Sur les racines de certaines équations.

(Seconde note.)

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Soit $V(y, \xi)$ une fonction de deux variables z et ξ.

Nous allons considérer la fonction

$$(1) \qquad \varphi_n(y, \xi) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_{n-1} y + p_n,$$

où les coefficients

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$$

sont des fonctions d'une seule variable ξ, qu'on détermine par la condition:

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi_n(y, \xi)\, V(y, \xi)\, \omega(y)\, dy = 0$$

pour chaque fonction entière $\omega(y)$ du degré $n - 1$.

Tous les nombres de nos calculs nous supposerons réels.

Outre cela nous supposons, que $V(y, \xi)$ reste constamment positive pour toutes les valeurs considérées de ξ à condition que $a < y < b$.

Alors, comme on sait*), à chaque valeur de ξ correspondent n différentes valeurs de z

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

satisfaisantes à l'équation

$$(3) \qquad \varphi_n(z, \xi) = 0,$$

et tous ces nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se contiennent entre a et b. Pour les définir mieux on peut supposer

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b.$$

Le but de cette note consiste dans la démonstration de quelques propositions sur les changements des x_i correspondants aux changements de ξ.

---

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Zweite Auflage p. 286—297.

Théorème.

Si, pour $a < y < b$, l'on a constamment

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}\right) > 0$$

tous les nombres x_i croissent, lorsque ξ augmente.

Démonstration.

Différentiant la formule (2) par rapport à ξ, on a

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} V \omega \, dy + \int_a^b \varphi_n \frac{\partial V}{\partial \xi} \omega \, dy = 0.$$

Posons maintenant dans la dernière formule

$$\omega = \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i}$$

et dans la formule (2)

$$\omega = \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y - x_i}.$$

De cette manière nous trouvons

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy + \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} dy = 0$$

et

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}\right) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy = 0,$$

d'où il suit

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy = -\int_a^b \frac{\varphi(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} dy.$$

Enfin ayant égard aux égalités

$$\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V(y, \xi) \, dy - \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi) \, dy$$

$$= \int_a^b \varphi_n(y, \xi) \cdot \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i}(y - x_i) - \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi) \, dy = 0$$

et

$$V(x_i, \xi) \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)\, \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}\, dy$$

$$= \int_a^b \left(V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - V(y, \xi) \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right) \frac{[\varphi_n(y, \xi)]^2\, dy}{y - x_i}$$

il est facile de transformer la formule (4) en ce qui suit

$$\text{(5)} \qquad \frac{dx_i}{d\xi} = - \frac{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi_n(y, \xi)\, \varphi_n(y, \xi) \cdot \frac{V(x_i, \xi) \dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{y - x_i}\, dy}{V(x_i, \xi) \displaystyle\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \right)^2 V(y, \xi)\, dy}.$$

D'autre part d'après la condition, dite plus haut, l'expression

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

doit croître ou décroître en même temps que y augmente ou diminue, et il s'en suit que les différences

$$\frac{1}{V(y, \xi)} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{1}{V(x_i, \xi)} \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} = \frac{V(x_i, \xi) \dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{V(y, \xi) \cdot V(x_i, \xi)}$$

et

$$y - x_i$$

doivent être de même signe.

Par conséquent le rapport

$$\frac{V(x_i, \xi) \dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{y - x_i}$$

est un nombre positif.

Donc les deux intégrales de la formule (5) sont positifs et par conséquent $\frac{dx_i}{d\xi}$ est aussi positif; en d'autres termes, x_i et ξ croissent ou décroissent simultanément.

Application.

Posons

$$a = -1, \quad b = +1, \quad V(y, \xi) = \frac{(1 + y)^{\alpha \xi}}{(1 - y)^{\beta \xi}} f(y).$$

Alors

$$\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial \xi} = \alpha \log(1+y) - \beta \log(1-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = \frac{\alpha}{1+y} + \frac{\beta}{1-y}\cdot$$

Par conséquent toutes les conditions du théorème précédent seront satisfaites, si l'on a

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ f(y) > 0 \quad \text{pour} \quad -1 < y < +1.$$

Arrêtons nous sur le cas, où

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(y) = 1,$$

et considérons les fonctions

$$\varphi_n(y, -1),\quad \varphi_n(y, 0),\quad \varphi_n(y, 1).$$

Dans ce cas on peut poser

$$\varphi_n(y, -1) = \frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1-y}},$$

$$\varphi_n(y, \quad 0) = \frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n},$$

$$\varphi_n(y, +1) = \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos y\right\}}{\sqrt{1+y}}$$

et par suite les racines de l'équation $\varphi_n(y, -1) = 0$ en ordre ascendant seront

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{2(n-2)\pi}{2n+1},\ \cdots,\ \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

et les racines de l'équation $\varphi_n(y, +1) = 0$ aussi en ordre ascendant seront

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1},\ \cdots,\ \cos\frac{3\pi}{2n+1},\ \cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot$$

Ayant cela, d'après le théorème précédent il est facile de conclure que les racines de l'équation connue

$$\frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

se trouvent, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right),\ \left(\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},\ \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\right),\ \cdots$$

$$\cdots,\ \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{\pi}{2n+1}\right).$$

Théorème.

Soit

$$\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left[\frac{(y-e)\,V(y,\xi)}{\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial \xi}}\right] < 0,$$

e étant un nombre compris entre a et b.

Alors $(x_i - e)^2$ augmente, lorsque ξ croit.

Démonstration.

Il est facile de transformer la formule (5) en ce qui suit

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(x_i-e)^2}{d\xi}\,V(x_i,\xi)\cdot\int_a^b\left(\frac{\varphi_n(y,\xi)}{y-x_i}\right)^2 V(y,\xi)\,dy$$

$$=\int_a^b \varphi_n(y,\xi)\cdot\varphi_n(y,\xi)\,\frac{(x_i-e)\;V(x_i,\xi)\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}-(y-e)\,V(y,\xi)\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}}{y-x_i}$$

$$+\frac{\partial V(x_i,\xi)}{\partial\xi}\int_a^b\varphi_n(y,\xi)\,\varphi_n(y,\xi)\;V(y,\xi)\,dy$$

et de cette formule notre proposition découle immédiatémment.

Application.

Posons

$$a=-1,\quad b=+1,\quad e=0,\quad V(y,\xi)=(1-y^2)^{-\xi}.$$

Dans ce cas les conditions du théorème précédent sont satisfaites, car

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}=-(1-y^2)^{-\xi}\log(1-y^2)>0\\ &\text{et}\\ &\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left[\frac{y\cdot V(y,\xi)}{\frac{\partial V(y,\xi)}{\partial\xi}}\right]=-\frac{\log(1-y^2)+\frac{2y^2}{1-y^2}}{\{\log(1-y^2)\}^2}<0\end{aligned}\right\}\text{pour } -1<y<+1.$$

Considérant maintenant les fonctions

$$\varphi_n\left(y,\tfrac{1}{2}\right),\quad \varphi_n(y,0),\quad \varphi_n\left(y,-\tfrac{1}{2}\right),$$

qui en vertu de nos positions deviennent

$$\cos(n\arccos y),\qquad \frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n},\qquad \frac{\sin((n+1)\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

nous pouvons conclure, que les racines de l'équation

$$\frac{d^n (y^2 - 1)^n}{dy^n} = 0$$

sont comprises, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{\pi}{n+1}\right),\ \left(\cos\frac{3\pi}{2n},\ \cos\frac{2\pi}{n+1}\right),\ \left(\cos\frac{5\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{n+1}\right),\ \cdots$$

$$\cdots,\ \left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n},\ \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Ces intervalles sont plus étroits que les précédents.

St. Pétersbourg, le 17. novembre 1885.