Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*).

Di

Francesco Severi a Padova.

Nelle ricerche sia di Geometria che d'Analisi, s'incontra oggi molto spesso, per categorie svariatissime di enti, la questione della *base*, che può formularsi in generale così:

Dato un insieme di elementi qualunque, fissare, se è possibile, alcuni tra essi, in guisa che ogni altro elemento dell' insieme risulti legato agli elementi fissati, mediante operazioni ben definite.

La questione della base è fondamentale nella teoria dei campi di razionalità, e si presenta inoltre nelle ricerche di Dedekind e Weber sulle funzioni razionali appartenenti ad una data curva algebrica; nelle ricerche di Hilbert sui moduli di forme algebriche; nelle ricerche di Hurwitz sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica; nello studio degli integrali abeliani e degl' integrali di Picard; ecc, ecc.

In questo lavoro io stabilisco l'esistenza della base per l'insieme delle curve (algebriche) tracciate sopra una superficie algebrica F, provando che, se più curve della superficie diconsi *algebricamente legate* quando una combinazione lineare (a coefficienti interi e positivi) di alcune di esse, sta in un medesimo sistema algebrico irriducibile, con una combinazione analoga delle rimanenti, *si può determinare un intero positivo ϱ, tale che, fissate comunque sulla superficie F ϱ curve algebricamente distinte, ogni altra curva della F risulti algebricamente legata ad esse* (Teor. VI).

Il numero ϱ dicesi il *numero-base* della superficie; e l'insieme delle ϱ curve algebricamente distinte si dice una *base* per la totalità delle curve algebriche tracciate su F.

---

*) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria trovasi nei «Comptes rendus» del 6 febbraio 1905.

Darò un cenno della via seguita per giungere a questo risultato.

Fissato sopra F un gruppo di curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, \cdots, m_l$, definisco come *matrice discriminante* del gruppo la tabella:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix},$$

ove n_{ii} è il grado virtuale della curva C_i, ed n_{ik} è il numero dei punti comuni alle curve C_i, C_k.

Dimostro poi, in modo puramente geometrico, che l'annullarsi della suddetta matrice (cioè l'annullarsi di tutti i suoi determinanti d'ordine l), dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè le l curve siano algebricamente legate (Teoremi I e II); e ne deduco che le curve logaritmiche di un integrale semplice di 3ª specie, appartenente ad F, son sempre algebricamente legate.

Di quest' ultima proposizione è vera anche la reciproca; sicchè la condizione necessaria e sufficiente affinchè più curve siano legate algebricamente, si può esprimere sotto forma trascendente mediante l'esistenza di un integrale semplice di 3ª specie, che possegga singolarità logaritmiche soltanto lungo quelle curve (Teor. III).

Profittando allora di un teorema fondamentale del sig. Picard, sugli integrali di 3ª specie appartenenti ad una superficie algebrica*), mediante il criterio trascendente sopra riferito, giungo a risolvere la questione della base.

Accanto a questi risultati se ne presentano altri; ma per non dilungarmi di soverchio, riferirò soltanto i più notevoli.

Nel § 5, tenendo conto del fatto che una superficie regolare è caratterizzata dalla mancanza di sistemi algebrici completi, non lineari; nonchè dalla mancanza d'integrali di Picard della 2ª specie**), deduco dal teor. III, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè gl'integrali di Picard appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico-logaritmiche, è che la superficie sia regolare, cioè che il suo ordine di connessione lineare* p_1 *sia uguale ad* 1 (Teor. V).

Resta così risoluta negativamente l'importante questione, più volte

*) Cfr. ad es. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1904); t. II, fascicolo 2°, pag. 241.

**) Per le citazioni relative a questi teoremi, rimando al § 5.

posta dal sig. Picard*), di sapere cioè se esistano superficie col $p_1 = 1$ i cui integrali semplici non si riducano tutti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Il teor. V rende inoltre più stretta l'analogia che, da vari punti di vista, sussiste tra le curve razionali e le superficie regolari.

Infatti anche gl'integrali abeliani appartenenti ad una curva razionale, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Nel § 7 studio l'effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base, e stabilisco, in particolare, che *il numero-base è un invariante relativo,* cioè che rimane immutato per quelle trasformazioni birazionali della superficie, che non introducono curve eccezionali di 1^a specie.**)

Per una trasformazione birazionale qualunque, il numero-base varia come il numero dalle curve eccezionali di 1^a specie.

Nello stesso paragrafo si vedrà inoltre come la considerazione della base dia luogo ad un altro invariante (assoluto).

Alla fine della Memoria (§ 8) deduco dall' esistenza della base *il teorema di Bézout sopra una superficie algebrica qualunque,* calcolando il numero dei punti comuni a due curve qualsiansi C, D della superficie, in funzione dei numeri delle intersezioni di C, D colle curve della base.

In particolare, nel caso del piano, prendendo come base una retta, si ha l'ordinario teorema di Bézout.

Quando le due curve C, D coincidono, la formola che esprime il teorema di Bézout sopra una superficie qualunque, dà il grado virtuale di C; e dalla conoscenza del grado si deduce poi anche l'espressione del genere virtuale, in funzione dei numeri delle intersezioni di C colle curve della base.

L'esistenza della base si conosceva, oltrechè sul piano (e in conseguenza sulle superficie razionali), sulle superficie generali nel loro ordine, ove come base si può assumere una sezione piana***); sulla superficie di Kummer, ove si può pure assumere come base una sezione piana†); sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due

*) Ved. ad es. il rapporto dal titolo, *Sur la théorie des surfaces algébriques,* riprodotto nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (t. IX, 1895, pag. 164); nonchè il Cap. IX (n^0 10, pag. 244) della *Théorie des fonctions algébriques,* t. II.

**) A proposito della distinzione delle curve eccezionali in due specie, ved. il § 3 della Memoria di Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, (3), VI, 1901).

***) Nöther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (Abhandlungen der Berliner Akad., 1882; §§ 11, 12.)

†) Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Math. 1893; pag. 72).

curve algebriche*) (ed in particolare sulle rigate e sulle superficie iperellitiche); e sulle superficie i cui integrali semplici riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche.**)

Il campo delle questioni che si connettono all' esistenza della base, è ben lungi dall' essere esaurito dal presente lavoro! Accennerò p. e. alla questione della *base minima*, che si affaccia in primo posto, quando si vogliano proseguire le indagini in questo campo. Intendo che sopra una superficie F, il cui numero-base sia ϱ, un gruppo di $\varrho_1 \geqq \varrho$ curve, costituisca una base minima, quando nel legame algebrico che passa tra le ϱ_1 curve ed una curva qualunque C di F, sia uguale all' unità il coefficiente della C; senza peraltro che si verifichi la stessa proprietà per meno di ϱ_1 curve.

Sul piano e sopra una superficie generale del proprio ordine, una base minima è costituita da una sezione piana; mentre sopra la superficie di Kummer K una sezione piana non costituisce una base minima, perchè è soltanto il doppio di una curva di K, che *equivale* ad un multiplo di una sezione piana. Però unendo ad una sezione piana le coniche di K, si ottiene ivi una base minima.***)

La base minima si conosce pure sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due curve.†)

Alcuni esempi (come quello sopra addotto della superficie di Kummer) mostrano come per ottenere una base minima, occorre talora aumentare il numero delle curve che costituiscono la base.

§ 1.

Definizioni e notazioni.

1. Siano C_1, C_2 due curve algebriche, tracciate sopra una superficie algebrica (irriducibile) F. Diremo che le due curve sono *algebricamente equivalenti*, quando esiste su F un sistema algebrico di curve, che le contiene entrambe totalmente. Parlando di un sistema algebrico, sottintendiamo sempre, salvo avviso contrario, ch' esso sia „irriducibile“, cioè che riguardando le sue curve come elementi, si abbia come immagine una varietà algebrica irriducibile.

Per denotare l'equivalenza algebrica tra le curve C_1, C_2, scriveremo $C_1 \equiv C_2$.

Se il sistema algebrico che contiene C_1, C_2 è *lineare*, cioè se esso è

*) Severi, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della R. Acc. di Torino, t. 64, 1903); n[i] 16, 21.

**) Picard et Simart, loc. cit., Cap. IX, n[o] 12.

***) Humbert, loc. cit.

†) Severi, loc. cit. n[i] 17, 22.

costituito dalle curve di livello costante di una funzione razionale dell' ente F, le curve C_1, C_2 si diranno *linearmente equivalenti*, e si scriverà $C_1 \equiv C_2$. Riserveremo il segno $=$ per esprimere la coincidenza di due curve.

Un sistema algebrico contenente una data curva C, s'indicherà con $\{C\}$; mentre s'indicherà con $|C|$ il sistema lineare individuato dalla curva C.

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ più curve tracciate sulla superficie F, e supponiamo che sussista tra esse una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l, \tag{1}$$

ove le λ, μ son numeri interi positivi, non tutti nulli. Si dirà allora che le l curve date son *legate algebricamente*.

Spesso il legame algebrico (1) verrà scritto sotto la forma simbolica:

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t + \lambda_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{2}$$

ove:

$$\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \cdots, \lambda_l = -\mu_l.$$

I numeri interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ si chiameranno *coefficienti del legame*, e quando occorrerà tenerne presenti i valori, si dirà che *le $C_1, \cdots, C_l$ son legate secondo i numeri $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$.*

Se poi tra le $C_1, \cdots, C_l$ non sussiste alcuna relazione del tipo (2), per valori non tutti nulli delle λ, si dirà che le l curve sono *algebricamente distinte.*

In particolare parleremo di curve *linearmente legate*, quando sia possibile una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{3}$$

per valori non tutti nulli dei numeri interi, positivi o negativi, λ. E nel caso contrario parleremo di curve *linearmente distinte.**)

Indicheremo col simbolo $(C_1 C_2)$ il *gruppo* dei punti comuni alle curve C_1, C_2, e con $[C_1, C_2]$ il *numero* dei punti di questo gruppo.

Se sopra la curva C_1 esiste la *serie caratteristica*, il che, com' è noto, avviene allora e soltanto allora che la C_1 appartiene ad un sistema continuo almeno ∞^1**), con $(C_1 C_1)$ si denoterà un gruppo caratteristico, e

*) Ho qui adottato le locuzioni „legate linearmente" o „linearmente distinte", perchè le locuzioni „linearmente dipendenti o indipendenti" (che ho usate nella mia nota dei Comptes rendus), si sogliono riferire, in un senso diverso da quello del testo, a curve di uno stesso sistema lineare.

**) Ved. le mie Note, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 39, 1904); *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1905).

con $[C_1 C_1]$ il numero dei punti di tale gruppo, cioè il *grado* di C_1. Ma lo stesso simbolo $[C_1 C_1]$ verrà usato in ogni caso per indicare il *grado virtuale* della curva C_1, anche quando su questa non esista la serie caratteristica.

Consideriamo ancora sulla F le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, e poniamo per brevità:

$$n_{ik} = n_{ki} = [C_i C_k]. \qquad (i, k = 1, \cdots, l)$$

Per *matrice discriminante* dell' insieme delle l curve date, s'intenderà la matrice:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix},$$

costituita da l verticali e da $l+1$ orizzontali.*)

Il determinante $|n_{ik}|$ formato dalle prime l orizzontali, si chiamerà semplicemente *determinante dell' insieme delle curve date.*

§ 2.

Criterio aritmetico per riconoscere quand' è che due curve dello stesso ordine, tracciate sopra una superficie algebrica, son legate algebricamente.

2. Se tra due curve algebriche A, B, dello stesso ordine m, tracciate sulla superficie F, sussiste il legame algebrico:

$$\lambda A + \mu B \equiv 0,$$

sarà:

$$\lambda m + \mu m = 0,$$

e quindi risulterà:

$$\mu = -\lambda,$$

cioè il legame algebrico si ridurrà alla forma:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è un intero positivo.

Da ciò segue che le A, B hanno lo stesso grado virtuale n, lo stesso genere virtuale π, e che segano nello stesso numero di punti una mede-

*) La matrice discriminante definita nella mia Nota citata dei Comptes rendus, contiene una orizzontale di più, formata coi numeri virtuali delle intersezioni delle date curve, con una curva canonica della superficie. — Si vedrà dal seguito come la considerazione di quest' orizzontale sia superflua.

sima curva della superficie. In particolare si deduce che il loro grado n è uguale al numero $[AB]$ delle loro intersezioni.

Dimostriamo ora, viceversa, il

Teorema I. *Avendosi sulla superficie F due curve algebriche dello stesso ordine A, B, soddisfacenti alle condizioni aritmetiche:*

$$[AA] = [BB] = [AB] = n > 0,$$

esse hanno lo stesso genere virtuale, e inoltre esiste un numero intero positivo λ, tale che:

$$\lambda A \equiv \lambda B.$$

Indicheremo con:

α, β i generi virtuali delle A, B, e supporremo ad es. $\beta \geqq \alpha$; $|C|$ il sistema delle sezioni piane o iperpiane di F; $|L|$ il sistema canonico di F, non spogliato dalle eventuali componenti fisse eccezionali.

Si può sempre scegliere un multiplo $|E|$ così elevato del sistema $|C|$, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

a) Le curve E abbiano l'ordine maggiore delle L, sicchè ogni sistema avente lo stesso ordine di $|E|$ sia non speciale.

b) La dimensione virtuale:

$$\nu - \varrho + p_a + 1,$$

del sistema $|E|$, di grado ν e genere ϱ, tracciato sulla superficie F di genere aritmetico p_a, sia maggiore di zero.

Il grado e il genere della *curva virtuale* $E + A - B$*), saranno rispettivamente uguali a:

$$\nu, \quad \varrho + \alpha - \beta;$$

sicchè la dimensione virtuale di $|E + A - B|$ sarà espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + \beta - \alpha.$$

Poichè la curva $E + A - B$, in forza dell' ipotesi a) è non speciale, e d'altronde la dimensione virtuale di $|E + A - B|$, in forza dell' ipotesi b), è maggiore di zero, esisteranno certamente curve effettive

$$E + A - B^{**})$$

ed avranno lo stesso ordine delle E. Posto:

$$|E_1| = |E + A - B|,$$

si vede similmente che la dimensione virtuale di $|E_1 + A - B|$ è espressa da:

*) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* (Rend. del R. Istituto lombardo, (2), t. 38, 1905).

**) Cfr. Severi, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 40, 1905); e *Sulle curve algebriche virtuali* . . .

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + 2(\beta - \alpha);$$

e siccome la curva $E_1 + A - B$ è non speciale, esisterà anche il sistema:

$$|E_2| = |E_1 + A - B| = |E + 2(A - B)|.$$

Così proseguendo si vede che esisterà pure il sistema:

$$|E_t| = |E + t(A - B)|,$$

ove t è un intero positivo, comunque grande.

Anzi le E_t avranno lo stesso ordine delle E, e inoltre la dimensione virtuale di $|E_t|$ sarà espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + t(\beta - \alpha);$$

dal che segue che, se fosse $\beta > \alpha$, col crescere di t la dimensione virtuale di $|E_t|$, e quindi la sua dimensione effettiva, si potrebbero render maggiori di un numero prefissato, comunque grande.

Ma ciò è assurdo, perchè sulla F le curve dello stesso ordine delle E, si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici, e quindi, qualunque sia t, la dimensione di $|E_t|$ non può superare la dimensione del più ampio dei sistemi suddetti.

Si conclude che $\beta = \alpha$.

Riprendiamo adesso in esame la successione indefinita di sistemi lineari

(5) $$|E|, \ |E_1|, \ |E_2|, \cdots, |E_t|, \cdots.$$

Poichè tutti questi sistemi lineari debbono esser contenuti totalmente in un numero finito di sistemi algebrici, due casi posson presentarsi:

1°) Nella successione (5) si trova soltanto un numero finito di sistemi lineari tra loro *distinti*.

2°) Esiste qualche sistema algebrico completo, non lineare, contenente totalmente infiniti sistemi lineari distinti della (5).

Nel 1° caso *l'operazione* $+ A - B$ *è periodica*, a partire da un certo termine della (5) (che potrebbe essere anche il primo); e quindi risulta:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è il periodo dell' operazione $+ A - B$.

Nel 2° caso, indichiamo con Σ un sistema algebrico contenente gl'infiniti sistemi lineari distinti:

$$|E_{r_1}|, \ |E_{r_2}|, \ |E_{r_3}|, \cdots \quad (r_1 < r_2 < r_3 < \cdots).$$

Il grado ed il genere della curva virtuale:

$$E_{r_1} + \lambda A - D,$$

ove λ è la differenza $r_s - r_1$ tra i termini r_1, r_s della successione:

(6) $$r_1, \ r_2, \ r_3, \cdots$$

e D una generica curva di Σ, sono rispettivamente uguali a:

$$\lambda^2 n, \quad n\binom{\lambda}{2} + \lambda(\alpha-1) + 1;$$

e quindi la dimensione virtuale di

$$|E_{r_1} + \lambda A - D|, \tag{7}$$

è espressa da:

$$n\binom{\lambda+1}{2} - \lambda(\alpha-1) + p_a. \tag{8}$$

Ora, poichè $n > 0$, scegliendo r_s abbastanza innanzi nella successione (6), la dimensione virtuale (8) risulterà maggior di zero, e inoltre la curva virtuale $E_{r_1} + \lambda A - D$ sarà non speciale. Per quel valore di r_s (e pei successivi) esisterà dunque il sistema (7), *qualunque sia la curva D di Σ*.

Al variare continuo della D entro Σ, il sistema (7) varia con continuità descrivendo un sistema algebrico Σ'.

Riguardando come *elementi* di Σ' i sistemi (7), e come elementi di Σ i sistemi lineari $|D|$, dalla costruzione di Σ' si rileva che le due varietà algebriche Σ, Σ' son riferite *birazionalmente*; e poichè la Σ è irriducibile, si conclude che Σ' è irriducibile come varietà degli elementi (7), e, per conseguenza, anche come varietà delle curve $E_{r_1} + \lambda A - D$.

Quando D viene a coincidere con una E_{r_1} o con una E_{r_s}, il sistema (7) vien rispettivamente a coincidere con:

$$|E_{r_1}+\lambda A-E_{r_1}| = |\lambda A|, \quad |(E+r_1 A-r_1 B)+\lambda A-(E+r_s A-r_s B)| = |\lambda B|;$$

dunque le curve λA, λB appartengono al medesimo sistema Σ'; cioè:

$$\lambda A \equiv \lambda B, \quad \text{c. d. d.}$$

Osservazione 1ª. — L'ipotesi che le due curve A, B abbiano lo stesso ordine, si può anche abbandonare, senza che il teor. I cessi di valere.

Basterà ripetere la dimostrazione sostituendo al sistema $|E|$, di cui sopra, il sistema:

$$|k(A+B)|,$$

ove k è un intero positivo, abbastanza grande.

Osservazione 2ª. — Nel caso in cui le due curve A, B *dello stesso ordine*, soddisfino alle condizioni aritmetiche:

$$[AA] = [BB] = [AB] = 0,$$

aggiungendo alle A, B una sezione piana C, e ponendo $A_1 = C + A$, $B_1 = C + B$, avremo:

$$[A_1 A_1] = [B_1 B_1] = [A_1 B_1] > 0;$$

onde risulterà:

$$\lambda A_1 \equiv \lambda B_1,$$

cioè:

$$(9) \qquad \lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B.$$

Ma da ciò non si può in ogni caso dedurre:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

perchè non sempre togliendo una curva da un sistema algebrico irriducibile, si ottiene come resto un sistema algebrico irriducibile.

È anzi facile costruire esempi di curve A, B, per le quali non è soddisfatta nessuna relazione $\lambda A \equiv \lambda B$, per quanto lo siano le condizioni $[AA] = [BB] = [AB] = 0$*).

Però quel che si può senz' alcun dubbio rilevare dalla relazione (9), è che *le A, B segano nello stesso numero di punti non soltanto una sezione piana della superficie F, ma anche un' altra curva qualunque di F.*

Invero, se D è un' altra curva di F, si ha:

$$\lambda[CD] + \lambda[AD] = \lambda[CD] + \lambda[BD],$$

donde, essendo $\lambda > 0$, si trae:

$$[AD] = [BD].$$

Se dunque D è una curva di grado virtuale > 0, oppure una curva di grado 0, che incontri ciascuna delle A, B almeno in un punto, ponendo:

$$A_2 = D + A, \quad B_2 = D + B,$$

avremo:

$$[A_2 A_2] = [B_2 B_2] = [A_2 B_2] > 0,$$

e quindi risulterà pure:

$$\mu D + \mu A \equiv \mu D + \mu B,$$

ove μ è un intero positivo conveniente.

§ 3.

Criterio aritmetico per riconoscere quand' è che più curve d'una superficie son legate algebricamente.

3. Dal teorema dimostrato nel § precedente, si deduce il seguente:

Teorema II. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè l curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$ tracciate sopra una superficie F, siano legate algebricamente, è che sia nulla la matrice discriminante dell' aggruppamento* $(C_1 C_2 \cdots C_l)$.

*) Si consideri ad es. la superficie F che rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva irrazionale Γ; e s'indichi con Σ il sistema algebrico, d'indice 2 e grado 1, immagine dei punti di Γ. Si trasformi quindi birazionalmente la F, in modo da mutare il punto E di F in una curva eccezionale E', e si assumano come curve A, B le trasformate (astrazion fatta da E') delle curve di Σ che escono da E.

Detti $m_1, m_2, \cdots, m_l$ gli ordini delle $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e posto:

$$n_{ik} = [C_i C_k] \quad (i, k = 1, \cdots, l),$$

dimostriamo anzitutto che la condizione enunciata è necessaria; cioè che se si ha tra le C un legame algebrico:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{10}$$

ove le λ sono interi, positivi o negativi, non tutti nulli, si annullano in conseguenza tutti i determinanti d'ordine l, estratti dalla matrice:

$$\left|\begin{matrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{matrix}\right|. \tag{11}$$

Invero, indicando con D una curva algebrica della F, dalla (10) si trae:

$$\lambda_1 [C_1 D] + \lambda_2 [C_2 D] + \cdots + \lambda_l [C_l D] = 0.$$

Facendo coincidere successivamente la D con una curva dei sistemi lineari $|C_1|, |C_2|, \cdots, |C_l|$, e con una sezione piana o iperpiana di F, avremo quindi le relazioni:

$$\begin{cases} \lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0, \\ \lambda_1 n_{21} + \lambda_2 n_{22} + \cdots + \lambda_l n_{2l} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 n_{l1} + \lambda_2 n_{l2} + \cdots + \lambda_l n_{ll} = 0, \\ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_l m_l = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Poichè queste son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, dovranno esser nulli tutti i determinanti d'ordine l estratti dalla (11); come volevasi provare.

Osservazione. — Se la curva C_1, ad es., non appartiene ad un sistema lineare (nè ad un sistema algebrico) infinito, si perviene lo stesso alla relazione:

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0, \tag{13}$$

aggiungendo alla C_1 una curva E, non coincidente con alcuna delle C, e tale che il sistema $|C_1 + E|$ risulti infinito e irriducibile. Si ottengono allora le relazioni:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 [C_1 + E, C_1] + \lambda_2 [C_1 + E, C_2] + \cdots + \lambda_l [C_1 + E, C_l] = 0, \\ &\lambda_1 [E C_1] \qquad\quad + \lambda_2 [E C_2] \qquad\quad + \cdots + \lambda_l [E C_l] \qquad\quad = 0, \end{aligned}$$

le quali, sottratte membro a membro, dànno la (13).

Dimostriamo ora che la condizione enunciata è sufficiente.

Supponiamo pertanto che la matrice (11) sia nulla. Poichè gli elementi della matrice son numeri interi, si potranno determinare gl' *interi*, non tutti nulli, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, tali che risultino soddisfatte le relazioni (12). Queste λ *non potranno esser tutte dello stesso segno*, perchè gli ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, che entrano come coefficienti delle λ nell' ultima relazione (12), son tutti maggiori di zero.

Ammettiamo, ad es., che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre. Posto allora:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l,$$

consideriamo le due curve:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t, \quad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l.$$

Il grado della prima è espresso da:

$$[AA] = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k n_{ik} \quad (i, k = 1, \cdots, t);$$

e il grado della seconda da:

$$[BB] = \sum_{i,k} \mu_i \mu_k n_{ik} \quad (i, k = t+1, \cdots, l);$$

ed il numero dei punti comuni alle A, B da:

$$[AB] = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k n_{ik} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, t \\ k = t+1, \cdots, l \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando le prime t relazioni (12) ordinatamente per $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, e sommandole quindi membro a membro, avremo:

$$\sum_{i=1}^{t} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \lambda_i - \sum_{i=1}^{t} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \lambda_i = 0;$$

cioè:

$$[AA] - [AB] = 0.$$

Similmente, moltiplicando le $l-t$ relazioni successive ordinatamente per $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$, e sommandole membro a membro, si ha:

$$\sum_{i=t+1}^{l} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \mu_i - \sum_{i=t+1}^{l} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \mu_i = 0,$$

ossia:

$$[AB] - [BB] = 0.$$

Si conclude che:

$$[AA] = [BB] = [AB].$$

E siccome inoltre le A, B, in forza dell' ultima relazione (12), hanno lo stesso ordine, applicando il teor. I, si deduce, se $[AB] > 0$:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è un conveniente intero positivo.

Quest' ultima relazione si può pure scrivere sotto la forma:

$$(14) \qquad \lambda\lambda_1 C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_l C_l \equiv 0,$$

ed esprime appunto che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente legate.

Se poi $[AB] = 0$, si potrà soltanto scrivere la relazione:

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B,$$

ove C è una curva qualunque di grado $\geqq 0$, che seghi ciascuna delle A, B (n° 2, Oss. 2ª).

Tuttavia continueremo a dire che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono *algebricamente legate*, allargando leggermente il significato di questa locuzione; e scriveremo ancora la relazione simbolica (14).

Osservazione 1ª. — Se però qualcuna delle $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e sia p. e. la C_1, ha il grado virtuale positivo, le curve $C_1 + A$, $C_1 + B$ hanno lo stesso grado virtuale maggior di zero, e di più il numero delle loro intersezioni è uguale al loro grado virtuale; onde risulta:

$$\lambda C_1 + \lambda A \equiv \lambda C_1 + \lambda B,$$

con λ intero positivo conveniente; cioè si ha la relazione:

$$\lambda(1+\lambda_1)C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_t C_t \equiv \lambda C_1 + \lambda\mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda\mu_l C_l;$$

e le $C_1 \cdots C_l$ risultano «algebricamente legate» nel senso più ristretto del § 1.

Osservazione 2ª. Se le $C_1, C_2, \cdots, C_{l-1}$ sono algebricamente distinte, in virtù del teorema dimostrato, non dovranno essere nulli tutti i determinanti d'ordine $l-1$, che si possono estrarre dalla matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_1 C_2 \cdots C_{l-1})$; cioè dalla matrice che si ottiene dalla (11) sopprimendo l'ultima verticale e la penultima orizzontale. E similmente dicasi per $l-2, l-3, \cdots$ curve scelte entro al gruppo $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

§ 4.

Criterio trascendente per riconoscere l'esistenza di un legame algebrico tra due o più curve algebriche d'una superficie.

4. Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ l curve algebriche della superficie F, tra le quali passi il legame:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0,$$

ove le λ sono interi non tutti nulli (e, necessariamente, non tutti dello stesso segno).

Supposto ad es. che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre λ, poniamo:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l,$$

e fissiamo l'attenzione sulle curve algebricamente equivalenti:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t, \quad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l.$$

Dicasi Σ un sistema algebrico ∞^1, contenente totalmente le A, B;

$$\varphi(\xi\eta) = 0$$

la curva algebrica piana (irriducibile) i cui punti rappresentano le curve di Σ; e $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ i punti di φ corrispondenti alle ν curve di Σ, che escono dal punto generico x di F.

Siano a, b i punti di φ che rappresentano le curve A, B, ed ϖ un integrale abeliano di 3ª specie, che si conservi ovunque finito sulla φ, tranne nei punti a, b, ove presenti due singolarità logaritmiche coi periodi polari relativi $+1$ e -1*).

Poichè il gruppo $(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu)$ dipende *razionalmente* dal punto x variabile su F, la somma:

$$\varpi(\xi_1) + \varpi(\xi_2) + \cdots + \varpi(\xi_\nu), \tag{15}$$

si trasformerà in un integrale di Picard:

$$J(x) = \int P\,dx + Q\,dy,$$

appartenente alla superficie F di equazione:

$$F(xyz) = 0,$$

(con P, Q funzioni razionali di x, y, z).

Sino a che x non appartiene a nessuna delle due curve A, B, ciascun termine della somma (15) si conserva finito, perchè i punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ risultano tutti diversi dai punti singolari a, b; ma quando x cade in

*) Cfr. p. e. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, Gauthier-Villars, 1895); n° 148.

A (o in B) uno dei punti $\xi_1, \cdots, \xi_\nu$ cade in a (o in b), sicchè la somma (15) diviene infinita.

Ne deriva che l'integrale J conservasi finito in ogni punto di F, non appartenente alle A, B; mentre diviene infinito nei punti di queste curve. Ed è facile vedere che in ciascuno di questi ultimi punti si ha una singolarità logaritmica; sicchè l'integrale J risulta di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche A, B (ossia $C_1, C_2, \cdots, C_l$).

Se, invero, il punto x di F si muove sopra una sezione piana *generica* descrivendo un ciclo lineare infinitamente piccolo, che circondi un punto x_1 di C_1, passando pei λ_1 punti infinitamente prossimi ad x_1, segnati sul piano considerato, dalla curva di Σ, infinitamente vicina ad A; dei ν punti di φ, corrispondenti ad x, uno solo si muove nelle vicinanze di a, girando λ_1 volte attorno a questo punto, nel *medesimo verso*. Onde la somma (15), e quindi l'integrale J, aumentano di λ_1 unità; il che significa che x_1 è per J un punto singolare logaritmico, col periodo polare λ_1.

Analogamente si vede che le $C_2, \cdots, C_t, C_{t+1}, \cdots, C_l$ son curve logaritmiche coi relativi periodi

$$\lambda_2 \cdots \lambda_t, \ -\mu_{t+1}, \cdots, -\mu_l, \quad \text{cioè} \quad \lambda_2 \cdots \lambda_t, \ \lambda_{t+1}, \cdots, \lambda_l.$$

Osservazione. — Se il legame che passa tra le $C_1 \cdots C_l$ è del tipo:

$$C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l,$$

ove le λ, μ son positive, si fisserà l'attenzione sopra le curve algebricamente equivalenti:

$$A = C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t,$$
$$B = C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l,$$

e si ragionerà come nel caso precedente; osservando però che la curva C non risulta logaritmica per l'integrale J, costruito come sopra.

Si conclude pertanto che, quando su F si abbiano più curve algebricamente legate, esiste sempre un integrale di 3ª specie, che diviene infinito logaritmicamente nei punti di quelle curve, conservandosi finito in tutti gli altri punti della superficie.

Supponiamo ora, viceversa, che esista su F un integrale semplice J, di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e dimostriamo che queste curve risultano algebricamente legate.

Dei periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ relativi alle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, alcuni potranno esser nulli (ed allora le corrispondenti curve o non saranno singolari per J, o saranno curve polari); ma è certo che due almeno delle c son diverse da zero, perchè se una sola c fosse diversa da zero, per $y =$ cost. non sarebbe nulla la somma dei residui della funzione razionale $\frac{dJ}{dx}$ *).

*) Cfr. ad es. Appell et Goursat, loc. cit., nº 96.

Se D è una curva arbitraria irriducibile della superficie, l'integrale J stacca su D un integrale abeliano di 3ª specie π, che diviene infinito logaritmicamente nei punti dei gruppi $(C_1 D), (C_2 D), \cdots, (C_l D)$, e che resta finito in tutti gli altri punti della D. Poichè la somma dei periodi polari di π deve esser nulla, avremo:

$$c_1[C_1 D] + c_2[C_2 D] + \cdots + c_l[C_l D] = 0.$$

Supposto ora che la D sia una curva tale che il sistema lineare $|C_i + D|$ risulti infinito e irriducibile, segando con una curva generica E di questo sistema, avremo similmente:

$$c_1[C_1 E] + c_2[C_2 E] + \cdots + c_l[C_l E] = 0;$$

dalla quale, sottraendo membro a membro la precedente, si ricava:

(16) $$c_1 n_{1i} + c_2 n_{2i} + \cdots + c_l n_{li} = 0 \quad (i = 1, \cdots, l).$$

Segando infine con un piano generico, si ottiene la relazione:

(17) $$c_1 m_1 + c_2 m_2 + \cdots + c_l m_l = 0,$$

ove $m_1, m_2, \cdots, m_l$ son gli ordini delle curve logaritmiche.

Poichè le equazioni (16), (17) coesistono per valori non tutti nulli delle c, dovrà esser nulla la matrice dei loro coefficienti, che è precisamente la matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_1\, C_2 \cdots C_l)$; e quindi, pel teor. II, le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

Riassumendo otteniamo il

Teorema III. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè più curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$ tracciate sopra una superficie F, siano algebricamente legate, è che esista su F un integrale semplice di 3ª specie, il quale divenga infinito logaritmicamente soltanto nei punti di $C_1, \cdots, C_l$.*

5. Un' osservazione notevole s'impone a proposito del teorema precedente.

Siano I, J due integrali di 3ª specie possedenti le stesse curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$. Se in corrispondenza ad una medesima di queste curve, e sia p. e. la C_1, i due integrali hanno periodi polari non nulli, si potrà sempre determinare una costante non nulla k, in guisa che l'integrale:

$$I' = J - kI,$$

non possegga più la curva logaritmica C_1. Ma allora due casi possono presentarsi: o I' non è un integrale di 3ª specie, oppure possiede ancora delle singolarità logaritmiche (necessariamente lungo alcune delle curve $C_2, \cdots, C_l$).

Nel 1° caso i periodi polari di J saranno proporzionali ai periodi polari di I, secondo il coefficiente k; nel 2° caso le curve $C_2, C_3, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

Se dunque non è nulla la matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_2, \cdots, C_l)$, cioè se le curve $C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente distinte, l'integrale di 3ª specie più generale avente le curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$ (col periodo *necessariamente* non nullo lungo C_1), si otterrà da un particolare integrale, che possegga le stesse curve logaritmiche, moltiplicandolo per una costante arbitraria ed aggiungendo al prodotto un qualunque integrale di 2ª specie.

Tra gl' integrali che divengono infiniti logaritmicamente lungo $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ce n'è uno (determinato a meno d'un integrale di 2ª specie additivo), il quale ha per periodi polari i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ del legame, che, in virtù del teor. III, intercede tra le l curve logaritmiche. Quest' integrale si costruisce nel modo indicato al principio del n° precedente.

Segue dalle osservazioni premesse, che ogni integrale di 3ª specie colle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ha i periodi polari proporzionali ai numeri interi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$.

Alla stessa conclusione si perviene direttamente, osservando che i periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ ed i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, essendo due sistemi di soluzioni delle equazioni lineari:

$$n_{i1}x_1 + n_{i2}x_2 + \cdots + n_{il}x_l = 0, \quad (i = 1, \cdots, l)$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_l x_l = 0,$$

son proporzionali ai complementi algebrici (supposti non tutti nulli) degli elementi di una orizzontale, appartenente ad un determinante d'ordine l, estratto dalla matrice.

Si conclude col

Teorema IV. *Se la matrice discriminante delle l curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, tracciate sulla superficie F, ha la caratteristica $l-1$, ciascuno degl' infiniti integrali semplici di 3ª specie, che posseggono le sole curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$, ha i periodi polari rispettivamente proporzionali ai coefficienti del legame algebrico che intercede tra le l curve date.*

§ 5.

Caratterizzazione geometrica delle superficie i cui integrali semplici di 3ª specie riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche.

6. Confrontando le più importanti proprietà delle *curve razionali* e delle *superficie algebriche regolari*, un' analogia stretta si riscontra, da vari punti di vista, tra queste due classi di enti algebrici.

Infatti una curva razionale è *caratterizzata* dalle proprietà seguenti:

a) La superficie di Riemann, immagine della curva, è semplicemente connessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua.

b) Ogni sistema continuo di gruppi di n punti sopra una curva razionale, è contenuto nella serie *lineare* di tutti i gruppi di n punti della curva.

D'altra parte una superficie regolare è *caratterizzata* dalle seguenti proprietà, perfettamente analoghe alle precedenti:

a') La varietà riemanniana reale a 4 dimensioni, immagine della superficie complessa, è linearmente uniconnessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua.*)

b') Ogni sistema continuo di curve algebriche sopra una superficie regolare, è contenuto in un sistema *lineare* di curve dello stesso ordine.**)

Un' altra proprietà che pure caratterizza le curve razionali, è che gl' integrali abeliani di 3ª specie, appartenenti ad una tal curva, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Orbene, anche di quest' ultima proprietà sussiste l'analoga per le superficie regolari, come si vedrà dimostrato in questo paragrafo.

7. Sia F una superficie regolare, e sia J un qualunque integrale semplice di 3ª specie, ad essa appartenente.

Se $C_1, C_2, \cdots, C_l$ son le curve logaritmiche di J, poichè sulla F ogni sistema algebrico di curve algebriche è contenuto totalmente in un sistema lineare, pel teor. III, avremo tra le C il legame *lineare:*

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0;$$

il che significa che, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ sono interi positivi e

$$\lambda_{t+1}(= -\mu_{t+1}), \cdots, \lambda_l(= -\mu_l)$$

interi negativi, esisterà su F una funzione razionale $R(xyz)$, la quale si annullerà soltanto nei punti di $C_1, \cdots, C_t$, cogli ordini rispettivi $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, e diverrà infinita soltanto nei punti di $C_{t+1}, \cdots, C_l$, cogli ordini rispettivi $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$.

*) Che per ogni superficie regolare si verifichi questa proprietà, è enunciato nella mia Nota, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie* (Rendiconti dei Lincei, settembre 1904), e dimostrato nella mia Memoria dallo stesso titolo, inserita in questi „Annalen" (Bd. 61, 1905). Che, viceversa, una superficie dotata della proprietà a') sia regolare, risulta, dopo le ricerche dei sigg. Humbert e Picard, dal teorema b') di Enriques.

**) Enriques, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare* (Rendiconti di Palermo, 1899); e *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della R. Acc. di Bologna, Decembre 1904).

Onde l'integrale di 3ª specie:

$$I = \log R(xyz) = \int \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dx}\,dx + \frac{dR}{dy}\,dy\right),$$

possiederà le sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

Detti $i_1, i_2, \cdots, i_l$ i periodi polari di I lungo queste curve logaritmiche, ed $j_1, j_2, \cdots, j_l$ i periodi polari di J lungo le stesse curve, scegliamo una i diversa da zero*), e sia p. e. i_1, e formiamo quindi l'integrale:

$$J_1 = J - \frac{j_1}{i_1}\,I.$$

Se con questa sottrazione spariscono da J tutte le curve logaritmiche, J_1 si ridurrà certo ad una funzione razionale $S(xyz)$, perchè sulla F, a causa della regolarità, non esistono integrali trascendenti della 2ª specie. Avremo quindi:

$$J = \frac{j_1}{i_1}\log R(xyz) + S(xyz),$$

cioè J si ridurrà ad una combinazione algebrico-logaritmica.

Se, invece, l'integrale J_1 è ancora di 3ª specie, poichè per esso la C_1 non è più curva logaritmica, le curve $C_2, \cdots, C_l$ saranno linearmente legate (teor. III); e quindi si potrà costruire un'altra funzione razionale $R_1(xyz)$, i cui zeri ed i cui poli cadano soltanto nei punti delle $C_2, \cdots, C_l$. Detti $i_2', \cdots, i_l'$ i periodi polari dell' integrale:

$$I_1 = \log R_1(xyz)$$

lungo le $C_2, \cdots, C_l$, si sceglierà ancora una i' diversa da zero, e sia p. e. i_2', e si costruirà l'integrale:

$$J_2 = J_1 - \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'}\,I_1,$$

dotato (al più) delle curve logaritmiche $C_3, \cdots, C_l$.

Se J_2 è di 2ª specie, avremo:

$$J = \frac{j_1}{i_1}\log R(xyz) + \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'}\log R_1(xyz) + S_1(xyz),$$

ove S_1 è una funzione razionale. Se J_2 è ancora di 3ª specie, le curve $C_3, \cdots, C_l$ saranno linearmente legate; ecc.

Così proseguendo, per successive sottrazioni di logaritmi di funzioni razionali, si fanno sparire da J tutte le singolarità logaritmiche, e resta come differenza una funzione razionale.

---

*) Non si esclude che alcune delle λ, e quindi alcune delle i (ma non tutte) possano esser nulle.

Si conclude pertanto che «sulla superficie F ogni integrale semplice di 3ª specie, riducesi ad una combinazione algebrico-logaritmica.»

Se, viceversa, gl'integrali di 3ª specie appartenenti ad una superficie F, riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche, alla F non potranno appartenere integrali trascendenti di 2ª specie, e quindi la superficie sarà regolare.*)

Riassumendo, abbiamo dunque il

Teorema V. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè gl'integrali di Picard della 3ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico-logaritmiche, è che la superficie sia regolare.*

Dal punto di vista dell' *Analysis situs* la condizione precedente si può esprimere dicendo che «*la superficie deve avere l'ordine di connessione lineare* $p_1 = 1$.»

Nei casi particolari *il procedimento indicato nella dimostrazione servirà ad effettuare, mediante operazioni razionali e logaritmiche, l'integrazione di ogni differenziale esatto del tipo:*

$$A dx + B dy,$$

ove A, B son funzioni razionali appartenenti ad una data superficie regolare.

Restano così estese quelle regole, che nel calcolo elementare conducono all' integrazione, mediante operazioni razionali e logaritmiche, di ogni funzione razionale di una variabile, o, più generalmente, di ogni funzione razionale appartenente ad una data curva razionale.

§ 6.

Sull' esistenza di una base per la totalità delle curve algebriche appartenenti ad una superficie.

8. La proposizione fondamentale della teoria degl' integrali semplici di 3ª specie, è senza dubbio la seguente, dovuta al sig. Picard:

Per ogni superficie algebrica F esiste un numero intero positivo ϱ, tale che, prese comunque su F $\varrho + 1$ curve algebriche, si può costruire un integrale semplice di 3ª specie appartenente alla superficie e non avente singolarità logaritmiche fuori delle $\varrho + 1$ curve; mentre il fatto analogo non si verifica per tutti i gruppi di ϱ curve della superficie.

In virtù del teor. III ciò significa che sulla F $\varrho + 1$ curve son sempre algebricamente legate, mentre esistono su F gruppi di ϱ curve algebricamente distinte.

Dette $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ ϱ curve di F, la cui matrice discriminante sia

*) Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie* . . .

diversa da zero, cioè che siano distinte algebricamente, se C è una curva arbitraria della superficie, avremo dunque:

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0,$$

con $\lambda \neq 0$. Perveniamo così al

Teorema VI. *Se F è una superficie algebrica qualunque, si possono fissare su F ϱ curve algebricamente distinte, tali che ogni altra curva della superficie sia algebricamente legata ad esse.*

L'insieme delle ϱ curve (algebriche) distinte, si dirà una *base* per la totalità delle curve algebriche della superficie F, ed il carattere ϱ si dirà il *numero-base* della superficie.

Osservazione. — Supponendo, com' è lecito, che qualcuna delle curve della base abbia il grado > 0, la frase «algebricamente legata», che appare nell' enunciato del teor. VI, ha senza dubbio il significato introdotto nel § 1, e non già quello più ampio introdotto verso la fine del § 3 (ved. l'Oss. 1ª del nº 3).

Se la superficie F è regolare, e quindi sopra essa ogni sistema continuo di curve appartiene totalmente ad un sistema lineare, il legame algebrico di cui parla il teor. VI, si ridurrà ad un legame lineare; sicchè sotto forma algebrica potremo enunciare quanto segue:

Detto ϱ il numero-base di una superficie regolare F, si fissino sulla F ϱ curve tali che non esista nessuna funzione razionale, i cui poli e i cui zeri siano complessivamente distribuiti soltanto lungo le ϱ curve fissate: allora, scelta comunque un' altra curva della F, esiste sempre una funzione razionale che non si annulla nè diviene infinita fuori delle $\varrho + 1$ curve considerate.

9. Si può riavvicinare il teor. VI ad un'ovvia proprietà delle serie di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.

Invero, fissato un punto di una data curva algebrica, ogni gruppo di n punti della curva è algebricamente legato al punto fissato, perchè questo punto, ripetuto n volte, sta in un medesimo sistema algebrico col dato gruppo di n punti.

Se la curva è razionale, il sistema algebrico di tutti i gruppi di n punti della curva, è lineare, e si ricade nella proprietà analoga a quella sopra rilevata per le superficie regolari.

Ma sulle curve non ha importanza la considerazione della base e del numero-base, che vale sempre 1.

10. Dimostriamo ora il

Teorema VII. *Se ϱ è il numero-base d'una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinchè ϱ curve della superficie formino una base (cioè siano algebricamente distinte), è che sia diverso da zero il determinante relativo alle ϱ curve.*

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ le curve di una base e $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ le curve di un' altra base.

Avremo allora le relazioni:

$$\lambda_i \Gamma_i + \lambda_{1i} C_1 + \lambda_{2i} C_2 + \cdots + \lambda_{\varrho i} C_\varrho \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

donde si traggono le uguaglianze numeriche:

$$(18) \quad \begin{cases} \lambda_i n'_{ik} + \lambda_{1i} n_{1k} + \lambda_{2i} n_{2k} + \cdots + \lambda_{\varrho i} n_{\varrho k} = 0, & (k = 1, \cdots, \varrho), \\ \lambda_i \nu_{il} + \lambda_{1i} n_{l1} + \lambda_{2i} n'_{l2} + \cdots + \lambda_{\varrho i} n'_{l\varrho} = 0, & (l = 1, \cdots, \varrho), \end{cases}$$

ove si è posto:

$$n_{ik} = [C_i C_k], \quad n'_{ik} = [\Gamma_i C_k], \quad \nu_{il} = [\Gamma_i \Gamma_l].$$

Il *determinante* della base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ è:

$$D = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1\varrho} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} & \cdots & n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix};$$

ed il determinante della base $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} & \cdots & \nu_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Ora, in virtù delle (18) e della regola di moltiplicazione dei determinanti, si ha:

$$(19) \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\varrho)^2 \Delta = \Lambda^2 D,$$

ove:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1\varrho} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{\varrho 1} & \lambda_{\varrho 2} & \cdots & \lambda_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Dalla (19) si rileva facilmente che «se è nullo il determinante di una base, son nulli i determinanti di tutte le altre basi.»

Invero, nessuna delle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho$ può esser nulla, perchè altrimenti le $C_1, \cdots, C_\varrho$ non sarebbero distinte; e quindi se fosse $D = 0$, sarebbe necessariamente $\Delta = 0$.

Viceversa, scambiando l'ufficio delle due basi, si vede che se fosse $\Delta = 0$, sarebbe di conseguenza $D = 0$.

Ora proviamo che si può sempre scegliere una base a cui spetti un determinante non nullo.

Infatti, quando si costruisce la base $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$, si può cominciare a scegliere una curva *del tutto* arbitraria della superficie; poi una curva che non sia legata algebricamente alla precedente, e così continuando. Possiamo dunque supporre che la prima curva scelta Γ_1, sia una sezione piana della superficie.

Allora gli ordini delle $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ risulteranno rispettivamente uguali ai numeri $\nu_{11}, \nu_{12}, \cdots, \nu_{1\varrho}$, onde la matrice discriminante dell' aggruppamento $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho)$ sarà:

$$\left|\begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \cdots & \nu_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} & \cdots & \nu_{\varrho\varrho} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \end{matrix}\right|.$$

Poichè questa matrice ha evidentemente la stessa caratteristica del determinante Δ, in forza del teor. II, si conclude che se fosse $\Delta = 0$, le curve $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$ sarebbero algebricamente legate, e quindi non potrebbero costituire una base.

Dunque è $\Delta \neq 0$, e quindi è anche diverso da zero il determinante D di ogni altra base.

Osservazione 1ª. — Poichè il 1° membro della (19) non è nullo, sarà anche $\Lambda \neq 0$; onde i determinanti D, Δ avranno lo stesso segno.

Si conclude che *i determinanti delle varie basi hanno tutti lo stesso segno.*

Osservazione 2ª. — Quando sia $\varrho = 1$, ogni curva della superficie F si potrà assumere come base, e il determinante relativo si ridurrà al grado virtuale della curva. Ne deriva che ogni curva della superficie avrà il grado virtuale diverso da zero, ed anzi positivo (Oss. 1ª), perchè sulla F esistono certamente curve col grado positivo. Dunque:

Se il numero-base di una superficie è uguale ad 1, *ogni curva della superficie ha il grado virtuale maggior di zero.*

§ 7.

Effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base.

11. Se una superficie F si muta in una superficie F' mediante una trasformazione birazionale che sia priva di punti fondamentali su entrambe le superficie, è ben chiaro che ogni base delle curve di F si muta in una base delle curve di F'; e viceversa.

Il numero-base rimarrà dunque invariato dopo una tale trasformazione.*)

*) Picard et Simart, t. II, pag. 242.

Supponiamo invece che nel passaggio da F ad F' s'introduca la curva eccezionale E', corrispondente al punto (semplice) E di F, senza peraltro che alcuna curva (eccezionale) di F si muti in un punto di F'; e diciamo $(C_1, \cdot\cdot, C_\varrho)$ le ϱ curve di una base della superficie F.

Nel caso che nessuna delle C passi per E, le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$ corrispondenti alle $C_1, \cdots, C_\varrho$, saranno irriducibili, al pari delle C, e nessuna di esse incontrerà la curva E'. Ogni curva D' di F', che non incontri la E', essendo la trasformata di una curva D di F non passante per E, risulterà algebricamente legata a $C_1', \cdots, C_\varrho'$. Se invece la curva D' incontra E', la curva composta $D' + E'$ sarà la trasformata di una curva D di F passante per E; onde si avrà un legame algebrico tra la curva $D' + E'$ e le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè un legame algebrico tra la D' e le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Nel caso in cui una delle C, e sia p. e. C_1, passi per E (colla molteplicità s), indicando con C_1' la trasformata di C_1, astrazion fatta dalla curva E' corrispondente ad E, e con $C_2', \cdots, C_\varrho'$ le trasformate di $C_2, \cdots, C_\varrho$, ogni curva D' di F' risulta algebricamente legata alle curve $sE' + C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè alle $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Ad una conclusione analoga si perviene quando più curve C passino per E.

Si può ora vedere facilmente che, in ognuno dei due casi considerati, le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ sono algebricamente distinte, e quindi costituiscono una base sulla superficie F'. Cominciamo perciò dall' osservare che, in forza dell' ipotesi che la corrispondenza tra F, F' sia priva di punti fondamentali sulla F', la E' è una curva eccezionale di 1ª specie.*)

Nel 1° caso si ha dunque:

$$[E'C_i'] = 0 \ (i = 1, \cdots, \varrho), \quad [E'E'] = -1, \quad [C_i'C_k'] = [C_iC_k];$$

onde il determinante Δ' dell' aggruppamento $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$, si ottiene orlando il determinante Δ della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$ con una orizzontale e con una verticale, che hanno -1 per elemento comune e tutti gli altri elementi nulli. Sicchè risulta

$$\Delta' = -\Delta;$$

e poichè $\Delta \neq 0$, anche $\Delta' \neq 0$, e quindi (teor. II) le $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$ saranno algebricamente distinte.

---

*) Ricordo che una *curva eccezionale* dicesi di 1ª *specie*, quando con una trasformazione birazionale della superficie, la si può mutare in un punto semplice, senza che, necessariamente, qualche suo punto si muti in una curva; mentre dicesi di 2ª *specie* nel caso contrario. Cfr. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, (3), t. 6, 1901); n° 8.

Nel 2° caso si ha:

$$[E'C_1'] = s, \quad [E'C_i'] = 0 \ (i = 2, \cdots, \varrho), \quad [E'E'] = -1,$$

$$[C_1'C_1'] = [C_1C_1] - s^2,$$

e inoltre:

$$[C_i'C_k'] = [C_iC_k]$$

per $i, k = 1, \cdots, \varrho$, eccettuata la coppia $i = 1$, $k = 1$.

Dicendo ancora Δ' il determinante dell' aggruppamento

$$(E', C_1', \cdots, C_\varrho'),$$

verrà dunque:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -1 & s & 0 & \cdots & 0 \\ s & [C_1C_1]-s^2 & [C_1C_2] & \cdots & [C_1C_\varrho] \\ 0 & [C_2C_1] & [C_2C_2] & \cdots & [C_2C_\varrho] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & [C_\varrho C_1] & [C_\varrho C_2] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = -\Delta,$$

e quindi le $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ saranno algebricamente distinte.

Si osservi infine che tra le $\varrho + 1$ curve di una base qualunque della superficie F', deve sempre esservi la curva eccezionale E', perchè altrimenti a quelle $\varrho + 1$ curve corrisponderebbero su F altrettante *curve* algebricamente distinte. Si conclude pertanto col

Teorema VIII. *Se la superficie F si muta birazionalmente in una superficie F', mediante una trasformazione che possegga e' punti fondamentali in punti semplici di F, e nessun punto fondamentale su F', il numero-base di F' supera di e' unità il numero-base ϱ di F, e, sulla F', tra le curve di una base qualunque vi sono sempre le e' curve eccezionali (di 1ª specie), corrispondenti ai punti fondamentali.*

Viceversa, se alle curve di F' che corrispondono birazionalmente alle curve di una base della F, si aggiungono le e' curve eccezionali, si ottiene una base sopra F', e tra i determinanti Δ, Δ' delle due basi si ha la relazione:

$$\Delta' = (-1)^{e'} \Delta.$$

In quest' enunciato abbiamo considerato il caso generale che nel passaggio da F ad F' s'introducano $e' \geqq 1$ curve eccezionali, perchè, se $e' > 1$, la trasformazione birazionale che intercede tra F ed F', si può evidentemente riguardare come prodotto di più trasformazioni birazionali, in ciascuna delle quali s'introduca una sola curva eccezionale.

Osservazione. — Il teorema VIII permette di passare subito alla considerazione di una corrispondenza birazionale che possegga $e' \geqq 1$ punti fondamentali su F ed $e \geqq 1$ punti fondamentali su F'; giacchè, indicando con Φ una superficie birazionalmente identica ad F, e sulla quale gli e' punti fondamentali di F si siano trasformati in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie), senza che alcuna curva eccezionale di F si sia trasformata in un punto, la corrispondenza birazionale tra F e F' può riguardarsi come prodotto delle corrispondenze tra F, Φ e Φ, F', prive di punti fondamentali sulla superficie Φ.

Abbiamo dunque tra i numeri-base ϱ, ϱ' di F, F' la relazione:

$$\varrho + e' = \varrho' + e. \tag{20}$$ *)

12. Il caso che ci resta da esaminare, in cui una trasformazione birazionale della F introduca una curva eccezionale di 2ª specie, si può presentare soltanto quando F sia riferibile ad una rigata (o, in particolare, ad una superficie razionale).**)

Ma in tal caso sussiste il teorema:

«Sopra una superficie F riferibile ad una rigata, la base è costituita da una generatrice (cioè da una curva razionale corrispondente ad una retta generatrice della rigata), da una curva unisecante le generatrici, e da quelle eventuali curve eccezionali di 1ª specie, che si staccano come parti dalle generatrici.» ***)

Sicchè l'introduzione di una curva eccezionale di 2ª specie, non modifica nè la *natura* della base, nè il valore del numero-base.

13. Riassumendo si può enunciare il

Teorema IX. *Il numero-base ϱ è un invariante relativo, cioè non s'altera per quelle trasformazioni birazionali che non introducono curve eccezionali di 1ª specie.*

Se e è il numero delle curve eccezionali (di 1ª specie) di una superficie non riferibile ad una rigata, il numero $\varrho - e$ è un invariante assoluto. Dunque, data una classe di superficie birazionalmente identiche, ϱ assume il valor minimo su quelle superficie della classe, che son prive di curve eccezionali di 1ª specie.

Per le superficie razionali e, più generalmente, per le superficie riferibili ad una rigata, il numero $\varrho - e$ non è un invariante assoluto, perchè nella trasformazione di uno o più punti in altrettante curve eccezionali di 1ª specie, si presenta talora qualche altra curva eccezionale di 1ª specie,

---

*) Cfr. Picard, *Sur une formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique* (Annales de l'École Normale (3), t. 21, 1905); nº 21.

**) Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali* . . .

***) Ved. il nº 14 della mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica* . . ., ove il teorema richiamato è enunciato sotto forma diversa (più espressiva). — Si noti che, se la rigata è irrazionale, ogni curva eccezionale di F è una generatrice (se di 2ª specie) o parte d'una generatrice (se di 1ª specie).

trasformata di una curva eccezionale di 2ª specie, che passi per alcuni punti fondamentali.

Tuttavia *anche per le superficie riferibili alle rigate, ϱ assume il valor minimo sulle superficie prive di curve eccezionali di* 1ª *specie:* e precisamente il valore 1 (sul piano) se la rigata è razionale, il valore 2 (sulla rigata) se la rigata è irrazionale.

A proposito del carattere d'invarianza del numero-base ϱ, ricorderò che ϱ è legato ad altri caratteri invarianti della superficie, dalla notevolissima *relazione di Picard**):

$$\varrho_0 = I + 4q - \varrho + 2,$$

ove ϱ_0 è il numero degl' integrali doppi di 2ª specie, appartenenti alla superficie, I *l'invariante di Zeuthen-Segre***), e $q\ (= p_g - p_a)$ l'irregolarità della superficie medesima.***)

Ad esempio per una superficie razionale l'invariante assoluto $I - \varrho$ vale -2, q vale 0, onde $\varrho_0 = 0$: com' è del resto evidente a priori.

Per una rigata irrazionale di genere p,

$$I = -4p, \quad \varrho = 2, \quad q = p,$$

onde risulta $\varrho_0 = 0$; cioè *una superficie riferibile ad una rigata è priva d'integrali doppi di* 2ª *specie.*†)

14. La considerazione della base dà luogo ad un altro invariante.

Risulta infatti dall' Osservazione con cui termina il nº 11 che, se le due superficie F, F' son riferite birazionalmente in guisa che e' punti semplici di F si mutino in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie) di F', mentre e curve eccezionali (di 1ª specie) di F si mutano in altrettanti punti semplici di F', tra il determinante Δ di una base di F e il determinante Δ' della base *corrispondente* di F' (costituita dalle trasformate delle curve che dànno la base su F — astrazion fatta da quelle che si mutano in punti — coll' aggiunta delle curve eccezionali di F' corrispondenti agli e' punti fondamentali di F), passa la relazione:

$$(-1)^e \Delta' = (-1)^{e'} \Delta. \tag{21}$$

---

*) Picard, *Sur une formule générale* . . ., nº 18.

**) Per la definizione di quest' invariante, ved. ad es. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali* . . .; nº 6.

***) Veramente nella relazione originaria di Picard, in luogo del termine $4q$ c'è il termine $2r$, ove r è il numero degl' integrali semplici di 2ª specie appartenenti alla superficie. Dalle ricerche mie e dei sigg. Enriques e Castelnuovo risulta appunto la relazione:

$$r = 2q.$$

†) La contemporanea mancanza d'integrali semplici e d'integrali doppi di 2ª specie, basterà a caratterizzare le superficie razionali?

Fissiamo ora l'attenzione sulle basi di F e di F' alle quali spettano determinanti aventi il minimo valore assoluto.

Dalla (21) risulta che questi valori minimi, relativi alle due superficie, sono identici; onde si può enunciare il

Teorema X. *Il minimo valore assoluto dei determinanti delle varie basi che si possono costruire sopra una superficie algebrica, rimane immutato per qualunque trasformazione birazionale della superficie.*

Quest' invariante assoluto è un numero intero non inferiore ad 1 (Teor. VII). Sulle superficie razionali e sulle rigate vale precisamente 1.

§ 8.

Il teorema di Bézout sopra una superficie algebrica qualunque. Espressioni del grado e del genere di una curva tracciata sulla superficie.

15. Sul piano il teorema di Bézout dà il modo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque, in funzione di caratteri (gli *ordini*) in cui non entra la considerazione simultanea delle due curve.

Sopra una superficie algebrica F, la questione analoga si può porre nei termini seguenti: Definire un sistema di caratteri di ogni singola curva algebrica della superficie, in guisa che il numero dei punti comuni a due curve di F, si esprima soltanto mediante i caratteri della superficie ed i caratteri definiti delle due curve; e assegnare l'effettiva espressione di quel numero.*)

Diciamo $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ una base delle curve tracciate sulla superficie algebrica F, e C, D altre due curve qualunque della superficie, legate alla base dalle relazioni:

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0, \tag{22}$$

$$\mu D + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\varrho C_\varrho \equiv 0. \tag{23}$$

Dalle (22), (23) si traggono le uguaglianze numeriche:

$$\lambda\,[CD] + \lambda_1\,[C_1\,D] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho D] = 0,$$

$$\mu[C_i D] + \mu_1[C_1\,C_i] + \cdots + \mu_\varrho[C_\varrho C_i] = 0 \quad (i = 1, \cdots, \varrho).$$

Eliminando tra queste $\varrho + 1$ relazioni lineari, le quantità

$$[C_1 D], \cdots, [C_\varrho D],$$

*) Cfr. per l'ordine d'idee del testo la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc. (Memorie della R. Acc. di Torino, (2), t. 52, 1902); n° 26; nonchè l'altra mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica* ...

viene:

$$[CD] = \frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k], \tag{24}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le disposizioni binarie con ripetizione degli indici $1, 2, \cdots, \varrho$.

Abbiamo dunque il

Teorema XI. *Sopra una superficie algebrica qualunque si abbiano due curve algebriche C, D, legate rispettivamente alla base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$, secondo i numeri interi:*

$$(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho), \quad (\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\varrho):$$

allora il numero dei punti comuni alle curve C, D è espresso dalla formola:

$$\frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho).$$

In particolare sul piano, dicendo C_1 una retta, e C, D due curve qualunque di ordini rispettivi m, n, si hanno le relazioni:

$$C - mC_1 \equiv 0, \qquad D - nC_1 \equiv 0,$$

cioè le curve C, D son legate alla base (C_1) secondo i numeri $(1, -m)$, $(1, -n)$. Poichè $[C_1 C_1] = 1$, la (24) dà:

$$[CD] = mn,$$

che è l'ordinario teorema di Bézout.

Dalla (22) discendono pure le equazioni lineari omogenee nelle $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$:

$$\begin{aligned}
\lambda[CD] + \lambda_1[C_1 D] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho D] &= 0,\\
\lambda[CC_1] + \lambda_1[C_1 C_1] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_1] &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\lambda[CC_\varrho] + \lambda_1[C_1 C_\varrho] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_\varrho] &= 0.
\end{aligned}$$

Eliminando tra queste le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$, si ha

$$\begin{vmatrix}
[CD] & [C_1 D] & \cdots & [C_\varrho D] \\
[C_1 C] & [C_1 C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
[C_\varrho C] & [C_1 C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho]
\end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\Delta[CD] - \sum_{i,k} \Delta_{ik}[CC_i]\,[DC_k] = 0 \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho), \tag{25}$$

ove Δ è il determinante della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$, e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell' elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ. Poichè $\Delta \neq 0$ (Teor. VII), dalla (25) si trae:

$$(26) \qquad [CD] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][DC_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho),$$

e si più enunciare il

Teorema XII. *Se sopra una superficie F le curve $C_1, \cdots, C_\varrho$ costituiscono una base, il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque C, D della superficie, è espresso dalla formola:*

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][DC_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho),$$

ove Δ è il determinante della base e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell' elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ.

In particolare sul piano, assumendo come base (C_1) una retta, si ha $\Delta = \Delta_{11} = 1$, onde risulta ancora:

$$[CD] = [CC_1][DC_1].$$

I ϱ numeri interi (positivi o nulli) $[CC_i]$ si possono chiamare, per analogia, *gli ordini della curva C sulla superficie F.*

16. Dalle formole (24), (26) si traggono facilmente due espressioni del grado virtuale di una curva C tracciata sopra una superficie F.

Invero, se la C appartiene ad un sistema lineare infinito (o ad un sistema continuo), assumendo come curva D un' altra curva del sistema, si ha:

$$(24') \qquad [CC] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k [C_i C_k],$$

$$(26') \qquad [CC] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][CC_k].$$

Ma le stesse formole valgono anche se C è isolata, come si vede aggiungendo a C una curva E, tale che il sistema lineare $|D| = |C + E|$ risulti almeno ∞^1, ed osservando che per definizione:

$$[CC] = [CD] - [CE].$$

Dunque: *Il grado virtuale di una curva C, sulla quale non si assegnino punti base, viene espresso in funzione dei coefficienti della relazione che lega C alle curve della base, oppure in funzione degli ordini di C, mediante le formole* (24′), (26′).

Se sulla C si assegna un punto base s-plo, il grado virtuale diminuisce di s^2 unità.

17. Valutiamo ora il genere virtuale della curva C, in funzione dei coefficienti λ o degli ordini di C. Dicendo $|E|$ un sistema lineare della superficie F ed $|E'|$ il sistema aggiunto ad $|E|$, è noto che la differenza $[CE'] - [CE]$ è indipendente dalla scelta del sistema $|E|$, e vale $2\pi - 2 - n$, ove π, n sono il genere e il grado virtuali della C. — Nel caso che sulla F esista il sistema canonico, $[CE'] - [CE]$ dà il numero complessivo delle intersezioni di C con una curva canonica e colle curve eccezionali di F.

Dalla (22), segando prima con E' e poi con E, e quindi sottraendo le uguaglianze numeriche che così si ottengono, si trae:

$$\lambda\Theta + \lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho = 0, \tag{27}$$

ove si è posto:

$$\Theta = 2\pi - 2 - n, \qquad \Theta_i = 2\pi_i - 2 - n_{ii},$$

π_i, n_{ii} essendo il genere ed il grado della curva C_i.

Ricordando la (24'), dalla (27) si ricava la:

$$\pi = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k[C_iC_k] - \frac{1}{2\lambda}(\lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho) + 1 \tag{28}$$

Un' altra espressione di π si può ottenere eliminando le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$ tra la (27) e le equazioni lineari:

$$\lambda[CC_i] + \lambda_1[C_1C_i] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_i] = 0, \quad (i = 1, \cdots, \varrho).$$

Si ha, come condizione di coesistenza delle $\varrho + 1$ equazioni:

$$\begin{vmatrix} \Theta & \Theta_1 & \cdots & \Theta_\varrho \\ [CC_1] & [C_1C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\ [CC_2] & [C_1C_2] & \cdots & [C_\varrho C_2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [CC_\varrho] & [C_1C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = 0;$$

donde, mediante la (26'), si trae:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2\Delta}\sum_{i,k}\Delta_{ik}[CC_k](\Theta_i + [CC_i]), \tag{29}$$

ove Δ, Δ_{ik} hanno il solito significato.

Se la C possiede punti multipli, e tra questi se ne *assegnano* tanti che *equivalgano* a d punti doppi, il genere virtuale $\bar{\pi}$ della C viene espresso dalla formola:

$$\bar{\pi} = \pi - d,$$

ove π è dato dalla (28) o dalla (29).

In particolare sul piano si ha la formola:

$$\bar{\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

che esprime il genere virtuale di una curva d'ordine n, sulla quale si assegnino d punti doppi.

Si conclude pertanto che: *Il genere virtuale d'una curva C, priva di punti base assegnati, è espresso in funzione dei caratteri della C, mediante le formole* (28), (29). *Se sulla C si assegnano d punti doppi, il genere virtuale diminuisce di d unità.*

Balme, 20 Settembre 1905.