt von g mit $x_2 = 0$, G'_2 der zu G_2 in der Involution \mathfrak{B} , G''_2 der zu G_2 in der Involution \mathfrak{R} conjugierte Punkt, so geht h durch G''_2 . Durch G''_2 geht, wie aus der analytischen Darstellung von \mathfrak{R} ersichtlich ist, auch die Gerade, deren Gleichung mit dem reellen Theile der folgenden übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \eta_3 [(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) x_3 - \eta_3 (\alpha x_1 + \beta x_2)] - \\ - [\alpha\eta_1 \eta_3 - \nu \eta_1 i (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] (x_3 + \nu i x_1) = 0. \end{aligned}$$

Die letztgenannte Gerade geht durch den Schnittpunkt K von Cg mit $B_2 G'_2$ und den Schnittpunkt L von $x_1 = 0$ mit $\eta_2 x_3 - \eta_3 x_2 = 0$, das ist mit CB_1 . Der erste Theil dieser Behauptung folgt daraus, dass der imaginäre Theil der Gleichung:

$$[\alpha\eta_3 - \nu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] (x_3 + \nu i x_1) = 0$$

die Gerade $B_2 G_2$ darstellt.

Wir erhielten somit folgende Construction. „Sind G_1 und G_2 die Schnittpunkte von Cg mit \mathfrak{A}^* , beziehungsweise \mathfrak{B}^* , ist B_3 der Schnittpunkt von \mathfrak{A}^* mit \mathfrak{B}^* ,

ist ferner der complexe Punkt \mathfrak{A} durch die Punktepaare $B_3 B_2, G_1 G_1'$, der Punkt \mathfrak{B} durch die Punktepaare $B_3 B_1, G_2 G_2'$ definiert: so suche man die Schnittpunkte:

$$\left. \begin{matrix} Cg \\ B_2 G_2' \end{matrix} \right\} K \quad \left. \begin{matrix} B_2 B_3 \\ CB_1 \end{matrix} \right\} L \quad \left. \begin{matrix} B_1 B_3 \\ KL \end{matrix} \right\} G_2''$$

$G_2'' G_3'$ schneidet g im gesuchten Punkte x .

Eine andere Construction erhalten wir, wenn wir in den Involutionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ je den zu B_3 conjugierten Punkt suchen; der erste ist B_2 , der zweite sei B_3' . Multipliciert man die Gleichung von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\beta\eta_3 + \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)$, so stellt der imaginäre Theil der erhaltenen Gleichung eine durch B_3 gehende Gerade dar. Der reelle Theil stellt also die gerade $B_2 B_3'$ dar. Um den Punkt B_3' zu erhalten, haben wir die Gleichung von $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ mit demselben Coefficienten $\beta\eta_3 + \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)$ zu multiplicieren und den reellen Theil der so erhaltenen Gleichung zu deuten. Diese Gleichung stellt sich uns in zwei Formen dar:

$$\begin{aligned} & f \cdot [(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)x_3 - \eta_3(\alpha x_1 + \beta x_2)] - \\ & - [\alpha\eta_1\eta_3 - \nu\eta_1 i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)][\beta\eta_3 + \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)] \cdot \\ & \cdot (x_3 - \mu i x_2 + \nu i x_1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\text{u. } [(\beta\eta_3)^2 + \mu^2(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)^2][\eta_2(x_3 - \nu i x_1) - (\eta_3 - \nu i \eta_1)x_2] + b'x_1 = 0. \quad (\text{II})$$

Aus (II) ist ersichtlich, dass der gesuchte Strahl der Involution $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ durch den Schnittpunkt L von CB_1 mit $B_2 B_3$ geht. Um die Form (I) zu deuten, beachten wir, dass der imaginäre, beziehungsweise reelle Theil von

$$[\alpha\eta_1\eta_3 - \nu\eta_1 i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)](x_3 + \nu i x_1) = 0$$

mit $x_2 = 0$ die Coordinaten von G_2 , beziehungsweise G_2' liefert, der imaginäre, beziehungsweise reelle Theil von

$$[\beta\eta_3 + \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)](x_3 - \mu i x_2) = 0$$

mit $x_1 = 0$ die Coordinaten von G_1 , beziehungsweise G_1' . Der reelle Theil des Ausdruckes

$$[\alpha\eta_3 - \nu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)][\beta\eta_3 + \mu i(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)](x_3 - \mu i x_2 + \nu i x_1)$$

ist:

$$\begin{aligned} & \alpha\beta\eta_3^2 x_3 + \alpha\eta_3(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)\mu^2 x_2 + \beta\eta_3(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)\nu^2 x_1 + \\ & + \mu\nu[(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)x_3 - \eta_3(\alpha x_1 + \beta x_2)](\alpha\eta_1 + \beta\eta_2). \end{aligned}$$

Wir können somit den reellen Theil von (I) auch in folgender Form schreiben:

$$f'' \cdot [(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)x_3 - \eta_3(\alpha x_1 + \beta x_2)] - \\ - \eta_3[\alpha\beta\eta_3 x_3 + \alpha(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)\mu^2 x_2 + \beta(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)\nu^2 x_1] = 0.$$

Der zweite Theil gleich Null gesetzt ist die Gleichung von $G'_1 G'_2$. Die gesuchte Gerade von §3 geht also durch den Schnittpunkt G von g mit $G'_1 G'_2$.

Wir erhalten also folgende Construction von X . „Haben $B_1 B_2 B$, G_1, G'_1, G_2, G'_2 die oben angegebene Bedeutung, so suche man die Schnittpunkte:

$$\begin{array}{ccc} CB_1 \setminus L & Cg \setminus G & GL \setminus B_3 \\ B_2 B_3 \setminus & G'_1 G'_2 \setminus & B_1 B_3 \setminus \end{array}$$

Die Gerade $B_2 B'_3$ schneidet g im gesuchten Punkte X .

Diese Construction ist die von Stolz angegebene.

