

## Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen.

Von

C. CARATHÉODORY in Göttingen.

## Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	450

## Kapitel I.

**Die Verteilung der starken Extremalen in der Umgebung eines Punktes.\*)**

§ 1. Zurückführung der Fragestellung auf diejenige bei positiv definiten Variationsproblemen . . . . .	453
§ 2. Die Indikatrix und ihre Eigenschaften . . . . .	456
§ 3. Bestimmung der starken Extremalen, die durch einen Punkt gehen . . . . .	461
§ 4. Die diskontinuierlichen Lösungen des Variationsproblems . . . . .	464
§ 5. Der Satz von der Vertauschung der starken Extrema . . . . .	465
§ 6. Existenz eines Feldes von starken diskontinuierlichen Lösungen . . . . .	474
§ 7. Anwendung der Weierstraßschen Theorie auf starke diskontinuierliche Extremalenstücke . . . . .	478
§ 8. Das Büschel der starken Extremalen durch einen Punkt . . . . .	481
§ 9. Der Osgoodsche Satz . . . . .	490

## Kapitel II.

**Die aller kürzesten Wege innerhalb eines gegebenen Gebietes.**

§ 10. Die Existenz einer Grenzkurve . . . . .	493
§ 11. Anwendung auf Variationsprobleme . . . . .	496
§ 13. Eigenschaften des Randes . . . . .	499
§ 13. Bemerkungen über nicht definite Variationsprobleme . . . . .	502

---

\*) Die Paragraphen 2, 4, 6 und 7 sind im wesentlichen meiner Dissertation „Über die diskontinuierlichen Lösungen der Variationsrechnung“ (Göttingen 1904) entnommen.

## Einleitung.

Bei der Untersuchung von Variationsproblemen kann man sich auf drei voneinander prinzipiell verschiedene Standpunkte stellen.

Mathematisch am einfachsten zu behandeln ist die Frage nach dem Verschwinden der ersten Variation. Diese Art, das Problem zu stellen, steht im Vordergrund in der Mechanik, der Optik und der Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Durch die Arbeiten von Euler und Lagrange ist diese Theorie der ersten Variation entstanden und in erschöpfender Weise ausgebaut worden.

In zweiter Linie kommt die Frage nach den Extremumseigenschaften dieser „stationären“ Kurven und Flächen (d. h. derjenigen, die durch die Euler-Lagrangesche Methode geliefert werden). Die analytische Behandlung dieses Problems, die durchweg auf der Berücksichtigung der ersten Glieder von Taylorschen Entwicklungen beruht, hat zur naturgemäßen Folge, daß die bezüglichen Aussagen auf die Nachbarschaft der stationären Gebilde beschränkt werden müssen. Nach den Untersuchungen von Legendre und Jacobi sind es bekanntlich diejenigen von Weierstraß, welche diese Fragen, mindestens bei der Variation eines Kurvenintegrals in der Ebene, vollkommen erledigt haben.

Die Weierstraßsche Theorie führt dazu, zwei Arten von Nachbarschaften von Kurven zu unterscheiden, die man als die *weitere* und die *engere* Nachbarschaft bezeichnet.\*). Hierunter ist folgendes zu verstehen:  $\varepsilon$  und  $\eta$  seien zwei beliebige aber festzuhaltende positive Größen. Können wir die gegebenen Kurven so aufeinander abbilden, daß entsprechende Punkte um weniger als  $\varepsilon$  voneinander entfernt sind und die Neigungswinkel entsprechender Tangenten um weniger als  $\eta$  voneinander abweichen, so liegt eine engere Nachbarschaft vor. Ist dagegen nur ersteres möglich, so reden wir von einer weiteren Nachbarschaft.

Wenn man nun ein Stück einer stationären Kurve untersucht, so sind zwei Fälle möglich. Entweder ist das betreffende Kurvenintegral, längs eines solchen Kurvenstückes genommen, ein Minimum, wenn man zum Vergleich Kurven mit denselben Endpunkten heranzieht, die in einer gewissen weiteren Nachbarschaft der ersten liegen; oder man muß sich auf Kurven beschränken, welche einer engeren Nachbarschaft jener angehören. Im ersten Falle sagt man, daß die Kurve ein *starkes*, im zweiten, daß sie ein *schwaches* Extremum liefert. Da für hinreichend kleine Stücke einer regulären stationären Kurve immer mindestens ein schwaches Extremum eintritt, hat Kneser diese Kurven *Extremalen* genannt. Dem

\*) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900, pag. 54.

eben gesagten entsprechend wollen wir die Extremalenstücke kurz in *starke* und *schwache* unterscheiden.

Wir kommen endlich zu den Fragen der dritten Kategorie, denen diese Abhandlung besonders gewidmet ist; die Variationsrechnung verdankt Problemen dieser letzten Art (die in ganz einfachen Fällen, wie dem der kürzesten Linie, schon seit dem Altertume gelöst waren) ihren Ursprung. Hier gibt man sich *a priori* ein Gebiet  $T$  und sucht zwei Punkte dieses Gebietes durch eine Kurve, die  $T$  nicht verläßt, so zu verbinden, daß ein gegebenes Kurvenintegral — längs dieser Kurve genommen — kleiner ist als für eine beliebige andere Kurve von  $T$  mit denselben Endpunkten. Für spezielle Probleme kann unter Umständen die Weierstraßsche Methode auch hier zum Ziele führen. Der erste aber, der ein auf allgemeine Prinzipien ruhendes Verfahren vorschlug, das zur umfassenden Beantwortung der betreffenden Fragen führen konnte, war D. Hilbert in seiner Arbeit *Über das Dirichletsche Prinzip*.\*)

Hilbert beschränkt sich zwar dort auf die Existenz einer aller-kürzesten geodätischen Linie zwischen zwei Punkten eines regulären Flächenstückes; nach einem nicht ganz befriedigenden Versuche von C. Noble\*\*) wurde aber das Hilbertsche Verfahren durch O. Bolza auch auf allgemeinere Probleme ausgedehnt.\*\*\*) Letzterer erkannte, daß das Gelingen der Hilbertschen Methode von zwei Umständen abhängt. Erstens muß das gegebene Kurvenintegral die Eigenschaft haben, daß der Integrand in jedem Kurvenelemente des Gebietes  $T$  ein und dasselbe Vorzeichen besitzt, d. h., daß das Variationsproblem, wie wir sagen wollen, *definit* ist. Zweitens aber muß sich die Umgebung jedes Punktes von  $T$  mit einem Felde von *starken* Extremalen, welche durch diesen Punkt gehen, eindeutig und lückenlos ausfüllen lassen.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß die zweite dieser Bedingungen, welche Bolza an die Spitze stellt, im wesentlichen eine Folge der ersten ist, wenn man auch solche Lösungen zuläßt, die mit Unstetigkeiten in der Fortschreitungsrichtung ihrer Tangente behaftet sind.

Wir werden nämlich zeigen, daß, nach Adjunktion dieser sogenannten *diskontinuierlichen Lösungen*, die Umgebung eines jeden Punktes  $P$ , wo das Variationsproblem definit ist, sich auf eindeutige Weise mit einem Büschel von starken Extremalen durch  $P$  einfach und lückenlos über-

\*) Jahresber. d. Deutsch. Mathematikerverein., Bd. VIII (1899), p. 184, abgedruckt in Crelles Journ., Bd. 130 (1905). 125.

\*\*) Eine neue Methode in der Variationsrechnung. Diss. Göttingen 1901.

\*\*\*) O. Bolza, Lectures on the Calculus of Variations (Chicago 1904), chap. VII.

decken läßt. Ausnahmen bilden nur solche Punkte, für welche eine der beiden später definierten Invarianten  $\Psi(x, y)$  oder  $\Omega(x, y)$  verschwindet, d. h. Punkte, die im allgemeinen auf Kurven verteilt sind.

Da wir nun ferner auch zeigen werden, daß die Existenz einer einzigen starken Extremalen durch den Punkt  $P$  genügt, um das Problem durch ein äquivalentes zu ersetzen, das in der Umgebung dieses Punktes *definit* ist, so sehen wir, daß die Theorie der starken Extremalen durch die Heranziehung diskontinuierlicher Lösungen vollkommen erledigt werden kann. Die Punkte der Ebene, die bei dem vorgelegten Variationsproblem sich mit einem Büschel von starken Extremalen umgeben lassen, wollen wir der Kürze wegen in dieser Abhandlung *regulär* nennen. Hierin weichen wir von der Terminologie ab, die Bolza\*) im Anschluß an Hilbert benutzt. Bolza nennt nämlich nur solche Punkte regulär, welche sich mit einem Büschel von starken *kontinuierlichen* Extremalen umgeben lassen\*\*) Diese wollen wir *regulär im engeren Sinne* nennen.

Für ein Gebiet, das lauter reguläre Punkte im engeren Sinne enthält, gilt ein Satz, den Osgood\*\*\*) gefunden hat, und der für die Variationsrechnung von höchster Wichtigkeit ist. Viele Schwierigkeiten, welchen man bei der Behandlung von Doppelintegralen begegnet, sind nur dem Umstande zuzuschreiben, daß der betreffende Satz für diese Probleme aufhört richtig zu sein. Der Osgoodsche Satz läßt sich auf reguläre Probleme in unserem Sinne übertragen; um dies in bequemer Weise zu tun, werden wir gewisse Untersuchungen und Resultate von G. A. Bliss†) — in entsprechender Weise modifiziert — zu Hilfe ziehen.

Die Ergebnisse des ersten Kapitels erlauben uns dann, die Hilbertsche Methode ganz allgemein auf positiv definite Probleme anzuwenden, was keine Schwierigkeiten bietet. Dagegen wird im letzten Paragraphen an einem Beispiele gezeigt, daß die Eigenschaft eines Problems, in jedem Punkte eines Gebietes  $T$  regulär zu sein, nicht hinreicht, um auf die Existenz von aller kürzesten Wegen zwischen zwei Punkten dieses Gebietes zu schließen. Die Voraussetzung, daß das Problem definit ist, ist also wesentlich.

\*) a. a. O., pag. 29 und pag. 125.

\*\*) Dies trifft zu, wenn die Weierstraßsche Invariante  $F_1(x, y; \cos \gamma, \sin \gamma)$  für jeden Wert von  $\gamma$  von Null verschieden ist.

\*\*\*) Transactions of the American Mathematical Society, vol. II (1901), p. 273.

†) Transactions of the American Mathematical Society, vol. V (1904), p. 113.

## Kapitel I.

## Die Verteilung der starken Extremalen in der Umgebung eines Punktes.

## § 1.

## Zurückführung der Fragestellung auf diejenige bei positiv definiten Variationsproblemen.

Es sei  $F(x, y; x', y')$  eine eindeutige, reguläre, analytische\*) Funktion ihrer vier Argumente für jeden Punkt eines gewissen Bereiches  $T$  der  $xy$ -Ebene und für jedes endliche Wertepaar von  $x'$  und  $y'$ , das von  $x' = y' = 0$  verschieden ist. Ferner sei  $F$  eine homogene Funktion erster Ordnung ihrer letzten beiden Argumente, d. h. es gelte die Gleichung

$$(1) \quad F(x, y; kx', ky') = kF(x, y; x', y')$$

unter den Voraussetzungen

$$\left. \begin{array}{l} k > 0 \\ x'^2 + y'^2 > 0 \end{array} \right\}$$

Setzt man insbesondere  $x' = \cos \vartheta$ ,  $y' = \sin \vartheta$ , so muß die Funktion  $F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta)$  eine eindeutige periodische Funktion ihres Argumentes  $\vartheta$  mit der Periode  $2\pi$  sein, die für jeden Punkt von  $T$  und für jeden reellen Wert von  $\vartheta$  reell und regulär bleibt.

Es sei endlich durch

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} x = x(t), \quad y = y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array} \right\}$$

eine reguläre analytische Kurve  $C$  dargestellt, die zwei gegebene Punkte  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  des Bereiches  $T$  verbindet und vollständig innerhalb  $T$  verläuft, und es seien durch  $x', y'$  die Ableitungen der Funktionen (2) nach  $t$  bezeichnet.

Dann hat das bestimmte Integral

$$(3) \quad J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y; x', y') dt$$

einen endlichen Wert, der sich wegen der Eigenschaft (1) nicht ändert, wenn man  $t$  durch einen Parameter  $\tau$  ersetzt, der mit  $t$  durch die Beziehungen

$$\tau = \varphi(t)$$

---

\*) Man könnte, indem man die Ausdrucksweise entsprechend modifiziert — ähnlich wie Bolza es in seinem oben zitierten Buche tut —, im allgemeinen nur die Stetigkeit der partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen voraussetzen.

verbunden ist, während die Ungleichung

$$\varphi'(t) > 0$$

im ganzen Intervall  $t_1 \leq t \leq t_2$  gilt.

Es sei ferner bemerkt, daß, da die Funktion  $F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta)$  von  $\vartheta$  zwar die Periode  $2\pi$ , nicht aber die Periode  $\pi^*$ ) besitzt, der Wert des Integrals (3) vom Sinne abhängt, in welchem man die Kurve  $C$  durchläuft. Die Extremalen, sowie sämtliche andere Kurven der  $xy$ -Ebene, die im folgenden benutzt werden, besitzen alle einen ausgezeichneten positiven Sinn, der in den Figuren durch die Spitze eines Pfeiles angedeutet sein möge.

Die erste Variation des bestimmten Integrals (3) verschwindet bekanntlich, wenn die Funktionen (2) die Eulersche Differentialgleichung

$$(4) \quad G(x, y; x', y'; x'', y'') = F_{x''} - F_{y''} + F_1(x' y'' - y' x'') = 0$$

befriedigen\*\*); hier und im folgenden bedeuten die Indizes partielle Ableitungen nach  $x, y, x', y'$ , während  $F_1$  die Weierstraßsche Invariante

$$(5) \quad F_1(x, y; x', y') = \frac{1}{y'^2} F_{x'y'} = -\frac{1}{x'y'} F_{x'y'} = \frac{1}{x'^2} F_{y'y'}$$

darstellt.

Um aus der Gleichung (4), d. h. einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zwei Funktionen  $x(t), y(t)$ , Gleichungen für die Extremalen zu bekommen, muß man zu (4) eine zweite willkürliche Beziehung zwischen  $x(t)$  und  $y(t)$  adjungieren, wodurch erst eine bestimmte Parameterdarstellung erhalten wird. Wir werden dazu besonders die Gleichung

$$(6) \quad x'^2 + y'^2 = 1$$

benutzen, wodurch die Länge der Extremalen als Parameter eingeführt wird.

Die Eulersche Differentialgleichung zeigt sofort, daß die Extremalen in jedem Elemente  $(x, y; x', y')$  des Gebietes  $T$  regulär sind, wo  $F_1(x, y; x', y') \neq 0$  ist, denn es kann in diesem Falle das Cauchysche Existenztheorem angewandt werden.

Nach der Weierstraßschen Theorie ist nun eine Extremale, die das Linienelement  $(x_0, y_0; x'_0, y'_0)$  enthält, im Punkte  $(x_0, y_0)$  stark, wenn die Weierstraßsche  $E$ -Funktion

$$(7) \quad E(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y') = [F_x(x', y') - F_x(x'_0, y'_0)]x' \\ + [F_y(x', y') - F_y(x'_0, y'_0)]y'$$

\*) Dies ist nur dann der Fall, wenn  $F(x, y; -x', -y') = F(x, y; x', y')$  ist, was z. B. für  $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  zutrifft.

\*\*) Diese Differentialgleichung wurde gewöhnlich die Lagrangesche genannt; wie aber Bolza a. a. O. pag. 22 bemerkt, hat sie Lagrange selbst Euler zugeschrieben.

ausschließlich für diejenigen Wertepaare  $x', y'$  verschwindet, für welche

$$(8) \quad x'y_0' - y'x_0' = 0 \quad \text{und} \quad x'x_0' + y'y_0' > 0$$

ist.\*)

Weierstraß hat schon in seinen Vorlesungen die Bemerkung gemacht, daß es Probleme gibt, bei welchen keine einzige Extremale stark ist\*\*); solche Probleme schließen wir naturgemäß aus unseren Untersuchungen aus und machen also die Annahme, daß  $x_0, y_0, x_0', y_0'$  in der Weise gewählt sind, daß die  $E$ -Funktion (7) für alle Werte von  $x'$  und  $y'$ , welche (8) nicht befriedigen, positiv ist.

Man schreibe:

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \cos \vartheta, & y' = \sin \vartheta, \\ x_0' = \cos \vartheta_0, & y_0' = \sin \vartheta_0, \\ \vartheta - \vartheta_0 = \varphi; \end{cases}$$

was zulässig ist, da man, wegen der Homogenitätseigenschaft (1), den Parameter  $t$  immer so wählen kann, daß die Gleichung (6) erfüllt ist. Wir setzen in (7) die Größen  $x', y', x_0', y_0'$  als Funktionen von  $\vartheta_0$  und  $\varphi$  ein und erhalten

$$E(x_0, y_0; \cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0; \cos \vartheta, \sin \vartheta) = \psi(\cos \varphi, \sin \varphi) \geq 0;$$

die Funktion  $\psi$  verschwindet, wegen unserer Annahme, nur für diejenigen Werte von  $\varphi$ , die mod.  $2\pi$  kongruent Null sind. Für  $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$  hat sie also eine positive untere Grenze  $\varepsilon$  und für diese Werte ist

$$\psi(\cos \varphi, \sin \varphi) + \frac{2\varepsilon}{3} \cos \varphi \geq \frac{\varepsilon}{3};$$

diese letzte Ungleichheit gilt aber auch für die übrigen Werte von  $\varphi$ , weil für diese  $\psi \geq 0$  und  $\cos \varphi \geq \frac{1}{2}$  sind. Man kann somit  $\lambda$  positiv und so klein wählen, daß

$$(10) \quad \psi(\cos \varphi, \sin \varphi) + \lambda \cos \varphi \geq 2h > 0$$

ist.

Nun ist aber

$$\psi(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{E(x_0, y_0; x_0', y_0', x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \lambda \cos \varphi = \frac{\lambda(x' \cos \vartheta_0 + y' \sin \vartheta_0)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Andererseits erhält man aus der Homogenitätsgleichung (1), wenn man beide Seiten nach  $k$  differenziert und  $k = 1$  setzt, die Identität:

$$(11) \quad F(x, y; x', y') = x' F_x + y' F_y,$$

\*) Die letzte Ungleichheit ist notwendig, weil die Gleichung (1) nur für positive  $k$  zu gelten braucht.

\*\*\*) O. Bolza, a. a. O., pag. 142; cf. meine Dissert., pag. 10.

so daß man statt (7) für die  $E$ -Funktion

$$(12) \quad E(x_0, y_0; \cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0; x', y') = F(x', y') - x' F_{x'}(\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0) \\ - y' F_{y'}(\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0)$$

schreiben kann.

Jetzt führe man die Konstanten  $a$  und  $b$  und die Funktion  $\Phi$  durch die Gleichungen

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} a &= -F_{x'}(\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0) + \lambda \cos \vartheta_0 \\ b &= -F_{y'}(\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0) + \lambda \sin \vartheta_0 \\ \Phi(x, y; x', y') &= F(x, y; x', y') + ax' + by' \end{aligned} \right\}$$

ein. Dann besagt die Beziehung (10) nichts anderes als daß

$$\Phi(x_0, y_0; \cos \vartheta, \sin \vartheta) \geq 2h$$

ist. In einer gewissen Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  wird also

$$\Phi(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) \geq h$$

gelten; mit anderen Worten: es ist die Funktion  $\Phi$  in diesem Gebiete *positiv definit*.

Wir können nun im Integrale (3) die Funktion  $F$  durch  $\Phi(x, y; x', y')$  ersetzen, da diese letzte Funktion ihrer Definition (13) gemäß homogen erster Ordnung in  $x'$  und  $y'$  ist. Nun bleiben aber sowohl die Extremalen wie auch die Weierstraßsche  $E$ -Funktion unverändert, wenn man  $F$  durch  $\Phi$  ersetzt, so daß die Eigenschaft einer Extremalen, stark zu sein, bei unserer Transformation erhalten bleibt. Indem wir ferner bemerken, daß wir, wenn die  $E$ -Funktion negativ ist, die auf ähnliche Weise erhaltene Funktion  $\Phi$  durch  $-\Phi$  ersetzen können, kommen wir zu folgendem Resultate:

*Um die Verteilung der starken Extremalen in der Umgebung eines Punktes zu untersuchen, genügt es, die positiv definiten Variationsprobleme zu berücksichtigen.*

## § 2.

### Die Indikatrix und ihre Eigenschaften.

Es sei jetzt das Variationsproblem (3) selbst positiv definit, d. h. es gelte für jeden Punkt des Gebietes  $T$  und für jeden Wert von  $\vartheta$  die Ungleichheit

$$(14) \quad F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) \geq h > 0.$$

Wir betrachten das Büschel der Radienvektoren, die von einem Punkte  $(x, y)$  ausgehen, und suchen auf jeder dieser Geraden den Punkt

$$(x + x' dt, y + y' dt)$$



zu bestimmen, für welchen das Differential  $Fdt$  einen gegebenen Wert  $d\mu$  annimmt:

$$(15) \quad F(x, y; x', y') dt = d\mu.$$

Die so erhaltenen Punkte bilden wir durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\left. \begin{aligned} x' dt &= \xi d\mu \\ y' dt &= \eta d\mu \end{aligned} \right\}$$

auf eine  $\xi\eta$ -Ebene ab; die Achsen dieser Ebene seien denen der  $xy$ -Ebene parallel und gleich gerichtet.

Die Beziehung (14) lehrt uns, daß  $Fdt$ , also auch  $d\mu$  positiv ist; die Homogenitätseigenschaft (1), die nur für positive  $k$  gilt, liefert also

$$\begin{aligned} F(x, y; x', y') dt &= F(x, y; x' dt, y' dt) \\ &= F(x, y; \xi d\mu, \eta d\mu) \\ &= F(x, y; \xi, \eta) d\mu. \end{aligned}$$

Der Ort der in der  $\xi\eta$ -Ebene abgebildeten Punkte ist also nach (15)

$$(16) \quad F(x, y; \xi, \eta) = 1.$$

Führt man die Polarkoordinaten

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta$$

ein, so bekommt man für diese Kurve

$$(17) \quad \rho = \frac{1}{F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta)}.$$

Die Gleichung (16) resp. (17) stellt eine Kurve dar, die in ihrer Konstruktion Ähnlichkeit mit der Dupinschen Indikatrix hat, und die wir darum *Indikatrix des Variationsproblems* nennen wollen; der Anfangspunkt der Koordinaten in der Hilfsebene der  $\xi, \eta$  soll *Grundpunkt* der Indikatrix heißen. Die Gleichung (17), mit (14) verglichen, zeigt, daß der Radiusvektor

$$\rho \leq \frac{1}{h}$$

ist. Aus der Gleichung (17) lassen sich für die Indikatrix, wenn man die über  $F$  gemachten Voraussetzungen berücksichtigt, folgende Schlüsse ziehen:

Die Indikatrix eines definiten Variationsproblems ist eine reguläre, analytische, geschlossene Kurve, die gänzlich im Endlichen liegt; jeder Radiusvektor durch den Grundpunkt schneidet sie nur einmal und folglich liegt der Grundpunkt im Innern der Kurve.

Wenn man umgekehrt in der  $\xi\eta$ -Ebene eine zweiparametrische Schar

von Kurven gibt, welche sämtliche soeben genannten Eigenschaften besitzt, so kann man ihr ein positiv definites Variationsproblem zuordnen, dessen Indikatrix in jedem Punkte eine Kurve der vorgelegten Schar ist. Es sei z. B. die Gleichung der Kurvenschar in Polarkoordinaten

$$\varrho = \chi(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta).$$

Dann hat man nach (17) für das zugeordnete Variationsproblem

$$F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) = \frac{1}{\chi(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta)};$$

andererseits aber wegen der Homogeneitätseigenschaft (1)

$$\begin{aligned} F(x, y; x', y') &= \sqrt{x'^2 + y'^2} F\left(x, y; \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) \\ &= \sqrt{x'^2 + y'^2} F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta), \end{aligned}$$

so daß man schließlich

$$(17) \quad F(x, y; x', y') = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\chi\left(x, y; \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)}$$

erhält.

Die Einführung der Indikatrix wird unsere Betrachtungen viel übersichtlicher gestalten; in der eigentlichen Variationsrechnung ist diese Kurve noch nicht benutzt worden; dagegen spielt sie schon längst in der geometrischen Optik unter dem Namen „Strahlenfläche“ eine wichtige Rolle.

Die Tangente  $t$  im Punkte  $A(\xi, \eta)$  der Indikatrix

$$(18) \quad F(x, y; \xi, \eta) = 1$$

wird durch die Gleichung

$$(19) \quad F_x(\Xi - \xi) + F_y(H - \eta) = 0$$

in den laufenden Koordinaten  $\Xi$  und  $H$  gegeben, und die Gleichung (11), die sich hier mit Rücksicht auf (16)

$$(20) \quad F_x \xi + F_y \eta = 1$$

schreiben läßt, lehrt uns, daß keine dieser Tangenten durch den Grundpunkt der Kurve geht.

Es ist nun bekanntlich\*) die Bedingung dafür, daß in der Ebene der  $x, y$  ein Bogenelement  $\delta x, \delta y$  die Extremale  $x(t), y(t)$  im Punkte  $x, y$  transversal schneide,

$$F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y = 0.$$

\*) Kneser, Lehrbuch, pag. 32. Bolza a. a. o., pag. 155.

Die Gleichung (20) kann also folgendermaßen gedeutet werden (Fig. 1):

Wenn man im Punkte  $x, y$  der  $xy$ -Ebene zwei Parallelen  $r_1, t_1$  zu dem Radius Vektor  $r$  und der Tangente  $t$  an die Indikatrix zieht, so schneidet die Gerade  $t_1$  diejenige Extremale  $e$  transversal, welche im Punkte  $x, y$  die Richtung  $r_1$  besitzt.

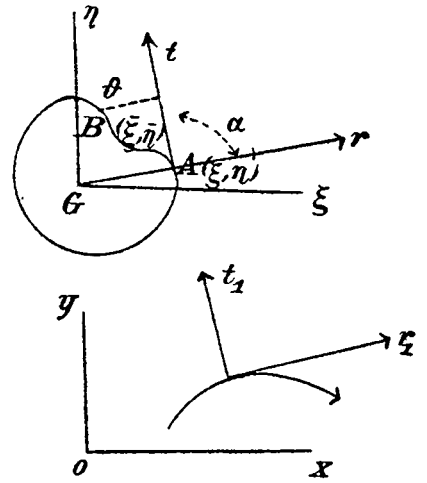


Fig. 1.

Die Krümmung  $K$  der Indikatrix wird in jedem Punkte durch die Gleichung

$$(21) \quad K = \xi' \eta'' - \eta' \xi''$$

gegeben, wenn man  $\xi$  und  $\eta$  als Funktionen eines Parameters  $\tau$  betrachtet und die Ableitungen nach diesem Parameter aus der Gleichung (16) der Kurve und aus

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1$$

berechnet. Die Kurve möge, wenn  $\tau$  wächst, so durchlaufen werden, wie es die Pfeilspitze auf der Tangente  $t$  der Fig. 1 zeigt. Dann ist die Krümmung  $K$  im Punkte  $A$  positiv oder negativ, je nachdem die Kurve in der Umgebung von  $A$  auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite ihrer Tangente liegt wie der Grundpunkt  $G$ .

Durch Differentiation von

$$F(x, y; \xi, \eta) = 1$$

bei konstanten  $x$  und  $y$  erhält man:

$$(22) \quad F_x \xi' + F_y \eta' = 0,$$

$$(23) \quad F_{x'x'} \xi'^2 + 2F_{x'y'} \xi' \eta' + F_{y'y'} \eta'^2 + F_x \xi'' + F_y \eta'' = 0.$$

Es lauten aber hier die Gleichungen (5)

$$F_1 = F_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\eta^2} F_{x'x'} = -\frac{1}{\xi \eta} F_{x'y'} = \frac{1}{\xi^2} F_{y'y'},$$

so daß man (23) kürzer schreiben kann:

$$(24) \quad F_1 (\eta \xi' - \xi \eta')^2 + F_x \xi'' + F_y \eta'' = 0.$$

Nun zeigt aber die Gleichung (20), daß  $F_x$  und  $F_y$  nicht zugleich verschwinden können; es ist zum Beispiel  $F_x \neq 0$ . Indem man  $F_y$  aus (22) und (24) eliminiert, erhält man für  $K$

$$K = \xi' \eta'' - \eta' \xi'' = \frac{F_1 \eta' (\xi \eta' - \eta \xi')^2}{F_x};$$

und wenn man  $F_y$  aus (20) und (22) eliminiert, erhält man ähnlich

$$\eta' = F_x (\xi \eta' - \eta \xi'),$$

so daß schließlich

$$(25) \quad K = F_1 (\xi \eta' - \eta \xi')^3$$

ist.

Die Kurve schneidet aber nur einmal jeden Radiusvektor und keine Tangente geht durch den Grundpunkt; folglich ist der Winkel  $\alpha$  zwischen  $t$  und  $r$  (Fig. 1) immer kleiner als  $\pi$  und die Größe  $(\xi\eta' - \eta\xi')$  immer positiv und von Null verschieden:  $K$  und  $F_1$  haben dasselbe Vorzeichen. Das Vorzeichen von  $F_1$  ist aber entscheidend, um zu wissen, ob die betreffende Extremale ein Maximum oder ein Minimum liefert; wir können also sagen:

*Ist für die Richtung  $r$  die Indikatrix nach außen konvex, so liefert die Extremale, die im Punkte  $x, y$  die zu  $r$  parallele Richtung  $r_1$  besitzt, ein Minimum in der Umgebung dieses Punktes; ist die Indikatrix dort konkav, so liefert die Extremale ein Maximum.*

In ähnlicher Weise ist die Indikatrix eng mit der Weierstraßschen  $E$ -Funktion verbunden. Es sei  $t$  (Fig. 1) die Tangente im Punkte  $A(\xi, \eta)$  der Indikatrix,  $B(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  ein anderer willkürlicher Punkt dieser Kurve. Ferner sei der Abstand zwischen  $B$  und  $t$  mit  $\delta$  bezeichnet und möge positiv oder negativ gemessen sein, je nachdem  $B$  auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von  $t$  liegt wie der Grundpunkt  $G$ .

Dann hat man mit Hilfe der Gleichung (19) der Tangente

$$F_x(\Xi - \xi) + F_{y'}(H - \eta) = 0$$

für die Entfernung  $\delta$  die Beziehung

$$\delta = \frac{F_x(\xi - \bar{\xi}) + F_{y'}(\eta - \bar{\eta})}{\sqrt{F_x^2 + F_{y'}^2}}$$

(das Vorzeichen ist hier richtig gewählt, denn für  $\bar{\xi} = 0, \bar{\eta} = 0$  muß der Ausdruck positiv sein).

Wir bezeichnen  $F_x(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}), F_{y'}(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta})$  mit  $\bar{F}_x, \bar{F}_{y'}$ ; dann ist nach (20)

$$(26) \quad F_x\xi + F_{y'}\eta = \bar{F}_x\bar{\xi} + \bar{F}_{y'}\bar{\eta} = 1,$$

und man kann schreiben

$$\delta = \frac{(\bar{F}_x - F_x)\bar{\xi} + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\bar{\eta}}{\sqrt{F_x^2 + F_{y'}^2}}.$$

Die Weierstraßsche  $E$ -Funktion

$$E(x, y; \xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = (\bar{F}_x - F_x)\bar{\xi} + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\bar{\eta}$$

erlaubt uns endlich zu schreiben:

$$(27) \quad \delta = \frac{E(x, y; \xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\sqrt{F_x^2 + F_{y'}^2}}.$$

Die beiden Größen  $\delta$  und  $E$  haben folglich dasselbe Vorzeichen und verschwinden zugleich. Nun war aber eine Extremale im Linienelement  $(x, y; x', y')$  dann und nur dann stark, wenn die  $E$ -Funktion

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}'),$$

als Funktion von  $\bar{x}', \bar{y}'$  betrachtet, definit ist. Die Gleichung (27) liefert also den Satz:

*Eine Extremale ist im Linienelemente  $(x, y; x', y')$  dann und nur dann stark, wenn die Tangente im entsprechenden Punkte der Indikatrix außer dem Berührungspunkte keinen anderen Punkt mit der Kurve gemein hat, und folglich gänzlich außerhalb dieser Kurve verläuft.*

### § 3.

#### Bestimmung der starken Extremalen, die durch einen Punkt gehen.

Der soeben bewiesene Satz gestattet durch den bloßen Anblick der Indikatrix die starken Extremalen von den anderen zu unterscheiden. Um uns aber auf den allgemeinen Fall zu beschränken, ist es notwendig, solche Punkte  $(x, y)$  unseres Variationsproblems auszuschließen, für welche die Indikatrix mit einer ihrer Tangenten eine vierfache Berührung besitzt. Der Grund dieser Beschränkung ist folgender: die Extremalen sind für ein gegebenes Element  $(x, y; x', y')$  regulär, wenn  $F_1 \neq 0$  ist, d. h. die Indikatrix im entsprechenden Punkte eine von Null verschiedene Krümmung hat. Damit nun andererseits die Indikatrix, in einem Punkte, wo sie ihre Tangente nicht durchsetzt, die Krümmung Null habe, muß sie diese Tangente mindestens vierfach berühren. Durch die Bedingung, die wir der Kurve auferlegen, schließen wir also solche Punkte aus, wo die Weierstraßsche Bedingung für die Existenz einer starken Extremalen für derartige Richtungen erfüllt sein würde, für welche keine reguläre Extremale existiert.

Analytisch läßt sich diese Bedingung folgendermaßen ausdrücken: Die Tangente der Indikatrix hat mit der Kurve

$$F(x, y; \xi, \eta) = 1$$

im Punkte  $\xi, \eta$  dann eine vierfache Berührung, wenn die Koeffizienten  $t, t^2$  und  $t^3$  in der Taylorsche Entwicklung von

$$F(x, y; \xi + \alpha t, \eta + \beta t)$$

für geeignete Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  zugleich verschwinden.

Aber diese Entwicklung lautet:

$$(28) \quad 1 + (\alpha F_{\xi} + \beta F_{\eta})t + (\alpha^2 F_{\xi\xi} + 2\alpha\beta F_{\xi\eta} + \beta^2 F_{\eta\eta}) \frac{t^2}{2} \\ + (\alpha^3 F_{\xi\xi\xi} + 3\alpha^2\beta F_{\xi\xi\eta} + 3\alpha\beta^2 F_{\xi\eta\eta} + \beta^3 F_{\eta\eta\eta}) \frac{t^3}{6} + (t^4) = 0.$$

Mit Hilfe der bekannten Gleichungen für  $F_1$

$$F_{\xi\xi} = \eta^2 F_1, \quad F_{\xi\eta} = -\xi\eta F_1, \quad F_{\eta\eta} = \xi^2 F_1$$

kann man ferner schreiben:

$$(29) \quad F_{\xi\xi\xi} = \eta^2 \frac{\partial F_1}{\partial \xi},$$

$$(30) \quad F_{\xi\xi\eta} = \frac{\partial F_{\xi\xi}}{\partial \eta} = 2\eta F_1 + \eta^2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta}.$$

Man bemerke nun, daß  $F_1$  homogen in  $\xi$  und  $\eta$  ist, und daß die Gleichung gilt

$$k^3 F_1(k\xi, k\eta) = F_1(\xi, \eta);$$

wenn man beide Seiten dieser Gleichung nach  $k$  differentiiert und  $k = 1$  setzt, so erhält man

$$(31) \quad 3F_1 + \xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0.$$

Setzt man diesen Wert von  $F_1$  in (30) ein, so kommt

$$F_{\xi\xi\eta} = \frac{\eta}{3} \left( \eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - 2\xi \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right);$$

auf ähnliche Weise werden die Beziehungen

$$F_{\xi\eta\eta} = \frac{\xi}{3} \left( \xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right)$$

$$F_{\eta\eta\eta} = \xi^2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta},$$

abgeleitet.

Durch Einsetzen aller dieser Werte in (28) erhält man

$$1 + (\alpha F_\xi + \beta F_\eta) t + (\alpha\eta - \beta\xi)^2 \left[ F_1 \frac{t^2}{2} + \left( \alpha \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right) \frac{t^3}{6} \right] + (t^4).$$

Für die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$ , für welche  $(\alpha F_\xi + \beta F_\eta)$  verschwindet, ist nun der Ausdruck  $(\alpha\eta - \beta\xi)$  sicher von Null verschieden, wie aus der Gleichung (20)

$$\xi F_\xi + \eta F_\eta = 1$$

folgt.

Eine vierfache Berührung der Indikatrix durch die betreffende Tangente kann also nur dann stattfinden, wenn die Gleichungen

$$(32) \quad \begin{aligned} F_1 &= 0, \\ \alpha \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

zugleich erfüllt sind.

Die erste dieser Gleichungen zieht wegen (31) die Gleichung

$$(33) \quad \xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0$$

nach sich; und die Gleichungen (32) und (33) können wegen des Nichtverschwindens ihrer Determinante  $(\alpha\eta - \beta\xi)$  auf die einfache Form

$$(34) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0$$

gebracht werden. Diese Ausdrücke sind in den Argumenten  $\xi$  und  $\eta$  homogen; die Punkte der  $xy$ -Ebene, für welche das System (34) befriedigt werden kann, bilden also im allgemeinen eine Kurve, deren Gleichung wir mit

$$(35) \quad \Psi(x, y) = 0$$

bezeichnen wollen.

Es sei jetzt  $P$  ein Punkt der  $xy$ -Ebene, der nicht auf der Kurve  $\Psi = 0$  liegt.\*) Die Indikatrix des positiv definiten Variationsproblems, das wir untersuchen, ist eine ganz im Endlichen liegende Kurve mit stetiger Krümmung; sie wird also *Stützgeraden* besitzen, d. h. Tangenten, welche durch keinen inneren Punkt der Kurve gehen, und zwar wird es für jede Richtung in der  $\xi\eta$ -Ebene zwei solche Stützgeraden geben, zwischen welchen die Indikatrix verläuft. In den Berührungspunkten irgend einer Stützgeraden ist die Indikatrix nach außen konvex und hat eine von Null verschiedene Krümmung, weil sonst die Stützgerade die Kurve vielfach berühren würde. Das entsprechende  $F_1$  ist also nach unserem Satze von pag. 460 immer positiv und von Null verschieden.

Die Punkte der Indikatrix werden demnach in zwei Klassen geteilt: diejenigen nämlich, die von Stützgeraden berührt werden, und die anderen; jedem Berührungspunkte einer Stützgeraden entspricht eine *reguläre* Extremale, und wenn die Stützgerade die Indikatrix in keinem zweiten Punkte berührt, so ist diese Extremale *stark*.

Wir wollen annehmen, daß die Indikatrix nur eine endliche Anzahl von mehrfachen Tangenten besitzt; durch die Radienvektoren, die von dem Grundpunkte der Indikatrix zu den Berührungspunkten der mehrfachen Stützgeraden geführt werden, ist eine Reihe von Sektoren definiert; mit Hilfe dieser Sektoren (Fig. 2) kann man im Punkt  $P$  diejenigen Richtungen, für welche die Extremalen ein starkes Minimum in der Umgebung von  $P$  liefern, von den anderen (in der Figur schraffierten) unterscheiden, für welche ein schwaches Minimum oder auch ein Maximum existiert.

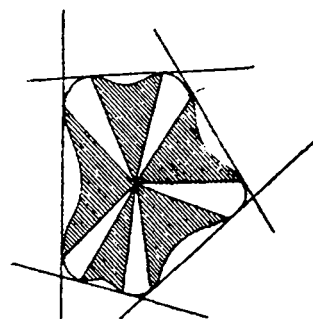


Fig. 2.

Zu gleicher Zeit ergibt sich die Umkehrung des Satzes, den wir in § 1 bewiesen haben:

\*) Probleme, bei welchen  $\Psi$  identisch verschwindet, lassen wir grundsätzlich außer Betracht.

Bei jedem definiten Variationsprobleme gibt es in jedem Punkte Richtungen, welche regulären starken Extremalen entsprechen.\*)

Für diejenigen Richtungen, die den Berührungspunkten einer mehrfachen Tangente der Indikatrix entsprechen, ist die Frage, ob die entsprechende Extremale stark ist oder nicht, noch unentschieden und bedarf einer näheren Untersuchung, die im folgenden durch das Studium der diskontinuierlichen Lösungen geführt werden soll.

#### § 4.

### Die diskontinuierlichen Lösungen des Variationsproblems.

Bei Festhalten der Endpunkte 1 und 2 eines in 0 geknickten Kurvenzuges 102 verschwindet bekanntlich die erste Variation des Integrals

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y; x', y') dt$$

dann und nur dann, wenn die Kurven 10 und 02 Extremalen sind, und in der Ecke 0 die Erdmannsche Bedingung erfüllt ist.\*\*) Letzteres ist der Fall, wenn die Größen  $F_x$  und  $F_y$  längs des ganzen Kurvenzuges 102, also auch im Knickpunkte 0 kontinuierliche Funktionen von  $t$  sind.

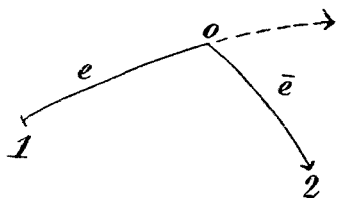


Fig. 3.

Wenn wir mit  $x'_0, y'_0$  und  $\bar{x}'_0, \bar{y}'_0$  die Werte der Ableitungen von  $x(t)$  und  $y(t)$  und ähnlich mit  $\varphi, \bar{\varphi}$  die Werte irgend einer Funktion  $\varphi(x', y')$  dieser Größen an beiden Seiten des Knickpunktes 0

bezeichnen, so lassen sich die Erdmannschen Bedingungen folgendermaßen schreiben:

$$(36) \quad F_x - \bar{F}_x = 0, \quad F_y - \bar{F}_y = 0.$$

Diese Bedingungen kann man mit Hilfe der Weierstraßschen  $E$ -Funktion in eine neue Form einkleiden, die für das Folgende nützlich ist.

Mit Kneser\*\*\*) sagt man, daß ein *außerordentliches* Verschwinden der  $E$ -Funktion vorliegt, wenn diese Größe für ein Richtungspaar  $x', y'$ ;  $\bar{x}', \bar{y}'$  verschwindet, für welches  $x'\bar{y}' - y'\bar{x}' \neq 0$  ist. Die Gleichungen (36) ziehen nun nicht nur das außerordentliche Verschwinden von

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = (\bar{F}_x - F_x)\bar{x}' + (\bar{F}_y - F_y)\bar{y}',$$

\*) Dieser Satz ist auch ohne die Einschränkungen richtig, daß die Indikatrix nur eine endliche Anzahl von Doppeltangenten haben soll und daß  $\Psi \neq 0$  ist.

\*\*) cf. Kneser, Lehrbuch, pag. 172; Bolza, a. a. O., pag. 36 und 125

\*\*\*) Lehrbuch, pag. 78.



sondern auch das von

$$E(x, y; \bar{x}', \bar{y}'; x', y') = (F_x - \bar{F}_x)x' + (F_y - \bar{F}_y)y'$$

nach sich.

Wegen der Homogenitätseigenschaften von  $F$  und deren Ableitungen sind ebenfalls

$$(37) \quad E = E(x, y; \xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$$

und

$$(38) \quad \bar{E} = E(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) = 0.$$

Nun hatten wir aber gesehen, daß die  $E$ -Funktion proportional der Entfernung eines Punktes der Indikatrix von der Tangente in einem anderen war. Die Gleichungen (37) und (38) besagen also nichts anderes, als daß die Tangente der Indikatrix im Punkte  $\xi, \eta$  den Punkt  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  dieser Kurve enthält, und daß ebenso die Tangente im Punkte  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  durch den Punkt  $\xi, \eta$  geht.

Die Gerade, welche  $\xi, \eta$  mit  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  verbindet, ist also eine Doppeltangente der Indikatrix. Umgekehrt bestimmt aber auch jede Doppeltangente dieser Kurve durch ihre Berührungspunkte Richtungen, für welche die Erdmannsche Bedingung gilt, weil aus den Gleichungen  $E = 0$  und  $\bar{E} = 0$  die Beziehungen (36) folgen, da hier  $\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi} \neq 0$  ist.

Wir machten schon bei der Definition der Indikatrix auf die Analogie aufmerksam, welche zwischen dieser Kurve und der Strahlenfläche in der geometrischen Optik existiert. Nun besitzt die Strahlenfläche für doppelbrechende Kristalle bekanntlich singuläre Tangentialebenen, welche die Fläche längs der Peripherie eines Kreises berühren; ihnen entsprechen ähnlich wie bei unseren ebenen Problemen gebrochene Wege des Lichtes. Nur ist das Licht nicht in einer bestimmten Richtung gebrochen, wie es bei einer Doppeltangentialebene der Fall sein würde, welche die Strahlenfläche in zwei bestimmten Punkten berührt, sondern längs eines ganzen Kegels. Dieses ist das bekannte von Hamilton entdeckte Phänomen der konischen Refraktion.

## § 5.

### Der Satz von der Vertauschung der starken Extrema.

Es entsprechen den beiden Richtungen, welche den Grundpunkt der Indikatrix mit den Berührungspunkten einer Doppeltangente verbinden, zwei Extremalen, die wir mit  $102$  und  $1'02'$  bezeichnen wollen (Fig. 4).

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen verschwindet die erste Variation für die zwei gebrochenen Kurven  $102'$  und  $1'02$ .

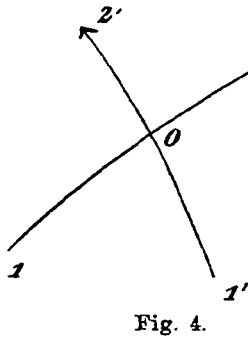


Fig. 4.

Wir nennen eine diskontinuierliche Extremale  $2$  *stark*, wenn diese Kurve in der Umgebung jedes Punktes ihrer beiden Zweige, der nicht mit dem Knickpunkte zusammenfällt, ein starkes Extremum liefert.

Wir wollen jetzt zeigen, daß, wenn die Doppel- tangente der Indikatrix eine Stützgerade dieser Kurve ist, und wenn man die vier Punkte  $1, 2, 1', 2'$  hin- reichend nahe an  $O$  wählt, von den vier stationären Kurven  $102, 1'02', 102', 1'02$  *eine einzige stark sein wird*; diese starke Extremale ist im allgemeinen Falle, den wir allein betrachten, immer diskon- tinuierlich. Hierdurch werden auch die am Ende des § 3 ausgeschlossenen Richtungen in solche, die starken, und solche, die schwachen Extremalen entsprechen, unterschieden.

Es sei  $x_0, y_0$  ein Punkt der  $xy$ -Ebene, dessen Indikatrix folgende Eigenschaften hat:

a) Die Invariante  $\Psi$  ist für den Punkt  $x_0, y_0$  von Null verschieden:

$$\Psi(x_0, y_0) \neq 0.$$

b) Keine Stützgerade der Indikatrix berührt die Kurve in mehr als zwei Punkten.

c) Die Kurve besitzt eine einzige „Doppelstützgerade“, d. h. eine ein- zige Doppeltangente, die zugleich Stützgerade ist. Diese letzte Ein- schränkung hat nur den Zweck, die Betrachtungen übersichtlicher zu gestalten; unsere Ergebnisse lassen sich nämlich ohne weiteres auf all- gemeine Fälle übertragen, wo die Kurve eine endliche Anzahl von Doppel- stützgeraden besitzt.

Um nun zu zeigen, daß die Eigenschaften a), b), c) auch für eine gewisse Umgebung des Punktes  $x_0, y_0$  gelten, bemerken wir zunächst, daß die Kurve notwendig die Gestalt der Fig. 5 (p. 468) haben wird. Es seien nun  $A\bar{A}$  die Doppelstützgerade und  $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  die Winkel, welche die Geraden  $GA$  und  $G\bar{A}$  mit der positiven  $\xi$ -Achse machen; man kann diese Größen, die bis auf Vielfache von  $2\pi$  unbestimmt sind, derart wählen, daß

$$(39) \quad 0 < \bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0 < \pi$$

ist. Es mögen den Richtungen

$$(40) \quad \varphi_0 = \vartheta_0 + \lambda(\bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0) \\ 0 < \lambda < 1$$

die schwachen, dagegen den Richtungen

$$(41) \quad \begin{aligned} \psi_0 &= \bar{\vartheta}_0 + \lambda(2\pi + \vartheta_0 - \bar{\vartheta}_0) \\ 0 &< \lambda < 1 \end{aligned}$$

die starken Extremalen in  $x_0, y_0$  entsprechen.

Da  $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$  ist, so ist die Krümmung der Indikatrix für sämtliche Richtungen (41) der starken Extremalen, und auch für die Richtungen  $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  selbst, ebenfalls von Null verschieden, und die Invariante  $F_1$  besitzt in diesem Sektor ein positives Minimum.

Es sei jetzt  $x, y$  ein beliebiger Punkt der  $xy$ -Ebene; durch die Geraden, welche den Grundpunkt der entsprechenden Indikatrix mit den Berührungspunkten einer ihrer Doppeltangenten verbinden, werden die Fortschreitungsrichtungen einer Lösung bestimmt, die im Punkte  $x, y$  diskontinuierlich ist; man bezeichne mit  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  die Winkel, welche diese Richtungen mit der positiven  $x$ -Achse machen. Die Größen

$$(42) \quad x' = \cos \vartheta, \quad y' = \sin \vartheta, \quad \bar{x}' = \cos \bar{\vartheta}, \quad \bar{y}' = \sin \bar{\vartheta}$$

müssen dann, wie wir sahen, den Erdmannschen Bedingungen

$$(43) \quad \begin{cases} F_x(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) = F_x(x, y; \cos \bar{\vartheta}, \sin \bar{\vartheta}) \\ F_y(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) = F_y(x, y; \cos \bar{\vartheta}, \sin \bar{\vartheta}) \end{cases}$$

genügen. Dieses Gleichungssystem läßt sich in einer gewissen Umgebung des Punktes  $x_0, y_0$  nach  $\vartheta, \bar{\vartheta}$  auflösen; man betrachte nämlich die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{D(F_{x'} - \bar{F}_{x'}, F_{y'} - \bar{F}_{y'})}{D(\vartheta, \bar{\vartheta})},$$

oder

$$\Delta = \begin{vmatrix} -F_{x'x'} \sin \vartheta + F_{x'y'} \cos \vartheta, & \bar{F}_{x'x'} \sin \bar{\vartheta} - \bar{F}_{x'y'} \cos \bar{\vartheta} \\ -F_{x'y'} \sin \vartheta + F_{y'y'} \cos \vartheta, & \bar{F}_{x'y'} \sin \bar{\vartheta} - \bar{F}_{y'y'} \cos \bar{\vartheta} \end{vmatrix}.$$

Führt man in dieser Determinante die Größen

$$F_1 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} F_{x'x'} = -\frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} F_{x'y'} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} F_{y'y'}$$

und

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \bar{F}_{x'x'} = -\frac{1}{\sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\vartheta}} \bar{F}_{x'y'} = \frac{1}{\cos^2 \bar{\vartheta}} \bar{F}_{y'y'}$$

ein, so reduziert sie sich einfach auf

$$(44) \quad \Delta = F_1 \bar{F}_1 \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}).$$

Aus unserer Voraussetzung, daß die Indikatrix des Punktes  $x_0, y_0$  eine Doppeltangente besitzt, folgt nun, daß die Gleichungen (43) für ein System von Größen wie

$$(45) \quad x_0, y_0, \quad x'_0, y'_0, \quad \bar{x}'_0, \bar{y}'_0$$

befriedigt sind. Die Größen

$$F_1(x_0, y_0; \cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0) \text{ und } F_1(x_0, y_0; \cos \bar{\vartheta}_0, \sin \bar{\vartheta}_0)$$

sind aber, wie wir bemerkten, von Null verschieden; das gleiche gilt von  $\sin(\vartheta_0 - \bar{\vartheta}_0)$ . Also ist

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0$$

und es existieren zwei Funktionen

$$(46) \quad \vartheta = \vartheta(x, y), \quad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x, y),$$

die in der Umgebung des Punktes  $x_0, y_0$  regulär sind, für diesen Punkt die Werte  $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  annehmen und das Gleichungssystem (43) identisch erfüllen.

Man gebrauche jetzt den bekannten Satz über die Eindeutigkeit der Lösungen eines Systems von impliziten Funktionen in der Umgebung eines Punktes.\*) Dieser Satz lautet hier: Man kann zwei positive Größen  $\rho_1$  und  $\varepsilon$  angeben mit folgenden Eigenschaften; für jeden Punkt der Kreisfläche, deren Mittelpunkt in  $x_0, y_0$  liegt und deren Radius  $\rho_1$  ist, genügen die Größen (46) den Ungleichheiten

$$(47) \quad |\vartheta - \vartheta_0| \leq \varepsilon, \quad |\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0| \leq \varepsilon.$$

$\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  sind umgekehrt die einzigen Größen, welche im betrachteten Gebiete das Gleichungssystem (43) und zugleich die Ungleichheiten (47) befriedigen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Indikatrix, welche den Punkten einer gewissen Umgebung von  $x_0, y_0$  entspricht, folgende Eigenschaften besitzt: Von den Richtungen, welche den Grundpunkt der Kurve mit den

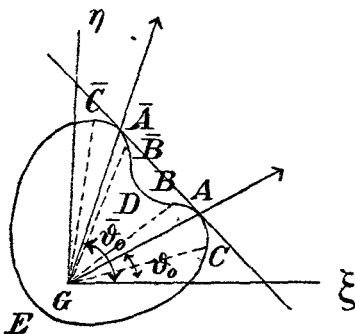


Fig. 5.

Berührungspunkten einer Doppelstützgeraden verbinden, kann 1. keine einzige innerhalb des Sektors  $(B\bar{D}\bar{B})$  fallen, 2. nicht die eine innerhalb des Sektors  $(\bar{B}\bar{C}E\bar{C}B)$  und die andere innerhalb des Sektors  $(\bar{C}E\bar{C})$  fallen. 3. können nicht beide entweder innerhalb des Sektors  $(\bar{B}\bar{A}\bar{C})$  oder innerhalb des Sektors  $(CAB)$  fallen.

Die erste Behauptung begründet man, indem man bemerkt, daß für die Indikatrix des Punktes  $x_0, y_0$  die Punkte  $D$  des Sektors  $B\bar{D}\bar{B}G$  keine Berührungspunkte von Stützgeraden sind; das Produkt der Entfernungen der Tangente in  $D$  von den ihr parallelen Stützgeraden hat ein positives, von

\*) cf. z. B. H. A. Schwarz, Zur Lehre der unentwickelten Funktionen. Sitzungsber. d. Berl. Akad. XLV, pag. 948 (1897).

Null verschiedenes Minimum, wenn  $D$  den betreffenden Sektor beschreibt\*) Da nun diese Funktion eine stetige Funktion nicht nur der Richtung des Vektors  $GD$ , sondern auch ihrer Parameter  $x$  und  $y$  ist, so wird sie ebenfalls für sämtliche Richtungen  $BD\bar{B}G$  von Null verschieden bleiben, wenn  $x$  und  $y$  innerhalb einer gewissen Umgebung von  $x_0$  und  $y_0$  bleiben.

Für keinen Punkt dieser Umgebung wird also die Tangente in einem Punkte der Indikatrix, welcher einer der Richtungen  $GD$  entspricht, Stützgerade sein können.

Die zweite und dritte Behauptung lassen sich ebenso leicht beweisen. Man betrachte nämlich die Größe

$$(48) \quad g(x, y; \vartheta_1, \vartheta_2) = \left( \frac{E(x, y; \cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1; \cos \vartheta_2, \sin \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2} \right)^2 + \left( \frac{E(x, y; \cos \vartheta_2, \sin \vartheta_2; \cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1)}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2} \right)^2.$$

Diese Größe verschwindet nur dann, wenn  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Richtungen der Berührungspunkte einer Doppeltangente der Indikatrix sind; außerdem kann  $g(x, y; \vartheta_1, \vartheta_2)$  nur dann mit  $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$  gegen Null konvergieren, wenn die Indikatrix eine sie vierfach berührende Gerade besitzt, d. h. wenn  $\Psi(x, y) = 0$  ist. Nun ist  $A\bar{A}$  die einzige Doppelstützgerade im Punkte  $x_0, y_0$  und die übrigen Doppeltangenten sind in endlicher Anzahl vorhanden; man kann also  $B$  und  $\bar{B}$  so nahe an  $A$  und  $\bar{A}$  wählen, daß keine andere Doppeltangente einen Punkt des Sektors  $(\bar{B}\bar{A}\bar{C}ECAB)$  berührt; ferner ist  $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$ . Hieraus folgt, daß  $g$  im Punkte  $x_0, y_0$  für die Richtungspaare, die unter 2. und 3. beschrieben waren, ein positives, von Null verschiedenes Minimum besitzt. Nun ist aber  $g$  eine stetige Funktion seiner vier Argumente und bleibt daher in einer gewissen Umgebung von  $x_0, y_0$  von Null verschieden, wenn  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  das betreffende Gebiet durchlaufen.

Wenn wir alle diese Resultate zusammenfassen, so können wir sagen: Man kann eine positive Größe  $\rho$  angeben derart, daß für alle Punkte der Kreisfläche mit dem Radius  $\rho$ , deren Mittelpunkt  $x_0, y_0$  ist, 1. die Punkte der Indikatrix, welche einer der Richtungen des Sektors  $(BD\bar{B})$  entsprechen, nicht Berührungspunkte einer Stützgerade sein können; 2. die Punkte der Indikatrix, welche den Richtungen des Sektors  $(\bar{B}\bar{A}\bar{C}ECAB)$  entsprechen, eine einzige Doppeltangente liefern, nämlich die, welche durch die Gleichungen (46) bestimmt ist.

Da nun eine ganz im Endlichen liegende geschlossene Kurve, wenn sie überhaupt eine Doppeltangente besitzt, auch ganz sicher eine Doppel-

\*) Dieses folgt aus der Voraussetzung, die wir machten, daß die Indikatrix im Punkte  $x_0, y_0$  keine Stützgerade besitzt, welche die Kurve in drei verschiedenen Punkten berührt.

stützgerade haben muß, so sehen wir, daß die Richtungen (46) den Berührungspunkten einer Doppelstützgerade entsprechen müssen. Diese Doppelstützgerade kann die Indikatrix in keinem dritten Punkte berühren, da sonst die Richtungen  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  nicht eindeutig bestimmt sein würden, was ja der Fall ist.

Für sämtliche Punkte eines gewissen Gebietes  $T$ , das den Punkt  $x_0, y_0$  umgibt, bleiben also die Eigenschaften a), b) und c) der Indikatrix erhalten und es sind sämtliche durch die Gleichungen (42) definierten Richtungen  $x', y', \bar{x}', \bar{y}'$ , durch die Beziehungen (43) und die Anfangswerte (45) eindeutig bestimmt; dabei genügen die in (42) vorkommenden Größen  $\vartheta, \bar{\vartheta}$  den Gleichungen (46).

Diese Gleichungen (42) können aber, wenn man (46) berücksichtigt, als zwei Systeme von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} x' = x'(x, y), & y' = y'(x, y), \\ \bar{x}' = \bar{x}'(x, y), & \bar{y}' = \bar{y}'(x, y) \end{cases}$$

angesehen werden, deren Integrale — nach dem Cauchyschen Existenztheorem — zwei Scharen  $C$  und  $\bar{C}$  von Kurven bilden, von denen jede das Gebiet  $T$  einfach und lückenlos überdeckt.

Auf jeder der Kurven  $C$  und  $\bar{C}$  ist ein positiver Sinn ausgezeichnet; die Winkel, welche die positiven Richtungen der Tangenten dieser Kurven mit der positiven  $x$ -Achse machen, werden durch die Werte (46) von  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  geliefert. Den Richtungen

$$(49) \quad \varphi = \vartheta + \lambda(\bar{\vartheta} - \vartheta), \quad 0 < \lambda < 1$$

entsprechen im Punkte  $x, y$  Extremalen, die in diesem Punkte schwach sind; den Richtungen

$$(50) \quad \psi = \bar{\vartheta} + \lambda(2\pi + \vartheta - \bar{\vartheta}), \quad 0 < \lambda < 1$$

dagegen Extremalen, welche in diesem Punkte stark sind.

Wenn endlich eine Extremale  $e$  (Fig. 6) im Punkte  $P$  die Kurve  $C$  berührt und denselben positiven Sinn wie  $C$  besitzt, wenn zudem die Krümmung von  $e$  von der Krümmung von  $C$  in  $P$  verschieden ist, so daß die Extremale in der Nähe von  $P$  ganz auf der einen Seite von  $C$  zu liegen kommt, so trennt der Punkt  $P$  auf der Extremalen  $e$  Punkte, wo die Extremale stark ist, von anderen, wo sie schwach ist.

Einen analytischen Beweis dieser Tatsache erhält man beispielsweise, indem man durch eine Punkttransformation

$$x_1 = x_1(x, y), \quad y_1 = y_1(x, y),$$

die Kurvenscharen  $C$  und  $\bar{C}$  in

$$x_1 = \text{const.} \quad \text{und} \quad y_1 = \text{const.}$$

überführt, wobei die Krümmungsverhältnisse erhalten bleiben; durch geometrische Betrachtungen leuchtet aber der Satz direkt ein. In der Fig. 6 z. B. verläuft die Extremale  $e$  in jedem Punkte vor  $P$  innerhalb des Winkels, den die positiven Richtungen von  $C$  und  $\bar{C}$  bilden, und außerhalb desselben Winkels, nachdem sie  $P$  getroffen hat. Das Extremum ist auf  $e$  zunächst schwach und dann stark.

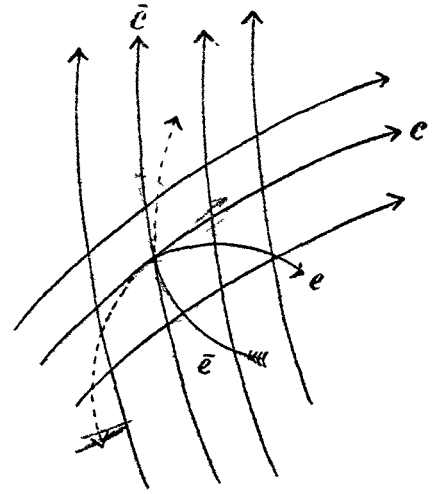


Fig. 6.

Wir wollen jetzt, um die Existenz von starken diskontinuierlichen Lösungen zu begründen, nachweisen, daß für die Extremale  $\bar{e}$ , die im Punkte  $P$  die Kurve  $\bar{C}$  berührt (und denselben Sinn wie  $\bar{C}$  hat), genau das Gegenteil stattfinden muß: d. h., daß das Extremum für  $\bar{e}$  zuerst stark ist und dann erst schwach werden wird.

Mit anderen Worten: *es vertauschen sich die Teile, für welche das Extremum stark ist, in jedem Diskontinuitätspunkte.*

Damit dieser Satz gelte, ist notwendig und hinreichend, daß die Extremale  $\bar{e}$  dieselbe relative Lage zu  $\bar{C}$  besitze, die  $e$  zu  $C$  hat. Sind also  $\tau$  und  $\sigma$  die Krümmungen von  $e$  und  $C$ ,  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\sigma}$  diejenigen von  $\bar{e}$  und  $\bar{C}$  im Punkte  $P$ , so müssen die Größen  $(\tau - \sigma)$  und  $(\bar{\tau} - \bar{\sigma})$  dasselbe Vorzeichen haben.

Die Krümmung einer Kurve ist — auch dem Vorzeichen nach — durch die Formel bestimmt

$$K = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}};$$

sie ist positiv oder negativ, je nachdem die Kurve links oder rechts von ihrer Tangente sich befindet, wenn man sie im positiven Sinne durchläuft.

Die Krümmung  $\sigma$  der Kurve  $C$  kann aus dem Systeme von Gleichungen (42) und (43) berechnet werden, das diese Kurve definiert; berücksichtigt man die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

die aus (42) folgt, so erhält man

$$\sigma = x' y'' - y' x'',$$

oder mit Benutzung von (42)  $\sigma = \mathcal{D}'$ . Durch Differentiation der Gleichungen (43) längs der Kurve  $C$  erhält man nun, nach Einführung der Größen  $F_1$  und  $\bar{F}_1$ , die Gleichungen

$$(51) \quad \begin{cases} F_{xx'} \cos \vartheta + F_{yx'} \sin \vartheta - F_1 \sin \vartheta \cdot \vartheta' \\ \quad \quad \quad = \bar{F}_{xx'} \cos \vartheta + \bar{F}_{yx'} \sin \vartheta - \bar{F}_1 \sin \vartheta \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}, \\ F_{xy'} \cos \vartheta + F_{yy'} \sin \vartheta + F_1 \cos \vartheta \cdot \vartheta' \\ \quad \quad \quad = \bar{F}_{xy'} \cos \vartheta + \bar{F}_{yy'} \sin \vartheta + \bar{F}_1 \cos \vartheta \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}. \end{cases}$$

Die Größe  $\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$  wird hier durch die Gleichung

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} \sin \vartheta$$

bestimmt, wo man für  $\bar{\vartheta}$  seinen Wert (46) eingesetzt hat; um diese Größe übrigens zu eliminieren, multipliziere man die erste der Gleichungen (51) mit  $\cos \bar{\vartheta}$ , die andere mit  $\sin \bar{\vartheta}$  und addiere. Man erhält

$$F_1 \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta) \sigma = (\bar{F}_{xx'} - F_{xx'}) \cos \vartheta \cos \bar{\vartheta} + (\bar{F}_{xy'} - F_{xy'}) \cos \vartheta \sin \bar{\vartheta}, \\ + (\bar{F}_{yx'} - F_{yx'}) \sin \vartheta \cos \bar{\vartheta} + (\bar{F}_{yy'} - F_{yy'}) \sin \vartheta \sin \bar{\vartheta}.$$

Die Krümmung  $\tau$  der Extremale  $e$  wird durch die Lagrangesche Gleichung (4) mit Berücksichtigung von

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

geliefert:

$$F_1 \tau = F_{x'y'} - F_{xy'}.$$

Man multipliziere diese letzte Gleichung mit  $\sin(\bar{\vartheta} - \vartheta)$  und subtrahiere von der vorherigen; dann kommt:

$$(52) \quad F_1 \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta) (\sigma - \tau) = (\bar{F}_{xx'} - F_{xx'}) \cos \vartheta \cos \bar{\vartheta} + (\bar{F}_{xy'} - F_{xy'}) \cos \vartheta \sin \bar{\vartheta}, \\ + (\bar{F}_{yx'} - F_{yx'}) \sin \vartheta \cos \bar{\vartheta} + (\bar{F}_{yy'} - F_{yy'}) \sin \vartheta \sin \bar{\vartheta}.$$

Nun liefert aber die Gleichung (11)

$$F = F_x x' + F_y y' = F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta$$

und ihre analoge

$$\bar{F} = \bar{F}_x \bar{x}' + \bar{F}_y \bar{y}' = \bar{F}_x \cos \bar{\vartheta} + \bar{F}_y \sin \bar{\vartheta}$$

nach  $x$  und  $y$  partiell differentiiert

$$F_x = F_{xx'} \cos \vartheta + F_{xy'} \sin \vartheta, \quad F_y = F_{yx'} \cos \vartheta + F_{yy'} \sin \vartheta,$$

$$\bar{F}_x = \bar{F}_{xx'} \cos \bar{\vartheta} + \bar{F}_{xy'} \sin \bar{\vartheta}, \quad \bar{F}_y = \bar{F}_{yx'} \cos \bar{\vartheta} + \bar{F}_{yy'} \sin \bar{\vartheta}.$$

Wenn man diese Identitäten in (52) einsetzt, so kommt endlich

$$(53) \quad F_1 \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta) (\sigma - \tau) = \cos \vartheta \bar{F}_x + \sin \vartheta \bar{F}_y - \cos \bar{\vartheta} F_x - \sin \bar{\vartheta} F_y.$$

Durch Vertauschung von  $x', y'$  mit  $\bar{x}', \bar{y}'$  hätte man auf analoge Weise erhalten:

$$(54) \quad \bar{F}_1 \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}) (\bar{\sigma} - \bar{\tau}) = \cos \bar{\vartheta} F_x + \sin \bar{\vartheta} F_y - \cos \vartheta \bar{F}_x - \sin \vartheta \bar{F}_y.$$



Endlich folgt durch Addition von (53) und (54), wenn man bemerkt, daß  $\sin(\bar{\vartheta} - \vartheta) \neq 0$  ist,

$$(55) \quad F_1(\sigma - \tau) = \bar{F}_1(\bar{\sigma} - \bar{\tau}).$$

$F_1$  und  $\bar{F}_1$  sind aber, wie wir sahen, beide positiv und von Null verschieden, weil die Indikatrix in jedem Berührungspunkte einer Stützgerade nach außen konvex sein muß.

Es haben also  $(\sigma - \tau)$  und  $(\bar{\sigma} - \bar{\tau})$  dasselbe Vorzeichen, wie wir beweisen wollten, und das Verschwinden der einen Größe zieht immer das der anderen nach sich.

Setzt man auf der rechten Seite von (53) an Stelle von  $\vartheta, \bar{\vartheta}$  die Funktionen (46) ein, so erhält man eine Größe

$$(56) \quad \Omega(x, y) = \cos \vartheta \bar{F}_x + \sin \vartheta \bar{F}_y - \cos \bar{\vartheta} F_x - \sin \bar{\vartheta} F_y,$$

die in jedem Punkte definiert ist, wo eine diskontinuierliche Lösung möglich ist, und deren Vorzeichen für die Bestimmung der starken diskontinuierlichen Lösungen von Bedeutung ist.

In der Fig. 6 ist z. B.  $\Omega(x, y) > 0$ ; der Punkt  $P$  ist Anfangspunkt des starken Teiles der Extremalen  $e$  und Endpunkt des starken Teiles von  $\bar{e}$ . Wäre  $\Omega(x, y)$  negativ, so würde das Umgekehrte stattfinden.

Unsere Resultate können in folgender Form ausgesprochen werden: *Wenn man eine starke Extremale  $e$  bis zu dem Punkte  $P$  verfolgt, wo sie aufhört stark zu sein, und wenn im Punkte  $P$  die betreffende Invariante  $\Omega$  nicht verschwindet, so gibt es eine Extremale  $\bar{e}$ , welche durch  $P$  geht, von diesem Punkte an erst stark wird und mit  $e$  eine starke diskontinuierliche Lösung des Problems bildet.*

Die Punkte, für welche die Indikatrix den Bedingungen a), b), c) des Anfangs dieses Paragraphen genügt und für welche außerdem  $\Omega$  von Null verschieden ist, sind nach unserer Terminologie reguläre Punkte des Variationsproblems. In einem Gebiete, dessen sämtliche Punkte regulär sind, sind die möglichen Knickpunkte einer festen Extremalen immer isoliert; denn in regulären Punkten werden die Kurven  $C$  und  $\bar{C}$  von den Extremalen  $e$  und  $\bar{e}$  einfach berührt.\*)

Die Bedingung, damit zwei aufeinander folgende Knickpunkte einer Extremalen  $e$  in  $P$  zusammenfallen, ist also das Verschwinden der Invarianten  $\Omega$  in diesem Punkte. Dann fallen aber auch, wie die Formel (55) zeigt, zwei aufeinander folgende Knickpunkte der Extremalen  $\bar{e}$  zusammen; eine der Extremalen  $e$  oder  $\bar{e}$  wird eine starke *kontinuierliche* Lösung des Variationsproblems geben. Man kann sich ein vorläufiges Bild der

\*) Einen analytischen Beweis dieser Tatsache findet man in meiner Dissert., pag. 24.

Verhältnisse in diesem Falle machen, indem man die Fig. 7 betrachtet. In dieser Figur sind die Kurven  $C$  und  $\bar{C}$  geradlinig angenommen.

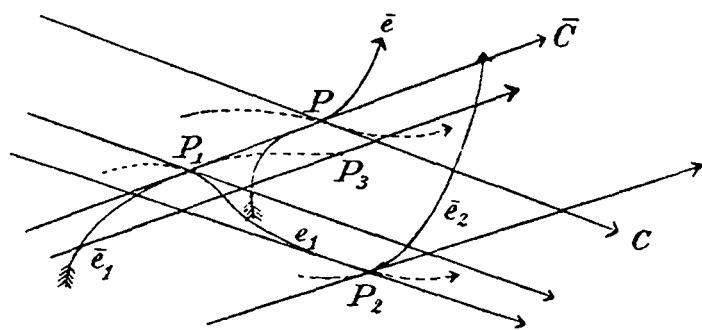


Fig. 7.

Es sei  $P$  ein Punkt, für welchen die Invariante  $\Omega$  verschwindet;  $P_1$  ein zweiter Punkt in der Nähe des ersten, für welchen aber  $\Omega \neq 0$  ist. Die Extremale  $\bar{e}_1$  besitzt die zwei aufeinander folgenden Knickstellen  $P_1$  und  $P_3$ ; die Extremale  $e_1$  die zwei aufeinander folgenden Stellen  $P_1$  und  $P_2$ .

Man betrachte die starke zweimal gebrochene Lösung  $\bar{e}_1 e_1 \bar{e}_2$ . Wenn  $P_1$  gegen  $P$  konvergiert, so nähern sich die zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  unbegrenzt, und der Teil  $e_1$  des Extremalenzuges  $\bar{e}_1 e_1 \bar{e}_2$  konvergiert gegen Null. Schließlich erhält man die starke Extremale  $\bar{e}$ , die durch  $P$  geht, während die entsprechende Extremale  $e$  schwach ist.

Höhere Oskulationen der Extremalen  $e$  mit den Kurven  $C$  würden zu noch verwickelteren Verhältnissen führen. Es ist aber zu vermuten, daß der Satz von der Vertauschung der starken Extrema auch in diesen Fällen richtig bleibt, so daß von den vier möglichen Lösungen in einer Knickstelle immer eine und nur eine stark sein wird.

Wenn nun endlich die Invariante  $\Omega$  identisch in  $x$  und  $y$  verschwindet — ein Fall, den ich in meiner Dissertation pag. 23 betrachtet habe — so geht aus dem Vorhergehenden (speziell aus den Gleichungen (53) und (54)) hervor, daß die zwei Kurvenscharen  $C$  und  $\bar{C}$  Extremalen des Variationsproblems sind. In diesem Falle sind diese Kurven die einzigen Extremalen, welche Knickpunkte zulassen, während die Lage dieser Knickpunkte auf ihnen unbestimmt ist.

Im folgenden wollen wir diese sämtlichen Singularitäten des Variationsproblems beiseite lassen, um die Betrachtungen über das Feld von starken Extremalenzügen nicht unnötig kompliziert zu gestalten.

## § 6.

### Existenz eines Feldes von starken diskontinuierlichen Lösungen.

Die Möglichkeit des Beweises, daß das Integral  $J$ , längs der gebrochenen Extremale 102 genommen (Fig. 8), einen Extremwert erreicht, beruht im wesentlichen darauf, daß man dieses Kurvenstück mit einem Felde umgeben kann. D. h.: Wir müssen durch eine einparametrische

Schar von Extremalen ein einfach zusammenhängendes Gebiet erfüllen und einfach überdecken, in dessen Innerem 102 gänzlich verläuft.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Knickpunktes einer beliebigen Extremalen des Feldes mit  $a, b$ , die Fortschreitungsrichtungen der diskontinuierlichen Extremalenzweige mit  $\vartheta, \bar{\vartheta}$ ; die entsprechenden Größen im Punkte 0 sollen  $a_0, b_0, \vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  genannt werden.

Es sei jetzt eine im Punkte 0 reguläre Kurve

$$(57) \quad \Gamma(a, b) = 0$$

gegeben, deren Tangente im Inneren des Winkels 102 liegt, die also keinen der beiden Zweige 10 und 02 berührt.

Es ist daher

$$\Gamma(a_0, b_0) = 0,$$

und mindestens eine der Größen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial b}$$

für  $a = a_0$  und  $b = b_0$  von Null verschieden; wir haben also z. B.

$$(58) \quad \Gamma_b^0 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b}\right)_{a=a_0, b=b_0} \neq 0.$$

Die gebrochenen Extremalen 1'0'2' (Fig. 8), deren Knickpunkte auf der Kurve  $\Gamma(a, b) = 0$  liegen, bilden in der Umgebung von  $a_0, b_0$  ein Feld, das den Kurvenzug 102 umgibt.

Wir wollen dies zunächst für denjenigen Teil der Ebene beweisen, welcher in der Umgebung von 0, auf derselben Seite der Kurve liegt, wie das Extremalenstück 10.

Da  $\Gamma_b^0 \neq 0$  ist, kann man die Gleichung (57) nach  $b$  auflösen und bekommt:

$$(59) \quad b - b_0 = b(a - a_0).$$

Setzt man in den Gleichungen (43), pag. 467,  $a, b$  für  $x, y$  ein, so wird man nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen diese Gleichungen in der Umgebung des Wertesystems  $a_0, b_0, \vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$  nach  $\vartheta, \bar{\vartheta}$  auflösen können, wenn nur das Variationsproblem in  $a_0, b_0$  regulär ist. Man erhält so die Beziehung

$$(60) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \varphi(a - a_0, b - b_0).$$

Es lassen sich nun die Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen (4) auch durch reguläre Funktionen in  $t, a, b$  darstellen, welche durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt sind:\*)

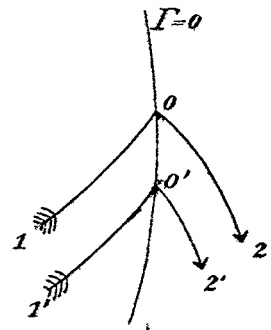


Fig. 8.

\*) Kneser, Lehrbuch, § 29, pag. 108.

$$(61) \quad \begin{cases} x = X(t; a, b; \vartheta), \\ y = Y(t; a, b; \vartheta), \\ X(0; a, b; \vartheta) = a, \quad Y(0; a, b; \vartheta) = b, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \cos \vartheta, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sin \vartheta, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Durch Einsetzen des Wertes (60) und hierauf des Wertes (59) von  $b$  in diese letzten Gleichungen wird die Extremalenschar  $1'0'$  dargestellt durch Gleichungen der Form

$$(62) \quad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a),$$

die für das Wertepaar  $t = 0, a = a_0$  regulär sind.

Um nun zu beweisen, daß durch diese Kurvenschar die Ebene in der Umgebung des Punktes  $0$  einfach, aber lückenlos überdeckt wird, genügt es zu zeigen, daß die Funktionaldeterminante

$$(63) \quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)_{t=0, a=a_0}} \neq 0$$

ist. Man kann nämlich dann die Gleichungen (62) nach  $t$  und  $a$  in der Umgebung von  $t = 0, a = a_0$  auflösen.

Letzteres zeigt man am leichtesten, wenn man die Funktionaldeterminante der Funktionen

$$(64) \quad \begin{cases} x = X(t; a, b; \vartheta), \\ y = Y(t; a, b; \vartheta), \\ 0 = \Gamma(a, b), \\ 0 = F_x(a, b; \cos \vartheta, \sin \vartheta) - F_x(a, b; \cos \bar{\vartheta}, \sin \bar{\vartheta}), \\ 0 = F_y(a, b; \cos \vartheta, \sin \vartheta) - F_y(a, b; \cos \bar{\vartheta}, \sin \bar{\vartheta}) \end{cases}$$

nach  $t, a, b, \vartheta, \bar{\vartheta}$  betrachtet; sie lautet nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} X_t & X_a & X_b & X_\vartheta & 0 \\ Y_t & Y_a & Y_b & Y_\vartheta & 0 \\ 0 & \Gamma_a & \Gamma_b & 0 & 0 \\ 0 & (F_{xx} - \bar{F}_{xx}) & (F_{yx} - \bar{F}_{yx}) - F_1 \sin \vartheta & \bar{F}_1 \sin \bar{\vartheta} \\ 0 & (F_{xy} - \bar{F}_{xy}) & (F_{yy} - \bar{F}_{yy}) & F_1 \cos \vartheta - \bar{F}_1 \cos \bar{\vartheta} \end{vmatrix}.$$

Wenn man in dieser Determinante die dritte bis fünfte Kolonne der Reihe nach mit  $\frac{db}{da}, \frac{d\vartheta}{da}, \frac{d\bar{\vartheta}}{da}$  multipliziert und zu der zweiten addiert und hierbei die Gleichungen

$$F_x - \bar{F}_x = 0, \quad F_y - \bar{F}_y = 0, \\ \Gamma = 0$$

berücksichtigt, infolge deren die drei letzten Elemente der zweiten Spalte verschwinden, so erhält man

$$(65) \quad D = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a \\ \eta_t & \eta_a \end{vmatrix} F_1 \bar{F}_1 \Gamma_b \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta).$$

Die letzten Faktoren sind in der Umgebung von  $a_0 b_0$  sämtlich endlich und von Null verschieden; die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a \\ \eta_t & \eta_a \end{vmatrix}$$

kann also nur für solche Werte von  $t$  verschwinden, für welche  $D = 0$  ist. Nun reduzieren sich die zwei ersten Reihen von  $D$  für  $t = 0$  wegen der Gleichungen (61) auf

$$\cos \vartheta \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0, \\ \sin \vartheta \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0,$$

und hieraus folgt

$$D_{t=0} = F_1 \bar{F}_1 \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}) (\cos \vartheta \Gamma_a^0 + \sin \vartheta \Gamma_b^0).$$

Es ist also  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)}$  für den Punkt 0 von Null verschieden, da

$$\cos \vartheta \Gamma_a^0 + \sin \vartheta \Gamma_b^0 \neq 0$$

ist, d. h. die Kurve  $\Gamma = 0$  und die Extremale 10 sich nicht in 0 berühren, was wir vorausgesetzt haben.

Ähnlich kann man für den Teil der Ebene in der Nachbarschaft von 02 verfahren, indem man überall in den Rechnungen  $\vartheta$  mit  $\bar{\vartheta}$  vertauscht. Es seien jetzt  $t_1$  und  $t_2$  zwei Werte, deren absoluter Betrag so klein gewählt ist, daß die Funktion

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)_{a=a_0}}$$

einerseits und

$$\frac{D(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{D(t, a)_{a=a_0}}$$

andererseits für keinen Wert von  $t$ , welcher den Intervallen

$$t_1 \leq t \leq 0, \quad 0 \leq t \leq t_2$$

angehört, verschwindet. Wir definieren die Punkte 1 und 2 durch die Koordinaten

$$x_1 = \xi(t_1, a_0), \quad y_1 = \eta(t_1, a_0), \\ x_2 = \bar{\xi}(t_2, a_0), \quad y_2 = \bar{\eta}(t_2, a_0).$$

Man kann den Kurvenzug 102 durch ein einfach zusammenhängendes Gebiet umgeben, das durch die Kurve  $\Gamma = 0$  in zwei Teile geteilt wird,

in welchem die betreffenden Funktionaldeterminanten von Null verschieden sind.

Der eine Teil dieses Gebietes wird durch die Extremalen  $1'0'$ , der andere durch  $0'2'$  einfach, aber auch lückenlos überdeckt, und man kann das so konstruierte Feld dazu benutzen, um das Integral längs 102 mit dem Integrale längs einer willkürlichen Kurve, welche 1 und 2 verbindet, zu vergleichen.

### § 7.

#### Anwendung der Weierstraßschen Theorie auf starke diskontinuierliche Extremalenstücke.

Wir betrachten jetzt ein Feld, das die gebrochene Kurve 102 umgibt; ein solches ist z. B. das Gebiet, welches durch zwei der Kurve 102 hinreichend benachbarte Extremalenzüge des Feldes  $ABCDEF$  und zwei willkürliche reguläre Kurven  $AD$ ,  $FC$  begrenzt wird (Fig. 9).

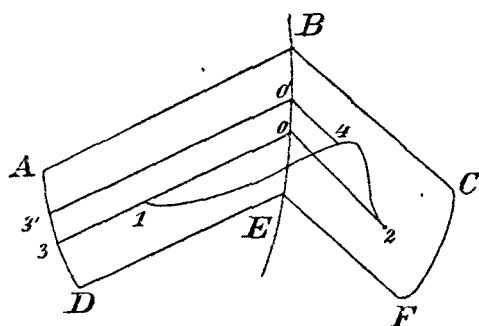


Fig. 9.

Es sei

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \\ \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \end{cases}$$

ein Kurvenstück 142, das ganz innerhalb des Feldes verläuft und die Punkte 1 und 2 verbindet. Diese Kurve braucht nicht analytisch zu sein; sie muß nur eine wohl-

bestimmte *vordere*\*) Tangente besitzen und dem Intergrale

$$(66) \quad \mathfrak{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\varphi, \psi; \varphi', \psi') d\tau$$

einen endlichen Wert erteilen.\*\*) Es sei 3 der Punkt, wo die Extremale 01 den Rand des Feldes schneidet. Um die Integrale längs der Feldkurve 102 und unserer willkürlichen Kurve 142 zu vergleichen, betrachten wir die Funktion von  $\tau$

$$M(\tau) = J_{3'0'4} + \mathfrak{S}_{142},$$

indem wir mit  $\mathfrak{S}$  die Integrale längs der Vergleichskurve, mit  $J$  die Integrale längs einer Feldkurve bezeichnen. Es ist

$$M(\tau_1) = J_{31} + \mathfrak{S}_{142},$$

$$M(\tau_2) = J_{31} + J_{102},$$

\*) Da man in einem ganz bestimmten Sinne, nämlich von 1 nach 2, integriert.

\*\*) Kneser, Lehrbuch, § 17.

folglich

$$J_{102} - \mathfrak{S}_{142} = M(\tau_2) - M(\tau_1),$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dM}{d\tau} d\tau.$$

Wir nehmen an, daß 4 auf derselben Seite von  $\Gamma = 0$  liege wie 02; dann ist

$$M(\tau) = \int_{t_1'}^{0'} F(\xi, \eta; \xi', \eta') dt + \int_{0'}^{t_2} F(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\xi}', \bar{\eta}') dt + \int_{\tau}^{\tau_2} F(\varphi, \psi; \varphi', \psi') dt.$$

Hier haben  $\xi = \xi(t, a)$ ,  $\eta = \eta(t, a)$ ,  $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t, a)$ ,  $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t, a)$  dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen,  $t_3$  ist eine bestimmte Funktion von  $a$ ;  $a$  und  $t_4$  werden als Funktionen von  $\tau$  durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \bar{\xi}(t_4; a) = \varphi(\tau), \\ \bar{\eta}(t_4; a) = \psi(\tau) \end{cases}$$

bestimmt.

In der Ableitung  $\frac{dM}{d\tau}$  verschwinden nach der üblichen partiellen Integration die Integrale, und es bleiben nur noch Grenzglieder übrig, die sich auf die Punkte 3', 0' und 4 beziehen.

Es ist leicht zu zeigen, daß diejenigen Glieder, die zu 3' gehören, die Form haben

$$g(a) \frac{da}{d\tau},$$

ferner verschwinden die Grenzglieder im Knickpunkte, d. h.

$$\left\{ (F_x - \bar{F}_x) \frac{\partial \xi(0)}{\partial a} + (F_y - \bar{F}_y) \frac{\partial \eta(0)}{\partial a} \right\} \frac{da}{d\tau},$$

wegen der Erdmannschen Bedingungen; endlich kann man die von 4 herrührenden Grenzglieder folgendermaßen schreiben

$$\left[ F(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\xi}', \bar{\eta}') \frac{dt_4}{d\tau} + \left( F_x \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial a} + F_y \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial a} \right) \frac{da}{d\tau} \right]_{t=t_4} - F(\varphi, \psi; \varphi', \psi');$$

benutzt man noch die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\xi}(t_4)}{\partial a} \frac{da}{d\tau} + \frac{\partial \bar{\xi}(t_4)}{\partial t} \frac{dt_4}{d\tau} = \varphi',$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}(t_4)}{\partial a} \frac{da}{d\tau} + \frac{\partial \bar{\eta}(t_4)}{\partial \tau} \frac{dt_4}{d\tau} = \psi',$$

so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\tau} &= g(a) \frac{da}{d\tau} + F_x(\bar{\xi}', \bar{\eta}') \varphi' + F_y(\bar{\xi}', \bar{\eta}') \psi' - F(\varphi', \psi'), \\ &= g(a) \frac{da}{d\tau} - E(\bar{\xi}', \bar{\eta}'; \varphi', \psi'). \end{aligned}$$

Diese Funktion hat für diejenigen Punkte der Vergleichskurve, welche zwischen 1 und  $\Gamma = 0$  oder auf diese Kurve fallen, genau dieselbe Form; nun verschwindet aber

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} g(a) \frac{da}{d\tau} d\tau,$$

da  $a$  für beide Punkte 1 und 2 denselben Wert annimmt; es gilt also die Gleichung

$$(67) \quad \mathfrak{S}_{142} - J_{102} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(\xi', \eta'; \varphi', \psi') d\tau,$$

indem wir jetzt mit  $\xi', \eta'$  die fortschreitende Richtung längs der Feldkurve bezeichnen.

Das Vorhandensein des Knickpunktes ändert also keineswegs die  $E$ -Funktion, und es läßt sich ihre Theorie auf diskontinuierliche Lösungen direkt übertragen. Diese Theorie beruht darauf, daß  $E$  verschwindet, wenn die Fortschreitungsrichtung der Feldkurve und der Vergleichskurve zusammenfallen, und ein festes Vorzeichen hat, wenn diese Richtungen hinreichend wenig voneinander abweichen;  $E$  und  $F_1$  haben dann dasselbe Vorzeichen.

Wenn das Feld aus lauter diskontinuierlichen *starken* Extremalen besteht, so kann die Größe  $E$  nur auf Punkten der Kurve  $\Gamma = 0$  außerordentlich verschwinden.

Die Vergleichskurve

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau)$$

hat aber nach unseren Annahmen in jedem Punkte eine vordere Tangente. Hieraus folgt, daß die Punkte  $\tau_i$ , für welche die Größe  $E(\xi', \eta'; \varphi', \psi')$  außerordentlich verschwindet, eine Menge bilden, die links isoliert ist. Wenn nämlich  $\tau'$  einen Häufungspunkt der Menge  $\tau_i$  darstellt, und für jedes positive  $\varepsilon$  unendlich viele Punkte der Menge zwischen  $\tau'$  und  $\tau' + \varepsilon$  liegen, so fällt im Punkte  $\tau'$  die vordere Tangente der Vergleichskurve mit der Tangente der Kurve  $\Gamma = 0$  zusammen; in diesem Punkte kann also  $E$  nicht außerordentlich verschwinden, der Punkt  $\tau'$  gehört also der Punktmenge  $\tau_i$  nicht an.

Wenn also die Größe (67) Null sein soll, so muß die Vergleichskurve aus lauter Stücken bestehen, innerhalb deren die  $E$ -Funktion ordentlich verschwindet. Jedes solche Stück ist aber mit einem Stücke einer Feldkurve identisch; der Beweis ist genau so zu führen, wie Weierstraß ihn für kontinuierliche Lösungen aufgestellt hat.\*)

\*) cf. Kneser, Lehrbuch, pag. 40.



Die Feldkurven überdecken das Feld in eindeutiger Weise und die einzige Feldkurve, die den Punkt 1 enthält, ist die Extremale 102. Für jede andere Kurve, welche 1 mit 2 verbindet und das Feld nicht verläßt, ist also

$$S_{142} - J_{102} \neq 0.$$

### § 8.

#### Das Büschel der starken Extremalen durch einen Punkt.

Ehe wir jetzt den Osgoodschen Satz in einer für unsere Anwendungen brauchbaren Form ableiten, ist es notwendig, einige weitere Eigenschaften der Felder von starken Extremalen aufzustellen. Wir werden einerseits zeigen, daß sich jeder reguläre Punkt  $P$  mit einem Felde von starken Extremalen umgeben läßt, die sämtlich von diesem Punkte ausgehen und das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte  $P$  und dem Radius  $\rho$  ausfüllen. Andererseits, daß für sämtliche Punkte eines regulären Gebietes  $T^4$  (d. h. eines solchen, das lauter reguläre Punkte enthält) *dieselbe* Größe  $\rho$  gewählt werden kann.

Die Konstruktion des erwähnten Feldes ist sehr einfach; man betrachtet sämtliche Extremalen, die von  $P$  ausgehen und im Anfange ihres Verlaufes stark sind, schneidet sie an der Stelle ab, wo sie aufhören stark zu sein, und ergänzt das auf diese Weise erhaltene partielle Feld durch den anderen Zweig der starken diskontinuierlichen Lösung, die an dieser Stelle geknickt ist.

Der Beweis, daß man durch diese Operationen Felder konstruiert, welche sämtliche oben erwähnten Eigenschaften besitzen, erfordert einige Vorbereitungen.

Es sei  $T_0$  ein perfektes Gebiet der  $xy$ -Ebene; für jeden Punkt dieses Gebietes soll die zugehörige Indikatrix die Eigenschaften a), b) und c) besitzen, die wir in § 5 (pag. 466) benutzt haben; außerdem soll noch die Invariante  $\Omega(x, y)$  von Null verschieden sein.

Dann gibt es, wie wir damals sahen, in jedem Punkte  $x, y$  von  $T_0$  zwei Richtungen, die mit der  $x$ -Axe die Winkel  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  bilden, und die man derart wählen kann, daß

$$(68) \quad 0 < \bar{\vartheta} - \vartheta < \pi$$

ist, und daß ferner den Richtungen

$$(69) \quad \begin{cases} \varphi = \vartheta + \lambda(\bar{\vartheta} - \vartheta) \\ 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

schwache, dagegen den Richtungen

$$(70) \quad \begin{cases} \psi = \bar{\vartheta} + \lambda(2\pi + \vartheta - \bar{\vartheta}) \\ 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

starke Extremalen entsprechen.

Die Größen  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  genügen den Gleichungen (46) und sind daher im ganzen Gebiete  $T_0$  stetige Funktionen von  $x$  und  $y$ ; das gleiche gilt folglich von der Größe  $(\bar{\vartheta} - \vartheta)$  und es folgt aus (68), daß für jeden Punkt von  $T_0$

$$(71) \quad 0 < h \leq \bar{\vartheta} - \vartheta \leq H < \pi$$

ist, wo  $h$  und  $H$  bestimmte Konstanten bedeuten.

Es ist ferner für sämtliche Werte  $\psi$ , die man erhält, indem man in (70)

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

macht, das Minimum der Größe

$$F_1(x, y; \cos \psi, \sin \psi)$$

positiv. Wir führen jetzt zwei neue Richtungen

$$(72) \quad \begin{cases} \vartheta' = \vartheta + 4\varepsilon', \\ \bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta} - 4\varepsilon' \end{cases}$$

ein, die mit  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  den konstanten Winkel  $4\varepsilon'$  machen (Fig. 10), und wählen dabei die positive Konstante  $\varepsilon'$  so klein, daß im ganzen Gebiete  $T_0$  einerseits

$$(73) \quad \bar{\vartheta}' - \vartheta' = (\bar{\vartheta} - \vartheta) - 8\varepsilon' \geq h - 8\varepsilon' > 0$$

sei, und andererseits für sämtliche Richtungen

$$(74) \quad \begin{cases} \psi' = \bar{\vartheta}' + \lambda(2\pi + \vartheta' - \bar{\vartheta}') \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

die Beziehung

$$(75) \quad F_1(x, y; \cos \psi', \sin \psi') \geq m > 0$$

gelte.

Es seien jetzt  $P_1$  und  $P_2$  irgend zwei Punkte des Gebietes  $T_0$ ; man bezeichne mit  $\vartheta_1, \bar{\vartheta}_1$  und  $\vartheta_2, \bar{\vartheta}_2$  die Werte von  $\vartheta$  und  $\bar{\vartheta}$  in diesen Punkten; dann gibt es wegen der Stetigkeit dieser zwei letzten Größen eine für das ganze Gebiet  $T_0$  gültige Konstante  $\delta$ , so daß die Beziehungen

$$(76) \quad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq 2\varepsilon', \quad |\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2| \leq 2\varepsilon'$$

gelten, sobald die Entfernung

$$P_1 P_2 \leq \delta$$

ist. Wir führen jetzt die neuen Bezeichnungen

$$(77) \quad \begin{cases} \vartheta'' = \vartheta + \varepsilon', & \bar{\vartheta}'' = \bar{\vartheta} - \varepsilon', \\ \psi'' = \bar{\vartheta}'' + \lambda(2\pi + \vartheta'' - \bar{\vartheta}'') \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

und durch eine Translation und eine Drehung neue Veränderliche  $\xi, \eta$  ein; der neue Anfangspunkt der Koordinaten liege in einem Punkte des Gebietes  $T_0$  und eine den Beziehungen (77) genügende Richtung  $\psi''$  sei zur positiven Richtung der  $\xi$ -Achse gewählt. Sämtliche Richtungselemente, welche dem Gebiete  $T_0$  angehören und die Ungleichheiten

$$|\xi| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\eta| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| \leq \operatorname{tg} \varepsilon'$$

befriedigen, genügen dann der Beziehung (74), und für diese Linienelemente ist in den alten Veränderlichen  $x, y$  die Größe

$$(78) \quad F_1 \geq m > 0.$$

Nach diesen Vorbemerkungen gelingt es, die Methode anzuwenden, die Bliss in Bd. V der „Transactions of the American Mathematical Society“ (pag. 113) benutzt hat.

Diese Methode beruht darauf, nach Einführung der neuen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auf die transformierte Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

das Schwarz-Picardsche Verfahren der sukzessiven Approximation anzuwenden, wie es für diesen speziellen Fall im *Traité d'Analyse* des Herrn Picard\*) zur Bestimmung von Lösungen mit vorgeschriebenen Anfangs- und Endwerten entwickelt ist.

Die Ungleichheit (78) erlaubt, einerseits — für das ganze Gebiet  $T$  gültige — obere Grenzen von  $|f|$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|$  und  $\left| \frac{\partial f}{\partial \eta'} \right|$  aufzustellen, wie sie für den Picardschen Konvergenzbeweis notwendig sind, andererseits eine maximale endliche Krümmung für sämtliche betrachtete Extremalen zu bestimmen. Dieser letzte Umstand erlaubt (wie Bliss, l. c. p. 118 ausführlich bewiesen hat), sämtliche Extremalenstücke, deren Anfangs- und Endpunkte hinreichend nahe an einander und auf einer Geraden liegen, welche den Winkel  $\psi''$  mit der  $x$ -Achse macht (wo  $\psi''$  den Bedingungen (77) genügt), mit denjenigen zu identifizieren, die man durch das Approximationsverfahren erhält.

Indem man den Beweis von Bliss Schritt für Schritt verfolgt, wofür wir auf die zitierte Arbeit verweisen, erhält man folgendes Resultat:

\*) Tome III, p. 94.

Es sei mit  $T$  ein Gebiet bezeichnet, das vollständig im Inneren des Gebietes  $T_0$  liegt, und mit  $\varepsilon$  eine beliebige positive Konstante, welche der Bedingung

$$\varepsilon < \varepsilon'$$

genügt. Es existiert dann eine positive Konstante  $\varrho_0$ , für welche folgender Satz gilt:

Wenn  $P_1(x_1, y_1)$  ein Punkt des Gebietes  $T$  ist, und  $x_2, y_2$  die Koordinaten eines zweiten Punktes  $P_2$  sind, die den Bedingungen

$$(79) \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + \varrho \cos \psi, & y_2 = y_1 + \varrho \sin \psi, \\ \psi = \bar{\vartheta}_1 - \varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 + 2\varepsilon) \\ \varrho \leq \varrho_0, & 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

genügen\*), so gibt es ein reguläres Extremalenstück  $e_{P_1}^{P_2}$ , welches vom Punkte  $P_1$  ausgeht und den Punkt  $P_2$  enthält. Diese Kurve ist die *einzige*, welche, der Lagrangeschen Differentialgleichung genügend, gänzlich innerhalb des Sektors

$$(80) \quad \begin{cases} x = x_1 + \varrho \cos \psi, \\ y = y_1 + \varrho \sin \psi, \\ \psi = \bar{\vartheta}_1 - 2\varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 + 4\varepsilon) \\ 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, & 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

verläuft, und deren Tangenten mit der positiven  $x$ -Axe einen Winkel bilden, der denselben Bedingungen wie  $\psi$  in (80) unterworfen ist; diese Tangenten drehen sich ferner kontinuierlich, wenn man  $e_{P_1}^{P_2}$  beschreibt, und bilden mit der Geraden  $P_1P_2$  einen Winkel, der überall kleiner als  $\varepsilon$  ist.

Wenn man die Länge  $s$  dieser Extremalen, vom Punkte  $P_1$  aus gemessen, als unabhängige Variablen einführt, so nehmen die Gleichungen der Kurve die Form an

$$(81) \quad \begin{cases} x = g(s; x_1, y_1; \varrho, \psi), \\ y = h(s; x_1, y_1; \varrho, \psi), \\ s_1 = k(x_1, y_1; \varrho, \psi); \end{cases}$$

$g, h, k, \frac{dg}{ds}, \frac{dh}{ds}, \frac{d^2g}{ds^2}, \frac{d^2h}{ds^2}$  und die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach  $x_1, y_1, \varrho, \psi$  sind eindeutige und kontinuierliche Funktionen ihrer fünf resp. vier Argumente, wenn

$$0 \leq s \leq s_1$$

ist,  $x_1, y_1$  die Koordinaten eines Punktes von  $T$  bezeichnen, und sowohl  $\varrho$  wie  $\psi$  die Bedingungen (79) befriedigen; man hat übrigens

\*)  $\vartheta_1, \bar{\vartheta}_1$  haben dieselbe Bedeutung wie in (76).

$$g(s_1; x_1, y_1; \varrho, \psi) = x_1 + \varrho \cos \psi,$$

$$h(s_1; x_1, y_1; \varrho, \psi) = y_1 + \varrho \cos \psi.$$

Aus der Tatsache, daß die Entfernung des Punktes  $P(x, y)$  eines gegebenen Extremalenstückes monoton mit  $s$  wächst, wenn die Größen  $s, x_1, y_1, \varrho, \psi$  innerhalb der erlaubten Grenzen liegen, folgt, daß dieses Extremalenstück jeden Kreis  $\varrho \leq \varrho_0$  höchstens in einem Punkte schneiden kann; so daß, wenn man umgekehrt in den Formeln (81)  $\varrho$  festhält, die Tangentenrichtung der Extremalen im Anfangspunkte  $P_1$  monoton mit  $\psi$  wachsen muß.

Die Richtungen  $\vartheta_1, \bar{\vartheta}_1$  liegen im Inneren des Sektors, der durch (79) bestimmt ist; man wird folglich eine Konstante  $\varrho_1 \leq \varrho_0$  derart wählen können, daß die Extremalen  $e$  und  $\bar{e}$  (Fig. 11), die im Punkte  $P_1$  die Tangentialrichtungen  $\vartheta_1$  und  $\bar{\vartheta}_1$  besitzen, für sämtliche Werte von  $\varrho \leq \varrho_1$  mit den geradlinigen Stücken des Randes  $P_1A$  und  $P_1C$  keinen Punkt gemeinsam haben. Es seien dagegen  $E$  und  $\bar{E}$  die Schnittpunkte dieser Extremalen mit dem Kreise  $\varrho = \varrho_1$ , der in der Fig. 11 mit  $A\bar{E}BEC$  bezeichnet ist.

Der Sektor  $P_1\bar{E}BEP_1$  wird eindeutig und lückenlos durch ein Bündel von Extremalen überdeckt, deren Anfangspunkt in  $P_1$  liegt und die sämtlich auf dem Kreisbogen  $\bar{E}BE$  endigen, wie in der Figur angedeutet ist; diese Extremalen bilden ein Feld, das ich mit  $\mathfrak{F}_1$  bezeichne. Jede Extremale, die im Punkte  $P_1$  einen Winkel

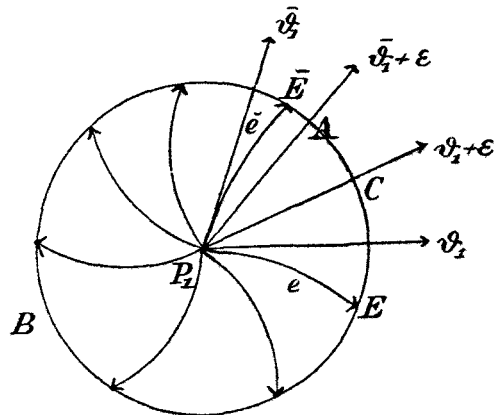


Fig. 11.

$$\begin{cases} \psi_1 = \bar{\vartheta}_1 + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1), \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

mit der positiven  $x$ -Achse macht, gehört dem Felde  $\mathfrak{F}_1$  an.

Von den zwei Extremalenstücken  $P_1E$  und  $P_1\bar{E}$ , welche im Punkte  $P_1$  den Winkeln  $\vartheta_1$  und  $\bar{\vartheta}_1$  entsprechen und in diesem Punkte eine diskontinuierliche Lösung bilden, ist das eine, z. B.  $P_1E$ , stark in der Nähe von  $P_1$ , während das andere bei dem Durchgange durch diesen Punkt schwach geworden ist.

Dieses folgt aus unserem Satze über die Vertauschung der starken Extrema wegen unserer Annahme  $\Omega(x, y) \neq 0$  im Gebiete  $T$ . Wenn wir aber von der Extremale  $\bar{e}$  absehen, so sind sämtliche übrigen Kurven des Feldes in der Nähe von  $P_1$  stark.

Wir schneiden, wie wir schon oben sagten, diese sämtlichen Extremalen an dem Punkte ab, wo sie aufhören stark zu sein, und erhalten ein neues Feld  $\mathfrak{F}_2$ , das aus lauter starken Extremalen besteht.

Um den Rand dieses neuen Feldes zu ermitteln, betrachten wir wieder die Kurvenschar  $\bar{C}$ , die wir in § 5, pag. 470 eingeführt haben. Die Extremalen des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  werden aufhören stark zu sein in den Punkten, wo sie die Kurven  $\bar{C}$  berühren. Der Ort dieser Punkte wird eine Kurve  $\bar{d}$  sein, die, wie wir sehen werden, den Punkt  $P_1$  enthält, in diesem Punkte die Extremale  $\bar{e}$  berührt, in der Nähe dieses Punktes regulär ist und im Inneren des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  verläuft. Diese drei letzten Eigenschaften kommen übrigens auch der Kurve  $\bar{C}_1$  der Schar  $\bar{C}$  zu, die durch den Punkt  $P_1$  geht, wie aus den Entwicklungen des § 5 zu ersehen ist.

Wir führen neue rechtwinkelige Koordinaten  $\xi, \eta$  ein, deren Anfangspunkt in den Punkt  $P_1$  fällt, und die derart orientiert sind, daß die positive Richtung der  $\xi$ -Achse den Winkel  $\bar{\vartheta}_1$  mit der positiven  $x$ -Achse bildet, die  $\xi$ -Achse also die Kurven  $\bar{e}$  und  $\bar{C}_1$  im Punkte  $P_1$  berührt. Die Koeffizienten, welche diese Koordinatentransformation vermitteln, sind reguläre Funktionen von  $x_1$  und  $y_1$ .

Da nun die Kurvenschar  $\bar{C}$  eine Lösung des durch (42) und (46) gegebenen Systems von Differentialgleichungen ist, so kann man die Kurven dieser Schar durch eine Gleichung

$$(82) \quad \eta = \varphi(\xi, \mu; x_1, y_1)$$

darstellen, wo die Funktion  $\varphi$  in der Umgebung von  $\xi = 0, \mu = 0$  eine reguläre Funktion ihrer vier Argumente ist und für  $\mu = 0$  die Kurve  $\bar{C}_1$  darstellt, so daß die Beziehungen gelten:

$$(83) \quad \varphi(\xi, \mu)_{\xi=0, \mu=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0, \mu=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)_{\xi=0, \mu=0} = 1.$$

Die Extremalen des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  werden ferner in den neuen Koordinaten mit Hilfe der Gleichungen (81) durch die Gleichung

$$(84) \quad \eta = \psi(\xi, \nu; x_1, y_1)$$

dargestellt, und  $\psi$  ist in der Umgebung von  $\xi = 0, \nu = 0$  ebenfalls regulär; man kann ferner durch geeignete Wahl des Parameters  $\nu$  erreichen, daß

$$(85) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \nu$$

ist, d. h. daß  $\nu$  den Winkel bedeutet, den die Tangente der Extremale (84) im Punkte  $P_1$  mit der  $\xi$ -Achse macht.

Da sämtliche Extremalen des Büschels durch  $P_1$  gehen, ist auch

$$(86) \quad \psi(\xi, \nu)_{\xi=0} = 0.$$

Die Kurve  $\bar{d}$  wird, als Ort derjenigen Punkte, wo die Extremalen des Feldes die Kurven der Schar  $\bar{C}$  berühren, durch Einsetzen derjenigen Werte von  $\mu$  und  $\nu$  in (82) und (84) erhalten, die das System

$$(87) \quad \begin{cases} \varphi(\xi, \mu) = \psi(\xi, \nu), \\ \frac{\partial \varphi(\xi, \mu)}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi(\xi, \nu)}{\partial \xi} \end{cases}$$

befriedigen.

Nun hat man wegen (83), (85) und (86)

$$(88) \quad \begin{cases} \varphi(\xi, \mu) = \mu + \frac{1}{2} a_{02} \xi^2 + a_{11} \xi \mu + \frac{1}{2} a_{20} \mu^2 + (\xi, \mu)_3, \\ \psi(\xi, \nu) = \frac{1}{2} b_{02} \xi^2 + \xi \nu + (\xi, \nu)_3, * \end{cases}$$

so daß die Gleichungen (87) die Form nehmen

$$(89) \quad \begin{cases} \mu + \frac{1}{2} a_{02} \xi^2 + a_{11} \xi \mu + \frac{1}{2} a_{20} \mu^2 + (\xi, \mu)_3 = \frac{1}{2} b_{02} \xi^2 + \xi \nu + (\xi, \nu)_3, \\ a_{02} \xi + a_{11} \mu + (\xi, \mu)_2 = b_{02} \xi + \nu + (\xi, \nu)_2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung kann man nach  $\nu$  auflösen; es kommt

$$(90) \quad \nu = (a_{02} - b_{02}) \xi + a_{11} \mu + (\xi, \mu)_2,$$

und dieser Wert von  $\nu$  in die erste der Gleichungen (89) eingesetzt liefert

$$\mu + \frac{1}{2} a_{02} \xi^2 + \frac{1}{2} a_{20} \mu^2 + (\xi, \mu)_3 = \frac{1}{2} b_{02} \xi^2 + (a_{02} - b_{02}) \xi^2 + (\xi, \mu)_3,$$

woraus man

$$(91) \quad \mu = \frac{1}{2} (a_{02} - b_{02}) \xi^2 + (\xi)_3$$

und mit Hilfe von (90)

$$(92) \quad \nu = (a_{02} - b_{02}) \xi + (\xi)_2$$

erhält. Diese Werte (91) und (92) von  $\mu$  und  $\nu$  in (88) eingesetzt, liefern für die Kurve  $\bar{d}$  die Gleichung

$$(93) \quad \eta = \frac{1}{2} (2a_{02} - b_{02}) \xi^2 + (\xi)_3 = \chi(\xi).$$

Diese Kurve ist also in der Umgebung von  $\xi = 0$  regulär; um nun zu zeigen, daß sie im Inneren des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  verläuft, wollen wir die Krümmungen  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\rho}$  von  $\bar{e}$ ,  $\bar{C}$  und  $\bar{d}$  im Punkte  $P_1$  vergleichen.

Da diese drei Kurven im Punkte  $P_1$  die  $\xi$ -Achse berühren, so wird man haben

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \left( \frac{d^2 \psi}{d \xi^2} \right)_{\xi=0, \nu=0} = b_{02}, \\ \bar{\sigma} &= \left( \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} \right)_{\xi=0, \mu=0} = a_{02}, \\ \bar{\rho} &= \left( \frac{d^2 \chi}{d \xi^2} \right)_{\xi=0} = 2a_{02} - b_{02}. \end{aligned}$$

\*) Die Koeffizienten  $a, b$  sind reguläre Funktionen von  $x_1, y_1$ .

Hieraus zieht man

$$(94) \quad \bar{\rho} - \bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \bar{\tau} = a_{02} - b_{02}.$$

Nun ist nach (54) pag. 472

$$(95) \quad \bar{\sigma} - \bar{\tau} = \frac{\Omega(x_1, y_1)}{F_1 \sin(\bar{\vartheta}_1 - \vartheta_1)} \neq 0,$$

folglich  $(a_{02} - b_{02})$  von Null verschieden. Die Kurve  $\bar{C}_1$  liegt also zwischen  $\bar{e}$  und  $\bar{d}$  (Fig. 12); da nun schon  $\bar{C}_1$ , wie wir sagten, im Inneren des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  verläuft, so ist dies auch für  $\bar{d}$  richtig.

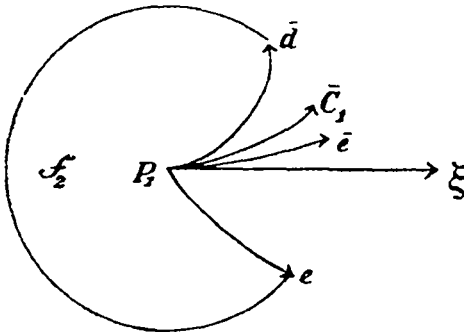


Fig. 12.

Aus der Tatsache, daß  $(a_{02} - b_{02}) \neq 0$  ist, folgt nun weiter, daß man die Gleichung (92) nach  $\xi$  auflösen kann, daß also die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  der Punkte von  $\bar{d}$  sich in der Umgebung von  $\nu = 0$  als eindeutige reguläre Funktionen von  $\nu$  darstellen lassen. Die Größe  $\nu$  wählen wir aber gleich der Tangente des Winkels, den die Anfangsrichtung der Extremalen

$$\eta = \psi(\xi, \nu)$$

mit der Richtung  $\bar{\vartheta}_1$  der  $\xi$ -Achse macht, sie ist also eineindeutig auf die Extremalen des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  bezogen. Jeder Extremalen des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  in einer gewissen Umgebung von  $\bar{e}$  entspricht also ein einziger Punkt von  $\bar{d}$ ; da nun aber  $\bar{d}$  innerhalb des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  verläuft und jeder Punkt von  $\mathfrak{F}_1$  eine einzige Extremale enthält, so sehen wir, daß die Beziehung der Kurve  $\bar{d}$  zu den Extremalen des Feldes eine eineindeutige ist.

Wenn wir ferner beachten, daß

$$\left( \frac{d}{d\nu} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right)_{\nu=0} = \left( \frac{d\xi}{d\nu} \right)_{\nu=0} = \frac{1}{a_{02} - b_{02}} > 0$$

ist, und daß die Koeffizienten von  $\chi(\xi)$  in der Gleichung (93) stetige Funktionen von  $x_1$  und  $y_1$  sind, so können wir sagen:

Es gibt eine für das ganze Gebiet  $T$  gültige Konstante  $N$  von der Eigenschaft, daß für sämtliche Werte

$$\nu \leq N$$

die Kurve  $\bar{d}$ , welche irgend einem Punkte von  $T$  entspricht, regulär und auf die Extremalen des Feldes  $\mathfrak{F}_1$  eineindeutig bezogen ist; daß ferner für die Koordinaten  $\xi(N), \eta(N)$  desjenigen Punktes dieser Kurve, der dem Werte  $\nu = N$  entspricht, die Beziehung gilt

$$\xi(N)^2 + \eta(N)^2 \geq P,$$

wo  $P$  wieder eine für das ganze Gebiet  $T$  geltende Konstante bedeutet.



Man kann hierbei  $N$  so klein wählen, daß die Größe

$$\xi(\nu)^2 + \eta(\nu)^2$$

monoton mit  $\nu$  wächst, wenn diese letzte Größe das Intervall  $0 \leq \nu \leq N$  beschreibt.

Führt man die positive, von Null verschiedene Größe

$$\varepsilon = \arctg N < \frac{\pi}{2}$$

ein, so sind für sämtliche Punkte  $P_1$  des perfekten Gebietes  $T$  die Extremalen mit den Anfangsrichtungen

$$\psi = \bar{\vartheta}_1 + \varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 - \varepsilon),$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

starke Extremalen im Punkte  $P_1$  und werden für diejenigen Punkte des Feldes  $\mathfrak{F}_1$ , die im Inneren eines Kreises mit dem Radius  $\varrho_2$  liegen, ebenfalls stark sein; für  $\varrho_2$  kann eine für das ganze Gebiet  $T$  geltende Konstante gewählt werden, die der Bedingung

$$0 < \varrho_2 \leq P \leq \varrho_1$$

genügt.

Fassen wir diese sämtlichen Ergebnisse zusammen, so sehen wir, daß wir in der Umgebung jedes Punktes von  $T$  ein Feld  $\mathfrak{F}_2$  konstruieren können, das durch die Kurve  $\bar{d}$ , den Kreis mit dem Radius  $\varrho_2$  und die Extremale  $e$  begrenzt wird (Fig. 13).

In jedem Punkte des Inneren von  $\mathfrak{F}_2$  sind die Extremalen stark und die Punkte von  $\bar{d}$  sind Knickpunkte dieser Extremalen.

Wenn wir jetzt zu den Ergebnissen des § 6 zurückgreifen, indem wir die dort vorkommende Kurve  $\Gamma = 0$  durch unsere Kurve  $\bar{d}$  ersetzen, so sehen wir, daß der zweite Zweig der in  $\bar{d}$  gebrochenen diskontinuierlichen Lösungen die Umgebung des Extremalenstückes  $e$  eindeutig und lückenlos überdeckt.

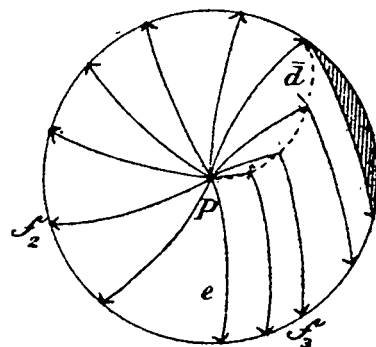


Fig. 13.

Da ferner die Kurve  $\bar{d}$  im Punkte  $P_1$  die Extremale  $e$  nicht berührt, sondern diese zwei Kurven einen Winkel bilden, der nach (71), pag. 482, größer als die positive Größe  $h$  ist, so ist die der Determinante (63) entsprechende Funktionaldeterminante für den Punkt  $P_1$  von Null verschieden. Nun ist aber diese Größe eine kontinuierliche Funktion von  $x_1$  und  $y_1$ , also können wir wieder die Existenz einer positiven Konstante

$$\varrho_3 \leq \varrho_2$$

feststellen, mit der Eigenschaft, daß die zweiten Zweige der starken diskontinuierlichen Lösungen, die wir betrachten, den von  $\mathfrak{F}_2$  nicht über-

deckten Sektor eines Kreises mit dem Radius  $\rho_3$  lückenlos ausfüllen. Diese Kurven bilden folglich ein Feld, das wir mit  $\mathfrak{F}_3$  bezeichnen.

Die Felder  $\mathfrak{F}_2$  und  $\mathfrak{F}_3$  liegen außerhalb voneinander und bilden zusammen ein Feld  $\mathfrak{F}$  von starken Extremalen, die sämtlich durch  $P_1$  gehen und das Innere des Kreises mit dem Radius  $\rho_3$  eindeutig und lückenlos ausfüllen. Hiermit ist die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung erwiesen.

### § 9.

#### Der Osgoodsche Satz.

Das kreisförmige Feld  $\mathfrak{F}$ , das wir konstruiert haben, ist nicht derart, daß man jeden Punkt von  $\mathfrak{F}$  mit dem Mittelpunkte des Kreises durch eine Extremale verbinden kann, die *vollständig im Inneren* des Kreises verläuft.\*) Diese Eigenschaft besteht aber, wie wir jetzt zeigen wollen, wenn wir den Endpunkt des betrachteten Extremalenstückes hinreichend nahe an  $P_1$  wählen.

Es genügt offenbar, diesen Satz für diskontinuierliche Lösungen zu bestätigen. Wenn man die Größe  $\rho_2$ , die wir im vorigen Paragraphen betrachteten, kleiner als  $\frac{\rho_1}{2}$  wählt, so macht nach dem Bliss-

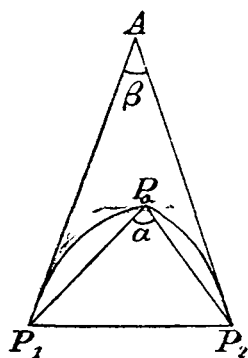


Fig. 14.

Resultate (pag. 484) die Tangente in einem beliebigen Punkte der Zweige einer der diskontinuierlichen Lösungen  $P_1P_0P_2$  (Fig. 14) des Feldes  $\mathfrak{F}$  mit den geraden Linien  $P_1P_0$  und  $P_0P_2$  einen Winkel, der kleiner als  $\varepsilon$  ist. Der Kurvenzug  $P_1P_0P_2$  liegt also vollständig im Inneren eines Dreiecks  $P_1AP_2$ , dessen Seiten  $P_1A$  und  $P_2A$  mit den Geraden  $P_1P_0$  und  $P_0P_2$  den Winkel  $\varepsilon$  machen. Außerdem ist der Winkel, den die Zweige der diskontinuierlichen Lösung am Knickpunkte machen, nach Fig. 6 immer größer als  $(\pi - H)$ , wo  $H$  dieselbe Bedeutung hat wie in der Formel (71), pag. 482. Hieraus folgt nach Fig. 14

$$\alpha \geq (\pi - H - 2\varepsilon), \quad \beta \geq (\pi - H - 4\varepsilon);$$

die Größe  $\beta$  ist positiv, wenn man  $\varepsilon$  hinreichend klein gewählt hat.

Man kann also eine Größe  $\kappa < 1$  angeben mit der Eigenschaft, daß sämtliche Extremalenzüge des Feldes  $\mathfrak{F}$ , deren Endpunkt vom Anfangspunkte um weniger als  $\rho$  entfernt ist, innerhalb eines Kreises verlaufen, dessen Mittelpunkt in  $P_1$  liegt und dessen Radius gleich  $\frac{\rho}{\kappa}$  ist.

Bedeutet jetzt  $P$  einen beliebigen Punkt des Gebietes  $T$  und  $Q$  einen Punkt, dessen Entfernung vom ersten

\*) Man vergleiche die Fig. 13.

$$PQ \leq \frac{\kappa^2 \varrho_s}{4}$$

ist, so liegt die Extremale  $e_P^Q$  im Inneren eines Kreises mit dem Radius  $\frac{\kappa \varrho_s}{4}$ , dessen Mittelpunkt in  $P$  liegt:

$$(96) \quad e_P^Q < \left( P, \frac{\kappa \varrho_s}{4} \right).$$

Es sei  $S$  ein beliebiger Punkt dieses Kreises und  $L$  eine willkürliche Kurve, die innerhalb desselben Kreises verläuft,  $P$  mit  $Q$  verbindet und  $S$  enthält. Es ist also

$$(97) \quad PS \leq \frac{\kappa \varrho_s}{4}, \quad L_P^Q < \left( P, \frac{\kappa \varrho_s}{4} \right).$$

Wir wollen den Wert des Integrals

$$L_P^Q = L_P^S + L_S^Q,$$

längs  $L$  genommen, mit  $e_P^Q$  vergleichen.

Da  $S$  sich im Inneren des Kreises  $\left( P, \frac{\kappa \varrho_s}{4} \right)$  befindet, so existiert eine Extremale  $e_P^S$ , für welche die Beziehung gilt

$$(98) \quad e_P^S < \left( P, \frac{\varrho_s}{4} \right).$$

$L_P^S$  genügt vermöge (97) derselben Bedingung; die Weierstraßsche Konstruktion mittels der  $E$ -Funktion ist also möglich und man hat

$$(99) \quad e_P^S \leq L_P^S.$$

Ferner ist die Entfernung der zwei Punkte  $S$  und  $Q$

$$SQ \leq SP + PQ \leq \frac{\kappa \varrho_s}{4} + \frac{\kappa^2 \varrho_s}{4} < \frac{\kappa \varrho_s}{2}.$$

Also existiert die starke Extremale  $e_S^Q$  und sie genügt der Bedingung

$$(100) \quad e_S^Q < \left( S, \frac{\varrho_s}{2} \right).$$

Für das Stück  $L_S^Q$  der Vergleichskurve erhält man nun

$$L_S^Q < \left( P, \frac{\kappa \varrho_s}{4} \right) < \left( S, \frac{\kappa \varrho_s}{4} + SP \right) < \left( S, \frac{\kappa \varrho_s}{2} \right).$$

Da sowohl  $e_S^Q$  wie auch  $L_S^Q$  innerhalb des Kreises  $\left( S, \frac{\varrho_s}{2} \right)$  liegen, ist auch hier wieder die Weierstraßsche Konstruktion möglich, und man erhält

$$(101)_c \quad e_S^Q \leq L_S^Q.$$

Aus (100) erhält man weiter

$$(102) \quad e_S^Q < \left( P, \frac{\varrho_s}{2} + SP \right) < \left( P, \frac{3\varrho_s}{4} \right).$$

Der Kurvenzug  $e_P^S + e_S^Q$  verläuft also wegen (98) und (102) ebenso wie auch die Extremale  $e_P^Q$  innerhalb des Kreises  $(P, \rho_3)$  und die Weierstraßsche Konstruktion liefert

$$e_P^S + e_S^Q - e_P^Q = \varepsilon(S, Q) \geq 0.$$

Die Größe  $\varepsilon(S, Q)$  ist immer positiv und verschwindet dann und nur dann, wenn  $S$  sich auf der Extremalen  $e_P^Q$  befindet.

Durch Heranziehen von (99) und (101) erhält man endlich

$$L_P^Q - e_P^Q \geq \varepsilon(S, Q) \geq 0.$$

Den hiermit bewiesenen Osgoodschen Satz kann man etwas allgemeiner folgendermaßen formulieren:

*Ist  $P_1$  ein Punkt der  $xy$ -Ebene, für welchen eine einzige starke diskontinuierliche Lösung existiert und die Invarianten  $\Psi$  und  $\Omega$  nicht verschwinden, so kann man zwei perfekte Gebiete  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  bestimmen, die ineinander enthalten sind,  $P_1$  umgeben — also den Beziehungen*

$$\mathfrak{G}_1 > \mathfrak{G}_2 > P_1$$

*genügen — und folgende Eigenschaften besitzen:*

1. *Jeder Punkt  $P_2$  des Gebietes  $\mathfrak{G}_1$  kann und zwar auf eine einzige Weise mit  $P_1$  durch eine starke Extremale verbunden werden, die das Gebiet  $\mathfrak{G}_2$  nicht verläßt.*

2. *Ist  $S$  ein beliebiger Punkt von  $\mathfrak{G}_2$ , der nicht auf dem Extremalenstück  $e_{P_1}^{P_2}$  liegt, so kann man ihm eine von Null verschiedene Zahl  $\varepsilon(P_2, S)$  zuordnen; der Wert des Integrals  $J$  längs einer beliebigen Kurve, die vollständig innerhalb  $\mathfrak{G}_2$  verläuft,  $P_1$  mit  $P_2$  verbindet und  $S$  enthält, ist um mindestens  $\varepsilon(P_2, S)$  größer als der Wert von  $J$ , längs des Extremalenstückes  $e_{P_1}^{P_2}$  genommen.*

3. *Ist  $T_0$  ein perfektes Gebiet von lauter regulären Punkten des Variationsproblems, und  $T$  ein Gebiet derselben Beschaffenheit, das vollständig im Inneren von  $T_0$  sich befindet, so kann man, wenn  $P_1$  das Gebiet  $T$  durchläuft, für  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  Kreisflächen wählen, deren Radius fest ist und deren Mittelpunkt in  $P_1$  liegt.*

Die Kurven, welche die Extremalen des Büschels transversal schneiden, sind geschlossene Kurven  $D$ , deren Tangente sich *kontinuierlich* dreht, wenn man die Kurve beschreibt. Sie bilden eine Schar von ineinanderliegenden Kurven, die in bezug auf unser Variationsproblem den Charakter einer Schar von konzentrischen geodätischen Kreisen besitzt. Wählt man in dem eben ausgesprochenen Satze  $\mathfrak{G}_1$  derart, daß der Rand dieses Gebietes mit einer der Kurven  $D$  zusammenfällt, so ist  $\mathfrak{G}_1$  mit  $\mathfrak{G}_2$  identisch und

der Osgoodsche Satz vereinfacht sich in entsprechender Weise. Man kann übrigens für jeden Punkt  $P$  des Gebietes  $T$  diese Kurve  $D$  so wählen, daß das Minimum ihrer Entfernung von  $P$  in gewöhnlicher Maßbestimmung eine Konstante überschreitet.

Den Nachweis dieser sämtlichen Tatsachen, der übrigens sehr nahe liegt, will ich nicht bringen, weil die Eigenschaften der Kurven  $D$  im folgenden nirgends gebraucht werden.

---

## Kapitel II.

### Die aller kürzesten Wege innerhalb eines gegebenen Gebietes.

#### § 10.

#### Die Existenz einer Grenzkurve.

Das Hilbertsche Verfahren, das wir in der Einleitung erwähnt haben, ist eine Anwendung des von E. Zermelo ausdrücklich formulierten „Auswahlprinzips in der Mengenlehre“<sup>\*)</sup>; ausgehend von der Existenz einer unteren Grenze des Kurvenintegrals für Kurven, welche zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbinden, wird nämlich angenommen, daß es eine abzählbare Menge von Kurven gibt, für welche dieses Kurvenintegral gegen seine untere Grenze konvergiert. Diese Schlußweise wäre ohne Benutzung des erwähnten Prinzips nicht denkbar. Ähnlich verhält es sich, wenn wir aus einer unendlichen Punktmenge eine Teilmenge aussondern, welche eine gegebene Häufungsstelle der ursprünglichen Menge besitzt und sonst keine andere Häufungsstelle hat.

Der eigentliche Beweis von Hilbert beruht auf gewissen allgemeinen Eigenschaften von Kurvenscharen, die unabhängig von der Variationsrechnung sind, und deren Ableitung wir vorausschicken wollen.

Es sei eine abzählbare Menge  $\mathfrak{M}_0$  von ebenen Kurven gegeben, die sämtlich eine endliche Länge haben und zwei feste Punkte  $P_1, P_2$  der Ebene verbinden. Dann kann man aus dieser Kurvenschar immer eine Teilmenge  $\mathfrak{M}$  herausgreifen, die gegen eine „Grenzkurve“ konvergiert.

Letzteres ist folgendermaßen zu verstehen. Man bilde die Kurven der Gesamtmenge  $\mathfrak{M}_0$  eineindeutig auf die Strecke  $\overline{O1}$  ab, auf eine be-

---

<sup>\*)</sup> Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann., Bd. 59, pag. 514.

liebige, aber ein- für allemal bestimmte Weise. Dann kann die Teilmenge  $\mathfrak{M}$  so bestimmt werden, daß die einem und demselben Punkte der Strecke  $\overline{01}$  entsprechenden Punkte der Kurven von  $\mathfrak{M}$  einen einzigen Häufungspunkt besitzen. Die Menge dieser Häufungspunkte ist perfekt. Jedem dieser Punkte entspricht ein einziger Punkt der Strecke  $\overline{01}$ , aber nicht umgekehrt.

Es seien

$$(1) \quad \mathfrak{M}_0 : C_1^0, C_2^0, C_3^0, \dots$$

die Kurven der Menge  $\mathfrak{M}_0$ ,

$$l_1^0, l_2^0, l_3^0, \dots$$

die Längen dieser Kurven, wenn man sie von  $P_1$  bis  $P_2$  mißt. Es ist der Voraussetzung nach für jedes  $n$

$$l_n^0 < A;$$

hieraus schließen wir, daß die Kurven selbst sämtlich im Endlichen liegen.

Auf jeder Kurve  $C_n^0$  der Schar (1) bestimmen wir die Punkte  $P_n^0(\vartheta)$  durch die Eigenschaft, daß die Länge von  $C_n^0$ , wenn man die Kurve von  $P_1$  bis  $P_n^0(\vartheta)$  mißt, gleich  $\vartheta l_n^0$  sei; hier bedeutet  $\vartheta$  irgend eine positive Zahl zwischen 0 und 1. Auf diese Weise haben wir die einfachste stetige eindeutige Abbildung der Kurven der Schar (1) auf die Strecke  $\overline{01}$  realisiert; für das Folgende hätte aber eine beliebige andere Abbildung dieselben Dienste geleistet.

Wir wählen auf der Strecke  $\overline{01}$  eine abzählbare, überall dichte Menge von Punkten

$$(2) \quad \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots,$$

z. B. die Menge der rationalen Zahlen. Dieser entspricht auf jeder der Kurven  $C_n^0$  eine Menge derselben Eigenschaft.

Fassen wir nun zunächst diejenigen Punkte  $P_n^0(\vartheta_1)$  ins Auge, die dem Punkte  $\vartheta_1$  entsprechen, so bilden sie eine unendliche, ganz im Endlichen liegende Punktmenge, die mindestens die eine Häufungsstelle  $H(\vartheta_1)$  besitzt.

Aus der Schar (1) kann man also eine Schar

$$(3) \quad \mathfrak{M}_1 : C_1^1, C_2^1, C_3^1, \dots$$

absondern, derart, daß die Punkte  $P_n(\vartheta_1)$  dieser Schar keinen anderen Häufungspunkt als  $H(\vartheta_1)$  besitzen. Für jede Schar von unendlich vielen Kurven, die aus lauter Kurven von  $\mathfrak{M}_1$  — jede einmal genommen — besteht, wird  $H(\vartheta_1)$  Häufungspunkt der Punkte  $P(\vartheta_1)$  sein.

Man sondere jetzt aus  $\mathfrak{M}_1$  eine Schar von unendlich vielen Kurven

$$\mathfrak{M}_2 : C_1^2, C_2^2, C_3^2, \dots$$

derart ab, daß die Punkte  $P_n^2(\vartheta_2)$  dieser Kurven eine einzige Häufungsstelle besitzen, die wir mit  $H(\vartheta_2)$  bezeichnen.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bilde man die Schar

$$\mathfrak{M}_i : C_1^i, C_2^i, C_3^i, \dots$$

mit der Eigenschaft, daß jede der unendlichen Punktmengen

$$P_1^i(\vartheta_k), P_2^i(\vartheta_k), P_3^i(\vartheta_k), \dots$$

für

$$k = 1, 2, 3, \dots, i$$

einen einzigen Häufungspunkt  $H(\vartheta_k)$  besitzt.

Man betrachte jetzt die Schar der Kurven

$$C_1^1, C_2^2, C_3^3, \dots,$$

die wir abkürzend mit

$$(4) \quad \mathfrak{M} : C_1^1, C_2^2, C_3^3, C_4^4, \dots$$

bezeichnen. Für die Kurven dieser Schar hat jede der Punktmengen

$$P_1^1(\vartheta_k), P_2^2(\vartheta_k), P_3^3(\vartheta_k), \dots$$

einen und nur einen Häufungspunkt  $H(\vartheta_k)$  und dieses für ein beliebiges  $k$ .

Nun besitzen aber auch die Punkte  $P(\vartheta)$ , die einem willkürlichen Wert  $\vartheta$  der Strecke  $\overline{01}$  entsprechen, ebenfalls mindestens eine Häufungsstelle  $H(\vartheta)$ . Ich behaupte, daß sie keine von  $\overline{H(\vartheta)}$  verschiedene Häufungsstelle  $H'(\vartheta)$  haben können. Denn, angenommen dies wäre der Fall, so sei  $\delta$  der Abstand von  $H(\vartheta)$  und  $H'(\vartheta)$ ; für alle  $\vartheta_v$  der Reihe (2), die der Ungleichheit genügen

$$|\vartheta_v - \vartheta| < \frac{\delta}{3},$$

sind die Punkte  $P_m(\vartheta_v)$  und  $P_m(\vartheta)$  um weniger als  $\frac{\delta}{3}$  entfernt. Hieraus folgt, daß der Punkt  $H(\vartheta_v)$  ebensowohl von  $H(\vartheta)$  als auch von  $H'(\vartheta)$  um weniger als  $\frac{\delta}{3}$  entfernt sein müßte, was unmöglich ist.

Durch die Kurvenschar (4) wird also eine Punktmenge definiert, deren Elemente  $H(\vartheta)$  eindeutig auf die Strecke  $\overline{01}$  bezogen sind; wir bezeichnen diese Menge mit  $\mathfrak{H}$ .

Jeder Punkt  $H(\vartheta)$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathfrak{H}$ , da man Punkte  $H(\vartheta_v)$  der Menge finden kann, die um weniger als  $\delta$  von  $H(\vartheta)$  entfernt sind.

Umgekehrt gehört aber jede Häufungsstelle von Punkten

$$(5) \quad H(\vartheta_1), H(\vartheta_2), H(\vartheta_3), \dots$$

der Menge  $\mathfrak{H}$  an. Es genügt (5) so zu wählen, daß sie eine einzige Häufungsstelle  $H$  besitzen. Die Zahlen  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots$  werden ebenfalls mindestens einen Häufungspunkt  $\vartheta$  haben. Der entsprechende Punkt  $H(\vartheta)$

wird, nach dem vorigen, Häufungspunkt von (5) und folglich mit  $H$  identisch sein.

Die Punktmenge  $H(\vartheta)$  ist also perfekt; man könnte auch bemerken, daß sie zusammenhängend ist. Das Lemma, das wir im folgenden brauchen ist also bewiesen.

### § 11.

#### Anwendung auf Variationsprobleme.

Es sei ein Gebiet  $T$  in der  $xy$ -Ebene gegeben, innerhalb dessen das Variationsproblem

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y; x', y') dt$$

positiv definit ist. Es mögen also für alle Linienelemente des Gebietes  $T$  die Beziehungen gelten

$$M \geq F\left(x, y; \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) \geq m > 0;$$

für jede Kurve innerhalb des Gebietes  $T$ , deren Länge  $L$  ist, hat man folglich

$$(6) \quad ML \geq J \geq mL.$$

Sind  $A_1, A_2$  irgend zwei Punkte von  $T$ , so ist der Wert des Integrals längs einer beliebigen Kurve, die  $A_1$  mit  $A_2$  verbindet und innerhalb  $T$  verläuft, sicher größer als  $m \cdot A_1 A_2$ , wo  $A_1 A_2$  die Entfernung der zwei Punkte  $A_1$  und  $A_2$  bedeutet. Die Integrale  $J$  längs solcher Kurven, die  $T$  nicht verlassen, haben also eine untere Grenze  $u$ , die von Null verschieden ist; es sei

$$(7) \quad C_1^0, C_2^0, C_3^0, \dots$$

eine Schar von Kurven, für welche die entsprechenden Werte

$$J_1^0, J_2^0, J_3^0, \dots$$

des Integrals gegen  $u$  konvergieren (also keinen anderen Häufungswert besitzen). Es genügt in die Schar (7) solche Kurven aufzunehmen, deren Länge  $l$  die Ungleichheit

$$(8) \quad l \leq \frac{u}{m}$$

befriedigt, denn für längere Kurven ist nach (6) sicher

$$J > u.$$

Sämtliche Voraussetzungen des vorigen Paragraphen sind also erfüllt und man wird aus (7) eine neue Kurvenschar

$$(9) \quad C_1, C_2, C_3, \dots$$



absondern können, die gegen eine perfekte Menge von Grenzpunkten  $H(\vartheta)$  konvergiert. Die entsprechenden Werte

$$J_1, J_2, J_3, \dots$$

des Integrals konvergieren gegen seine untere Grenze  $u$ . Der Umstand, daß wir es hier mit einem Variationsproblem zu tun haben, gestattet aber, über die Punktmenge  $\mathfrak{S}$  mehr auszusagen als bisher.

Es seien  $\vartheta_1, \vartheta_2$  irgend zwei Zahlen zwischen 0 und 1 und man habe z. B.

$$\vartheta_2 > \vartheta_1;$$

wir bezeichnen mit  $[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$  den Wert des Integrals auf der Kurve  $C_n$  vom Punkte  $P_n(\vartheta_1)$  bis zum Punkte  $P_n(\vartheta_2)$ .

Die Größen  $[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$  haben, wenn man  $n$  variiert, einen einzigen Häufungswert. Im entgegengesetzten Falle würde man zwei Scharen von Kurven aus (9) aussondern können, nämlich

$$C_{\nu_1}, C_{\nu_2}, C_{\nu_3}, \dots, C_{\nu_n}$$

und

$$C_{\mu_1}, C_{\mu_2}, C_{\mu_3}, \dots, C_{\mu_n}$$

so daß

$$\lim_{n=\infty} [J_{\nu_n}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \alpha, \quad \lim_{n=\infty} [J_{\mu_n}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \beta$$

und  $\alpha > \beta$  sei.

Dann würde man aber eine neue Kurvenschar konstruieren können, für welche die  $n^{\text{te}}$  Kurve  $C_n$  von  $A_1$  bis  $P_{\nu_n}(\vartheta_1)$  und von  $P_{\nu_n}(\vartheta_2)$  bis  $A_2$  mit  $C_{\nu_n}$  zusammenfällt, während das Intervall zwischen  $P_{\nu_n}(\vartheta_1)$  und  $P_{\nu_n}(\vartheta_2)$  aus zwei geradlinigen Stücken bis  $P_{\mu_n}(\vartheta_1)$  und  $P_{\mu_n}(\vartheta_2)$  und einem Stücke der Kurve  $C_{\mu_n}$  besteht (Fig. 15).

Da die Punkte  $P_{\mu_n}(\vartheta_i), P_{\nu_n}(\vartheta_i)$  beide gegen  $H(\vartheta_i)$ , und folglich die geradlinigen Stücke mit  $n = \infty$  gegen Null konvergieren, so würde die Gleichung gelten

$$\lim_{n=\infty} \bar{J}_n = u + \beta - \alpha < u,$$

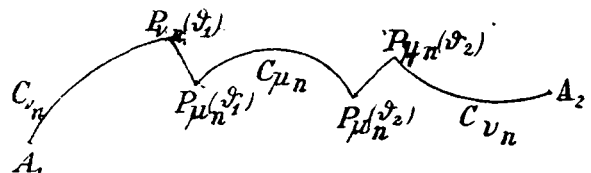


Fig. 15.

was unmöglich ist.

Hieraus folgt die Existenz der Größe  $\lim_{n=\infty} [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ , die wir mit  $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$  bezeichnen:

$$\lim_{n=\infty} [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = [u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Diese Größe ist, wie man durch ganz analoge Betrachtungen zeigen kann, die untere Grenze der Werte des Integrals  $J$  längs Kurven, die  $H(\vartheta_1)$  mit  $H(\vartheta_2)$  verbinden.

Also hat man

$$\overline{H(\vartheta_1) H(\vartheta_2)} M \geq [u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Im übrigen ist wegen unserer Konstruktion

$$[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \geq m(\vartheta_2 - \vartheta_1) \overline{A_1 A_2} > 0,$$

also auch

$$[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \geq m(\vartheta_2 - \vartheta_1) \overline{A_1 A_2},$$

und die Entfernung der zwei Punkte  $H(\vartheta_1)$  und  $H(\vartheta_2)$  ist größer als  $\frac{m(\vartheta_2 - \vartheta_1) \overline{A_1 A_2}}{M}$ , also von Null verschieden.

Ähnlich gelten, wegen (8), die Ungleichheiten

$$(10) \quad \overline{P_n(\vartheta_1) P_n(\vartheta_2)} m \leq [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \leq M \frac{u}{m} (\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

also ist auch

$$\overline{H(\vartheta_1) H(\vartheta_2)} \leq \frac{M u (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{m^2}.$$

Mit anderen Worten: Die Punktmenge  $\mathfrak{S}$  ist eineindeutig stetig auf die Strecke  $\overline{01}$  abbildbar; sie stellt eine stetige Kurve dar, die *keine Doppelpunkte* besitzt und eine endliche Länge im Jordanschen Sinne hat.

Wir nehmen jetzt an, daß innerhalb des Gebietes  $T$  die Invarianten  $\Psi$  und  $\Omega$  nie verschwinden, also die Größe  $\varrho_3$ , die wir im § 8 definierten, existiert.

Wenn für irgend einen Wert  $\vartheta_1$  der Punkt  $H(\vartheta_1)$  im Inneren des Gebietes  $T$  liegt, so kann man  $|\vartheta_2 - \vartheta_1|$  so klein wählen, daß für jeden Wert von  $\vartheta$ , für welchen die Beziehungen gelten

$$\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2,$$

der entsprechende Punkt  $H(\vartheta)$  im Inneren des Kreises mit dem Radius  $\varrho_3$  liegt, dessen Mittelpunkt  $H(\vartheta_1)$  ist. Die starke Extremale, welche  $H(\vartheta_1)$  mit  $H(\vartheta_2)$  verbindet, muß mit unserer Häufungspunktkurve wegen des Osgoodschen Satzes identisch sein.

Die Kurven der Schar (7) nähern sich überdies gleichmäßig der Häufungspunktkurve  $\mathfrak{S}$ : Wählt man nämlich

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \leq \frac{m^2 \varrho_3}{2Mu},$$

so ist nach (10) die Entfernung der Punkte  $P_n(\vartheta_1)$  und  $P_n(\vartheta_2)$  für jedes  $n$  kleiner als  $\frac{\varrho_3}{2}$ ; hierauf kann man  $\nu$  derart bestimmen, daß für jedes  $n > \nu$  die Entfernungen

$$\overline{P_n(\vartheta_1) H(\vartheta_1)} \quad \text{und} \quad \overline{P_n(\vartheta_2) H(\vartheta_2)}$$

kleiner als  $\frac{\rho_3}{4}$  werden. Dann verläuft der ganze Kurvenzug, der aus den geradlinigen Stücken  $\overline{H(\vartheta_1)P_n(\vartheta_1)}$ ,  $\overline{H(\vartheta_2)P_n(\vartheta_2)}$  und dem Stück der Kurve  $C_n$  zwischen  $P_n(\vartheta_1)$  und  $P_n(\vartheta_2)$  besteht, im Inneren des Kreises vom Radius  $\rho_3$  und vom Mittelpunkt  $H(\vartheta_1)$ . Wenn man nun mit  $\mathcal{G}$  ein beliebiges Gebiet bezeichnet, das das Kurvenstück

$$H(\vartheta), \quad \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$$

umgibt, und ganz im Inneren dieses letzten Kreises liegt, so hat die Größe  $\epsilon$ , die wir pag. 492 definierten, für jede Kurve, die nicht vollständig innerhalb  $\mathcal{G}$  verläuft, eine von Null verschiedene positive untere Grenze; man wird also  $\mu$  so groß wählen können, daß für jedes  $n > \mu$  das Kurvenstück

$$P_n(\vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$$

gänzlich innerhalb  $\mathcal{G}$  liegt.

Das Integral längs der Häufungspunktkurve

$$H(\vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$$

ist übrigens genau gleich  $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ ; wäre dies nicht der Fall, so würde man innerhalb  $\mathcal{G}$  Kurven konstruieren können, für welche das Integral  $J$  einen kleineren Wert annehmen würde als für die Extremale

$$H(\vartheta) : \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2;$$

dieses ist aber mit den Eigenschaften der Weierstraßschen  $E$ -Funktion in direktem Widerspruch.

Die angegebenen Resultate lassen sich auf ein beliebig langes Stück der Häufungspunktkurve, das vollständig im Inneren des Gebietes  $T$  verläuft, übertragen, da man dann immer das Intervall der Strecke  $\overline{O\bar{1}}$ , das dem ganzen Stücke entspricht, in eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen zerlegen kann, für welche unsere sämtlichen Ungleichheiten gelten.

## § 12.

### Eigenschaften des Randes.

Wir wollen jetzt unsere Betrachtungen auf diejenigen Teile der Häufungspunktkurve ausdehnen, die mit Stücken des Randes zusammenfallen.

Es ist zunächst klar, daß man diejenigen Teile des Randes außer Betracht lassen muß, welche die Eigenschaft haben, daß man zwei hinreichend benachbarte ihrer Punkte durch eine starke Extremale verbinden kann, welche vollständig im Inneren des Gebietes  $T$  verläuft; solche Randstücke können nie mit Teilen der Häufungspunktkurve zusammenfallen.

Wenn man zweitens je zwei hinreichend benachbarte Punkte des betrachteten Randstückes durch eine starke *kontinuierliche* Extremale verbinden kann, die außerhalb des Gebietes  $T$  verläuft, wenn es also in jedem Punkte dieses Randstückes eine starke Extremale gibt, welche den Rand von  $T$  berührt, so kann man mit Hilfe einer Methode, die Bliss angegeben hat\*), ein Feld konstruieren, das die Weierstraßsche Konstruktion der  $E$ -Funktion ermöglicht. Es ist dann eventuell dieser Teil des Randes  $R$  mit einem Teile von  $H(\vartheta)$  identisch; die Resultate des vorigen Paragraphen, was die Gleichmäßigkeit der Konvergenz und den Wert des Integrals  $J$  betrifft, bleiben erhalten.

Endlich kann es aber vorkommen, daß zwei hinreichend benachbarte Punkte des Randes durch ein diskontinuierliches starkes Extremalenstück verbunden werden können, das gänzlich außerhalb des Gebietes  $T$  verläuft. Dann kann zwar der Rand einen Teil der Kurve  $H(\vartheta)$  bilden, aber der Wert des Integrals  $J$  längs dieser Kurve ist von  $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$  verschieden.

Ein einfaches Beispiel für diesen letzten Fall erhält man, indem man ein Variationsproblem bildet, dessen Indikatrix in jedem Punkte die pag. 466 erwähnten Eigenschaften a), b), c) besitzt, also z. B. in Polarkoordinaten die Gleichung

$$\rho = \sqrt{2} - \cos \vartheta$$

besitzt. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\rho^2 = \sqrt{2}\rho^2 - \rho \cos \vartheta$$

oder

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\sqrt{2}\xi^2 + 2\eta^2 - \xi} = 1.$$

Nun betrachte man das Problem:

$$(11) \quad J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(y^2 + 1)(x'^2 + y'^2) dt}{\sqrt{2x'^2 + 2y'^2 - x'}},$$

das in der ganzen Ebene definit ist und in jedem Punkte die Diskontinuitätsrichtungen

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

aufweist.

Die Invariante  $\Omega$  nimmt hier den Wert an

$$\Omega = -4y,$$

während  $\Psi$  überhaupt nicht verschwinden kann.

\*) Sufficient Conditions for a Minimum with respect to One-sided Variations (Trans. Amer. Math. Soc., vol. V, No. 4, pp. 477—492).

Wir betrachten als Variationsgebiet das Quadrat, dessen Rand aus der Geraden

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad y = 2$$

besteht (Fig. 16).

Will man jetzt den Punkt  $A$  mit  $B$  durch eine Kurve verbinden, die innerhalb des Quadrates  $T$  verläuft und ein absolutes Minimum liefert, so ist die Häufungspunktkurve  $H(\vartheta)$  mit dem Geradenstücke  $AB$  identisch. Das Integral längs dieser Geraden ist aber

$$J_A^B = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 4,283,$$

während die untere Grenze

$$[u]_A^B = 4$$

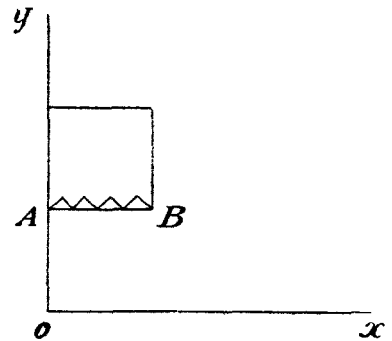


Fig. 16.

ist; man nähert sich dieser Größe, indem man das Integral längs gezackter Polygone nimmt, deren Seiten  $45^\circ$  mit den Koordinatenachsen bilden und eine unendlich abnehmende Länge besitzen.

Wir wollen jetzt die Bedingung, daß  $\Omega$  im ganzen Gebiete  $T$  nicht verschwindet, fallen lassen. Es können dann die Punkte der Kurve

$$\Omega(x, y) = 0$$

in zwei Klassen getrennt werden, je nachdem die Richtung der Tangente von  $\Omega = 0$  mit der einer starken oder der einer schwachen Extremalen zusammenfällt. Hierbei lassen wir den Fall unerledigt, wo  $\Omega = 0$  mit einer der Kurven der Schar  $C, \bar{C}$  (pag. 470) identisch ist.

Im ersten Falle wird man in der Umgebung von hinreichend kleinen Stücken von  $\Omega = 0$  ein Feld konstruieren können, und ein beliebig langes Stück der Kurve  $\Omega = 0$  wird durch eine endliche Anzahl solcher Felder sich überdecken lassen.

Die Kurve  $\Omega = 0$  wird mit keiner Häufungspunktkurve zusammenfallen können und diese Kurve nur in einzelnen Punkten begegnen.

Im zweiten Falle wird die Häufungspunktkurve mit endlichen Stücken von  $\Omega = 0$  zusammenfallen können, in der Regel aber wird das Integral längs  $H(\vartheta)$  einen Wert erhalten, der von seiner unteren Grenze  $u$  verschieden ist.

Wenn man z. B. beim Variationsproblem (11) das Variationsgebiet ganz unbeschränkt läßt, wobei in der ganzen Ebene  $\Psi \neq 0$  ist,  $\Omega$  aber längs der  $x$ -Achse verschwindet, und nach der Häufungspunktkurve fragt, die zwei beliebige Punkte dieser Geraden, z. B. die Punkte  $x = 0$  und

aber ein *schwaches Maximum* und ist unter den gemachten Annahmen gleich  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$  oder 2,141, während die untere Grenze  $u$  hier gleich 2 ist.

Zusammenfassend haben wir also folgendes Resultat erlangt:

*Ist ein positiv definites Variationsproblem  $J$  und ein Gebiet  $T$  gegeben von folgender Beschaffenheit: 1. In seinem Inneren und auf dem Rande  $R$  ist die Invariante  $\Psi \neq 0$ . 2. Kein Punkt des Randes  $R$  kann mit einem unendlich benachbarten Punkte durch eine starke diskontinuierliche Extremale verbunden werden, die außerhalb des Gebietes  $T$  verläuft. 3. Die Kurven  $\Omega(x, y) = 0$  haben in jedem ihrer Elemente die Richtung einer starken Extremalen; dann kann man je zwei Punkte von  $T$  durch eine Kurve  $H(\vartheta)$  verbinden, für welche die untere Grenze  $u$  des Integrals  $J$  erreicht wird.  $H(\vartheta)$  besteht teilweise aus Stücken von  $R$  selbst.*

Die geschilderten Bedingungen sind nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig in dem Sinne, daß jedesmal, wo eine derselben nicht erfüllt ist, man Beispiele angeben kann, für welche der Satz nicht mehr gilt. Wir sind also in den Untersuchungen über starke Extremalen bei definitivem Variationsproblem zu einem gewissen Abschluß gekommen; die singulären Stellen, die wir außer Betracht ließen, sind solcher Natur, daß sie nicht durch allgemeine Betrachtungen erledigt werden können, sondern in jedem einzelnen Falle eigene Methoden erfordern.

### § 13.

#### Bemerkungen über nicht definite Variationsprobleme.

In der Einleitung machten wir schon darauf aufmerksam, daß die Resultate der letzten Paragraphen sich auf reguläre, nicht definite Variationsprobleme nicht übertragen lassen.

Ein Grund dafür ist schon der, daß die Länge der Vergleichskurven zwischen zwei Punkten nicht endlich zu bleiben braucht, wenn man die Kurvenschar (7) (pag. 494)

$$C_1^0, C_2^0, C_3^0, \dots$$

durchläuft; das Hilbertsche Verfahren ist folglich nicht anwendbar.

Die Verhältnisse, die hier vorliegen, lassen sich schon bei ganz einfachen Beispielen charakterisieren.

Man betrachte z. B. das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2}) dt,$$

d. h. das Integral des gewöhnlichen isoperimetrischen Problems in der Ebene, bei welchem man die isoperimetrische Konstante gleich Eins gesetzt hat.

Hier ist

$$F_1 = \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} = \frac{2}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

durchweg positiv. Das Problem ist in jedem Punkte der Ebene schon im engeren Sinne regulär und liefert ein starkes Minimum; die Umgebung jedes Punktes kann mit einem Felde von starken kontinuierlichen Extremalen überdeckt werden.

Hieraus folgt, daß, wenn man längs einer geschlossenen Kurve integriert, die innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes verläuft, das Integral  $J$  einen *positiven* Wert annehmen wird; denn sonst würde von einem Minimum gar nicht die Rede sein können.

Trotzdem kann man, wenn man das Variationsgebiet vergrößert, den Umlauf so wählen, daß das entsprechende Integral einen negativen Wert erhält.

Wenn man nämlich die Kurve im positiven Sinne durchläuft, so ist das Integral gleich der Länge der Kurve vermindert um den Inhalt der Fläche, die sie umschließt; also z. B. für ein Quadrat erhält das Integral den Wert  $a(4 - a)$  und wird negativ, sobald  $a > 4$  ist.

Zu demselben Ergebnisse kommt man auch auf folgendem Wege: Die Extremalen des Problems sind bekanntlich Kreise mit dem Radius 1. Die Enveloppe  $N$  aller Extremalen, die durch einen Punkt gehen, ist ein Kreis vom Radius 2, also eine reguläre geschlossene Kurve ohne Rückkehrpunkt. Nach der allgemeinen Theorie (die sich hier sofort bestätigt) hat das Integral längs dieser Enveloppe  $N$  den Wert Null, während jede geschlossene Kurve, die vollständig innerhalb  $N$  verläuft, ein positives Integral liefert. Die Kurve  $N$  hat ferner die Eigenschaft, daß, wenn man dem Gebiete, das sie umgibt, ein beliebiges, noch so kleines Stück der Ebene hinzufügt, im Inneren des erweiterten Gebietes geschlossene Kurven existieren, die einen negativen Wert des Integrals liefern.

Kurven, welche diese sämtlichen Eigenschaften besitzen, scheinen bei der Behandlung der nicht definiten Variationsprobleme eine wichtige Rolle zu spielen.